
HARVARDIANAE
ACADEMIAE
IN
NOV
ANG
SIGILLUM
VE
RI
TAS
CHRISTO
ECCLESIAE
ET

J. A. SERRET

LEHRBUCH DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

NACH AXEL HARNACKS ÜBERSETZUNG

DRITTE AUFLAGE

NEU BEARBEITET VON

GEORG SCHEFFERS

ZWEITER BAND

INTEGRALRECHNUNG

MIT 105 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907

Vorwort.

Auch in diesem Bande wurde besonders auf eine klare, exakte und schlichte Sprache geachtet. Durch mehr als hundert Figuren, die ich sämtlich neu gezeichnet habe, soll der Text verständlicher und belebter werden. Im übrigen gilt in äußerlicher Hinsicht das, was das Vorwort des ersten Bandes besagt. Insbesondere war es aus den schon damals mitgeteilten Gründen nötig, den ganzen Text neu zu schreiben.

Der Inhalt des zweiten Bandes ist mit wenigen Ausnahmen derselbe geblieben wie in der zweiten Auflage, vermehrt um manche dort fehlende, aber durchaus notwendige Beweise:

Im 1. Kapitel mußte der Nachweis des Integrals als Grenzwertes einer Summe vervollständigt werden. Im 2. Kapitel, wo schon gelegentlich die Integration im komplexen Bereiche angewandt wird, mußte gezeigt werden, daß die reellen Ergebnisse, zu denen sie führt, auch wirklich richtig sind.

Das 3. Kapitel hat sich eine besonders gründliche neue Bearbeitung gefallen lassen müssen; z. B. fehlte der Beweis dafür, daß ein Integral, dessen Integrand einen Parameter enthält, eine stetige Funktion der oberen Grenze und des Parameters ist. Wenn ferner die Theorien dieses Kapitels auf Beispiele angewandt werden, ist es zwar bequem zu sagen: „man überzeugt sich leicht, daß für die folgenden Beispiele die Forderungen (nämlich der Konvergenz der Integrale) erfüllt sind“, aber dem Leser wird es doch nicht so leicht. Es war deshalb nötig, dem Studierenden hierbei durch ausführlichere oder knappere Andeutungen zu helfen.

Im 4. Kapitel über die Eulerschen Integrale fehlten manche Zwischenglieder der Entwicklung. Eine besondere Schwierigkeit lag hier ferner darin, daß die ursprüngliche Anlage des Werkes nicht so streng zwischen Reellem und Komplexem schied, wie es durch die in der 2. Auflage getroffene neue Anordnung bedingt wurde.

In das 5. Kapitel über Quadratur und Rektifikation habe ich die Theorie des Polarplanimeters aufgenommen, die in der 2. Auflage an späterer Stelle gebracht wurde. *Serret* hat

einen Paragraphen algebraischen Kurven gewidmet, die sich durch Kreisbogen rektifizieren lassen; es war jedoch aus der bisherigen Ausdrucksweise gar nicht zu erkennen, wie eigentlich der Ansatz zur Lösung des Problems zustande kam. Durch Zurückgehen auf die *Serret*sche Originalabhandlung war es natürlich leicht, auch hier die eigentlich selbstverständliche Forderung zu erfüllen, dem Leser nur solche Dinge vorzutragen, die man selbst durchdacht hat.

Im 6. Kapitel ist die Definition des Doppelintegrals und der zugehörige Existenzbeweis ausführlich gegeben worden. Ich denke, daß jetzt auch die Transformationstheorie für Doppelintegrale exakter als früher ist, denn die früher dafür gegebene Ableitung war in Hinsicht auf die Grenzen der Integrale nicht einwandfrei.

Das 7. Kapitel begann früher mit Betrachtungen über mehrdeutige Funktionen und ihre stetige Fortsetzung; jedoch wurde dabei nicht deutlich genug gesagt, was unter der stetigen Fortsetzung verstanden werden sollte. Diese Betrachtungen habe ich auf das 8. Kapitel verschoben. Dagegen wurden manche fehlende Entwicklungen über die Integrale vollständiger Differentiale und über Kurvenintegrale eingeschaltet.

Das 8. Kapitel, das den Funktionen einer komplexen Veränderlichen gewidmet ist, habe ich durchaus ändern müssen, wobei sich auch die Gelegenheit bot, den Begriff der konformen Abbildung einzuführen.

Die neue Gestaltung des 7. und 8. Kapitels brachte den Vorteil, daß erst ganz zuletzt, in § 5 des 8. Kapitels, der Begriff der mehrdeutigen Funktion eingeführt zu werden brauchte. Bis dahin ist in diesem ganzen Buche ebenso wie im ersten Bande nur von eindeutigen Funktionen die Rede, abgesehen von wenigen Stellen, wo auf die Mehrdeutigkeit besonders bezug genommen wurde.

Der Umfang des Buches ist durch die vielen bisher fehlenden und neu zu gebenden Beweise natürlich etwas vergrößert worden. Fortgelassen wurden außer geringfügigen Einzelheiten nur die Betrachtungen über elliptische Funktionen, über die Lagrangesche Reihe und über Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen. Sie sollen, soweit es unbedingt nötig ist, im dritten Bande Aufnahme finden. Neu eingeschaltet wurde dagegen noch eine Reihe von Einzelheiten, so die Rektifikation ohne Integration, die Guldinschen Regeln, der Begriff des Raumes von n Dimensionen und ein Beweis des Gaußischen Fundamentalsatzes der Algebra.

Diesen zweiten Band des *Serret*schen Werkes ziert ein von *Harnack* herrührender *Anhang über die Fouriersche Reihe und*

das Fouriersche Integral, der in der Geschichte der Mathematik eine solche Bedeutung erlangt hat, daß es angemessen erschien, ihn nach dem Originaldrucke in der ersten Auflage unverändert wiederzugeben. Dabei wurden Vorkehrungen getroffen, die es ermöglichen, Stellen des Originaldruckes auch nach diesem neuen Abdrucke zu zitieren. Die Anmerkungen, die ich dem *Harnack*schen Anhange hinzugefügt habe, sind nicht für den bewanderten Fachmann bestimmt, sondern für diejenigen, die das *Serret*sche Werk studieren und auch diesen nicht leicht zu lesenden Anhang verstehen wollen. Die Verantwortung für für den Inhalt des Anhanges muß jedoch seinem Verfasser überlassen bleiben.

Wer die neue Bearbeitung des zweiten Bandes des *Serret*schen Werkes mit der früheren vergleicht, wird hoffentlich finden, daß ich überall meine Pflichten als Herausgeber sorgfältig zu erfüllen versucht habe. Die Arbeit war aber schwer, namentlich deshalb, weil es sich darum handelte, innerhalb eines schon gegebenen Rahmens Verbesserungen vorzunehmen. Man möge bei der Beurteilung der neuen Bearbeitung auf diesen Zwang billig Rücksicht nehmen.

Auch diesem Bande ist ein ausführliches alphabetisches Sachregister beigegeben.

Ich hatte die Freude, beim Lesen der Korrektur in bereitwilligster und gewissenhaftester Weise durch meinen verehrten Freund, Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. *Friedrich Dingeldey* in Darmstadt unterstützt zu werden, und ein Teil des Werkes verdankt auch der gütigen Hilfe des Herrn Oberlehrer Prof. Dr. *Jakob Kraus* in Darmstadt eine Reihe von kleineren Verbesserungen. Beiden, sowie dem Verlagshause für ihre Mitwirkung meinen besten Dank zu sagen, ist mir eine angenehme Pflicht. Ferner möchte ich nicht unerwähnt lassen, daß eine Anzahl von Berichtigungen zum ersten Bande Herrn stud. *W. Flügel* in Berlin zu verdanken ist.

Steglitz, im Juli 1907.

Georg Scheffers.

Inhalt.*)

Erstes Kapitel.

Das Integral.

*) Ein alphabetisch geordnetes Sachregister befindet sich am Schlusse des Bandes.

Zweites Kapitel.

Integrale von elementaren Funktionen.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.*)

Theorie der Eulerschen Integrale. 192

*) Dies Kapitel steht für sich und kann daher ohne Beeinträchtigung des späteren überschlagen werden.

Fünftes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Siebentes Kapitel.

Integration vollständiger Differentiale und Integration längs Kurven.

Achtes Kapitel.

Erstes Kapitel.

Das Integral.

---

§ 1. Die Integration als Umkehrung der Differentiation.

399. Grundaufgabe der Integralrechnung. Die Grundaufgabe der Differentialrechnung ist das Berechnen der Ableitungen gegebener Funktionen, vgl. Nr. 32 und 44. Dagegen wird in der *Integralrechnung* die umgekehrte Aufgabe gestellt: Ist eine Funktion $f(x)$ von einer Veränderlichen x gegeben, so soll eine solche Funktion $F(x)$ von x berechnet werden, deren Ableitung die gegebene Funktion $f(x)$ ist; in Formel:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

worin $f(x)$ *gegeben* ist und $F(x)$ *gesucht* wird. Jede Funktion $F(x)$, die dieser Formel genügt, heißt aus einem später (in Nr. 410) anzugebenden Grunde ein *Integral* der gegebenen Funktion $f(x)$; ihre Berechnung heißt *Integration* oder *Integrieren* von $f(x)$.

Wie es im ersten Bande in den zehn ersten Kapiteln geschah, wollen wir uns auch jetzt bis auf weiteres auf *reelle* Funktionen einer *reellen* Veränderlichen beschränken.

400. Gesamtheit der Integrale einer gegebenen Funktion. Wenn $F(x)$ und $\Phi(x)$ zwei in einem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ definierte Funktionen von x sind und in diesem Intervalle an jeder Stelle x übereinstimmende Ableitungen haben, so ist die Differenz $\Phi(x) - F(x)$ nach Satz 8, Nr. 29, überall im Intervalle konstant. Ist $f(x)$ die gemeinsame Ableitung von $F(x)$ und $\Phi(x)$, so sind $F(x)$ und $\Phi(x)$ Integrale von $f(x)$. Die Differenz irgend zweier Integrale von $f(x)$ ist demnach in dem Intervalle konstant. Anders ausgesprochen: Ist

$F(x)$ ein Integral von $f(x)$, so hat jedes andere Integral von $f(x)$ die Form $\Phi(x) = F(x) +$ konst.

Umgekehrt: Wenn $F(x)$ ein Integral von $f(x)$, also $F'(x) = f(x)$ ist, so folgt:

$$\frac{d}{dx}[F(x) + \text{konst.}] = F'(x) = f(x),$$

d. h. auch $F(x) +$ konst. ist ein Integral von $f(x)$.

Satz 1: Ist $F(x)$ in dem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ ein Integral der Funktion $f(x)$, so hat $f(x)$ unzählig viele Integrale. Sie ergeben sich sämtlich aus $F(x)$ durch Addition einer willkürlichen Konstanten.

Alle Integrale einer gegebenen Funktion $f(x)$ unterscheiden sich demnach nur um *additive* Konstanten voneinander; und wenn man nur eines von ihnen kennt, so kennt man alle.

Unter diesen Integralen $F(x) +$ konst. von $f(x)$ ist insbesondere nur eines vorhanden, das für einen bestimmten Wert von x, der dem Intervalle angehört, z. B. für $x = a$, einen vorgeschriebenen Wert A hat. Denn man muß, um dies Integral $F(x) + C$ ausfindig zu machen, die Konstante C so bestimmen, daß

$$F(a) + C = A$$

ist. Hieraus folgt $C = A - F(a)$, so daß

$$F(x) + C = F(x) - F(a) + A$$

das gesuchte Integral ist. Soll das Integral insbesondere für $x = a$ den Wert Null haben, so ist es gleich $F(x) - F(a)$.

Den Wert, den das Integral am Anfange $x = a$ des Intervalles hat, nennt man den *Anfangswert* des Integrals.

Satz 2: Hat die Funktion $f(x)$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ Integrale, so hat sie ein und nur ein Integral, dessen Anfangswert eine vorgeschriebene Größe A hat. Ist nämlich $F(x)$ irgend ein Integral von $f(x)$, so hat das in Rede stehende Integral den Wert $F(x) - F(a) + A$. Insbesondere ist $F(x) - F(a)$ dasjenige Integral von $f(x)$, dessen Anfangswert gleich Null ist.

401. Über den Zusammenhang zwischen dem Differenzieren und Integrieren. Hat $f(x)$ in einem Intervalle das Integral $F(x)$, so ist $F'(x)$ nach der Definition des Integrals gleich $f(x)$. Wenn man also eine Funktion $f(x)$ zuerst integriert

und alsdann das Ergebnis differenziert, so geht wieder die ursprüngliche Funktion $f(x)$ hervor. Die beiden Operationen des Integrierens und Differenzierens heben einander daher auf, d. h. das Integrieren ist die zum Differenzieren *inverse* Operation.

Allerdings findet die gegenseitige Aufhebung nicht vollständig bei der umgekehrten Reihenfolge beider Operationen statt. Denn wenn man eine gegebene Funktion $F(x)$ zuerst differenziert, wodurch man zu ihrer Ableitung $f(x)$ gelangt, und alsdann wieder $f(x)$ integriert, d. h. *irgend ein* Integral von $f(x)$ sucht, so gelangt man nach Satz 1 nicht notwendig zu $F(x)$ zurück, sondern zu $F(x) + C$, wo C eine willkürliche Konstante bedeutet. Das Differenzieren ist eben, sobald es überhaupt möglich ist, eine eindeutige Operation, das Integrieren dagegen nicht.

Außer diesem Unterschiede ist insbesondere noch einer hervorzuheben: Beschränken wir uns auf den Bereich derjenigen Funktionen von einer Veränderlichen, die allein aus den in Nr. 44 erwähnten *elementaren* Funktionen zusammengesetzt sind, so wissen wir, daß auch die Ableitungen dieser Funktionen elementar zusammengesetzte Funktionen sind. Wenn wir das Differenzieren durch das Integrieren ersetzen, so gilt jedoch nichts Entsprechendes. Man kann vielmehr zeigen, daß manche elementar zusammengesetzte Funktionen Integrale haben, die keine elementar zusammengesetzte Funktionen sind. Dieser Unterschied läßt sich weiterhin verfolgen, wenn wir den Bereich der zu betrachtenden Funktionen noch mehr einschränken: Wir wissen, daß die Ableitung einer rationalen Funktion ebenfalls eine rationale Funktion ist. Entsprechendes gilt nicht stets für die Integrale einer rationalen Funktion, z. B. die rationale Funktion $1 : x$ hat das Integral $\ln x +$ konst.

Integrale kann man leicht in beliebiger Anzahl so bilden: Man nehme irgend eine Funktion $F(x)$ an und differenziere sie. Ist $f(x)$ die hervorgehende Ableitung, so weiß man, daß die Integrale der bekannten Funktion $f(x)$ den bekannten Ausdruck $F(x) +$ konst. haben. Natürlich ist dies keine ausreichende Methode zur Berechnung von Integralen.

Im ersten Bande haben wir tatsächlich schon häufig Integrale berechnet, ohne es auszusprechen. Beispielsweise

lehrt der Satz 11 von Nr. 192, daß die von einer Kurve $y = f(x)$ begrenzte Fläche u die Ableitung $du:dx = f(x)$ hat, wofür wir jetzt sagen können: Diese Fläche u ist ein Integral von $f(x)$. Infolge hiervon sind alle Aufgaben, die Flächenberechnungen betreffen, Aufgaben der Integralrechnung. In der Tat haben wir namentlich im achten Kapitel des ersten Bandes vielfach Flächen berechnet, indem wir davon ausgingen, daß uns schon Funktionen bekannt waren, deren Ableitungen die vorgelegten Funktionen $y = f(x)$ waren, vgl. z. B. Nr. 219. Ebenso ist die Aufgabe der Rektifikation, d. h. der Berechnung der Bogenlänge einer Kurve, nach Formel (4) in Nr. 193 eine Aufgabe der Integralrechnung. Wir werden Anlaß haben, hierauf noch einmal zurückzukommen.

Ebenso wie man der Ableitung einer Funktion $F(x)$ eine besondere Bezeichnung, nämlich $dF:dx$ oder $F'(x)$, gegeben hat, liegt das Bedürfnis vor, die Integrale einer Funktion $f(x)$ durch ein Zeichen darzustellen, und zwar benutzt man das Zeichen

$$\int f(x)\,dx \tag{1}$$

als Ausdruck irgend eines Integrals von $f(x)$. Es wird gelesen: Integral von $f(x)$ oder Integral über $f(x)\,dx$. Das *Integralzeichen* $\int$ ist eigentlich ein lang gezogenes S und soll andeuten, daß die Integrale als Summen aufgefaßt werden können, was wir jedoch erst im nächsten Paragraphen auseinanderzusetzen imstande sind. In (1) steht unter dem Integralzeichen das Produkt $f(x)\,dx$, und dies ist das *Differential des Integrals.* Denn wenn das Integral (1) die Funktion $F(x)$ ist, so ist ja

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad \text{d. h.} \quad dF(x) = f(x)\,dx.$$

Die Funktion $f(x)$, die in (1) integriert werden soll, heißt der *Integrand.*

Ist uns irgend eine bestimmte Funktion $F(x)$ schon bekannt, deren Ableitung die vorgelegte Funktion $f(x)$ ist, so hat das Integral von $f(x)$ nach Satz 1, Nr. 400, die Form $F(x) +$ konst., so daß also

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \text{konst.} \tag{2}$$

ist. Schließlich sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß

(3)
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

ist.

402. Die einfachsten Integrale. Bekanntlich gelten die folgenden Formeln der Differentialrechnung:

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n \text{ (für } n \neq -1), \quad \frac{d}{dx}\frac{e^{mx}}{m} = e^{mx} \text{ (für } m \neq 0),$$

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x} \text{ (für } x > 0), \quad \frac{d\ln(-x)}{dx} = \frac{1}{x} \text{ (für } x < 0),$$

$$\frac{d(-\cos x)}{dx} = \sin x, \quad \frac{d(-\operatorname{ctg} x)}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{d(-\arccos x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d\operatorname{arc\,tg} x}{dx} = \frac{d(-\operatorname{arc\,ctg} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Aus ihnen ergeben sich sofort die grundlegenden Integrale:

(1) $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{(für } n \neq -1), \quad \int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} + C \text{(für } m \neq 0),$$

(2) $$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \text{ (für } x > 0), \quad \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C \text{(für } x < 0),$$

(3) $$\begin{cases} \int \sin x\,dx = -\cos x + C, & \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \\ \int \cos x\,dx = \sin x + C, & \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \end{cases}$$

(4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C',$$

(5) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C',$$

worin C und C' willkürliche Konstanten bedeuten.

Hierbei sind jedoch einige Anmerkungen zu machen: Die Differentiationsformeln, aus denen sich das Integral (4) ergibt, enthalten eine Quadratwurzel. Nach Satz 29, Nr. 53, hat diese Wurzel dasselbe Vorzeichen wie der zu $\arcsin x$ gehörige Kosinus bzw. der zu $\arccos x$ gehörige Sinus. Wenn wir also die Quadratwurzel in (4) positiv annehmen, so bedeutet $\arcsin x$

einen Winkel, dessen Kosinus positiv ist, und arc cos x einen Winkel, dessen Sinus positiv ist. Wir können daher z. B. die Voraussetzung hinzufügen, daß arc sin x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ und arc cos x zwischen 0 und π liegen soll. Alsdann ist auch die Summe beider Arkusfunktionen gleich $\frac{1}{2}\pi$, also arc sin $x = \frac{1}{2}\pi -$ arc cos x, wodurch es sich aufklärt, daß wir in (4) für ein Integral zwei Ausdrücke haben. Daß sich auch das Integral (5) auf zwei Arten ausdrücken läßt, liegt daran, daß stets arc tg $x +$ arc ctg x gleich einem positiven oder negativen ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ ist.

Ferner haben wir in (2) für ein Integral verschiedene Ausdrücke aufgestellt, je nachdem die Veränderliche x positiv oder negativ ist. Dies mußte geschehen, weil die erste Formel (2) augenscheinlich für negatives x und die zweite Formel (2) für positives x unbrauchbar wird, denn negative Zahlen haben keine reellen Logarithmen. Der Integrand $1 : x$ ist für $x = 0$ unstetig, so daß also die Veränderliche entweder auf das Intervall $0 < x < +\infty$ oder auf das Intervall $-\infty < x < 0$ zu beschränken ist.

403. Das Ziel der nächsten Betrachtungen. Wir sind noch nicht imstande, die Frage zu beantworten, ob überhaupt eine in einem Intervalle stetige Funktion $f(x)$ Integrale hat. Den Existenzbeweis erbringen wir im nächsten Abschnitte auf folgendem Wege: Wir erinnern uns daran, daß die Fläche u einer Kurve $y = f(x)$ nach Satz 11 in Nr. 192 ein Integral von $f(x)$ ist, wie schon in Nr. 401 hervorgehoben wurde. Aber wir sagten auch in Nr. 192 ausdrücklich, daß eine exakte Definition des Begriffes einer *krummlinig* begrenzten Fläche noch aussteht. Deshalb gehen wir zunächst daran, eine solche Definition zu gewinnen. Dadurch werden wir zugleich zu einer neuen Auffassung des Integralbegriffes gelangen, die äußerst wichtig ist und uns auch das Integralzeichen $\int$ erklärlich machen wird.

Trotzdem wir im nächsten Paragraphen von geometrischen Überlegungen ausgehen, werden wir aber wohlbemerkt bei der Feststellung der neuen Auffassung des Integralbegriffes die in Nr. 7 ausgesprochene Forderung befriedigen, nämlich die Beweise analytischer Sätze von den Hilfsmitteln der Veranschaulichung unabhängig machen.

§ 2. Das Integral als Grenzwert einer Summe.

404. Polygonflächen. Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ *stetige* Funktion von x. Ob sie differenzierbar ist oder nicht, bleibt für die folgende Betrachtung völlig gleichgültig; nur bei der Veranschaulichung unserer Betrachtung durch Figuren setzen wir voraus, daß $f(x)$ eine Ableitung habe, also $y = f(x)$ durch eine Kurve dargestellt sei (vgl. Nr. 167). Es genügt bei den analytischen Betrachtungen, daß $f(x)$ stetig ist, d. h. $y = f(x)$ durch eine lückenlose Kette von Punkten versinnlicht wird.

Ehe wir nun zu der noch fehlenden exakten Definition der Fläche gelangen, die einerseits von dem Bilde dieser stetigen Funktion $y = f(x)$, andererseits von der Abszissenachse und ferner von den zu $x = x_0$ und $x = X$ gehörigen Ordinaten AC und BD begrenzt wird, siehe Fig. 1, ersetzen wir das Bild von $y = f(x)$ durch einen gebrochenen Linienzug. Wir teilen nämlich die Strecke AB in beliebiger Weise ein, etwa in n Teile $AP_1, P_1P_2, \ldots P_{n-1}B$. Es

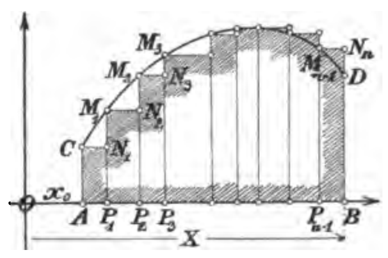


Fig. 1.

seien $P_1M_1, P_2M_2, \ldots P_{n-1}M_{n-1}$ die zu den $n-1$ Teilpunkten gehörigen Ordinaten. Wir legen nun durch C die Parallele zur x-Achse soweit, bis sie die Ordinate P_1M_1 etwa in N_1 trifft, dann ebenso durch M_1 die Parallele zur x-Achse soweit, bis sie die Ordinate P_2M_2 etwa in N_2 trifft, usw. Schließlich wird die Parallele zur x-Achse, die wir durch M_{n-1} legen, die letzte Ordinate BD in einem Punkte N_n schneiden. Nunmehr ersetzen wir das Bild der Funktion $y = f(x)$ durch den gebrochenen treppenförmigen Linienzug

$$CN_1M_1N_2M_2 \ldots M_{n-1}N_n,$$

der aus lauter geradlinigen Stücken besteht und den wir kurz ein dem Bilde der Funktion $y = f(x)$ *eingeschriebenes Polygon* nennen. Es ist dabei sehr wohl möglich, daß die Strecken dieses Polygons teils auf der einen, teils auf der anderen Seite des Bildes von $f(x)$ verlaufen, wie es in Fig. 1 der Fall ist.

Unter der *Fläche* dieses eingeschriebenen Polygons verstehen wir ferner diejenige Fläche, die zwischen dem Polygon, der x-Achse und AC und BD liegt, oder, besser gesagt, die Summe der Flächen derjenigen Rechtecke, deren Grundseiten die Teile AP_1, P_1P_2, $\cdots P_{n-1}B$ des Intervalles $X - x_0$ auf der Abszissenachse und deren Höhen die zugehörigen Ordinaten des Polygons sind. Bezeichnen wir die Abszissen von

$$P_1, P_2, \cdots P_{n-1} \text{ mit } x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, \text{ so sind}$$

$$x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad \cdots\cdot X - x_{n-1}$$

die Grundseiten und

$$f(x_0), \quad f(x_1), \cdots f(x_{n-1})$$

die Höhen der Rechtecke, so daß die Fläche des Polygons durch die Summe

$$(1) \quad J = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(X - x_{n-1})$$

dargestellt wird. Flächeneinheit ist dabei natürlich das Quadrat über der Längeneinheit der Figur.

Das allgemeine Glied der Summe (1) hat die Form $f(x)\Delta x$, wenn nämlich x die Abszisse des Anfangspunktes irgend eines der Teilintervalle AP_1, P_1P_2, $\cdots P_{n-1}B$ und Δx die Länge des betreffenden Teilintervalles bezeichnet. Daher schreiben wir die Summe (1) kürzer symbolisch so:

$$(2) \qquad J = \sum_{x_0}^{X} f(x)\Delta x.$$

Die Indizes x_0 und X sollen dabei andeuten, daß sich die Summe auf das ganze Intervall von $x = x_0$ bis $x = X$ erstreckt.

Wir werden von dieser Fläche J des eingeschriebenen Polygons zur krummlinig begrenzten Fläche durch einen Grenzübergang gelangen, indem wir nämlich *alle* Teilintervalle Δx nach Null streben lassen, wobei natürlich ihre Anzahl n nach Unendlich streben muß. Wir werden beweisen, daß J bei diesem Grenzübergange in der Tat einen bestimmten endlichen Grenzwert hat. Aber da wir uns die Art der Teilung von $X - x_0$ in kleinere Teile völlig willkürlich denken können, so muß außerdem gezeigt werden, daß dieser Grenzwert völlig unabhängig davon ist, von welcher Art der Teilung von $X - x_0$ man auch ausgehen mag. Bei diesen beiden Beweisen bedienen

wir uns eines einfachen Satzes über stetige Funktionen, der in der nächsten Nummer abgeleitet werden soll. Alsdann werden wir in Nr. 406 den ersten, in Nr. 407 den zweiten der beiden Beweise bringen.

405. Schwankung einer stetigen Funktion. Unter der *Schwankung* einer Funktion innerhalb eines solchen Intervalles, in dem die Funktion stetig ist, verstehen wir die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Werte der Funktion innerhalb des Intervalles, also eine ihrer Natur nach stets positive Größe. Es gilt der

Satz 3: Ist $f(x)$ in dem Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ stetig, so gibt es, wie klein man auch eine positive Zahl τ wählen mag, stets eine positive Zahl σ derart, daß die Schwankung der Funktion kleiner als τ in jedem solchen Intervalle ist, das dem Gesamtintervalle angehört und nicht länger als σ ist.

Denn nach Satz 3, Nr. 20, gibt es, wenn x_1 beliebig im Intervalle von x_0 bis X gewählt wird, eine positive Zahl h derart, daß für

$$x_1 - h < x < x_1 + h \text{ auch } |f(x) - f(x_1)| < \tfrac{1}{2}\tau$$

ist, falls τ beliebig klein, aber positiv gewählt worden ist. Sind x und x' irgend zwei Stellen dieses Intervalles von der Länge $2h$, so ist also

$$|f(x) - f(x_1)| < \tfrac{1}{2}\tau \text{ und } |f(x') - f(x_1)| < \tfrac{1}{2}\tau,$$

woraus wegen

$$f(x) - f(x') = [f(x) - f(x_1)] - [f(x') - f(x_1)]$$

nach Satz 2, Nr. 4, sofort folgt:

$$|f(x) - f(x')| < \tau.$$

Erreicht $f(x)$ insbesondere für den angenommenen Wert x das größte Maximum und für den angenommenen Wert x' das kleinste Minimum im Intervalle von $x_1 - h$ bis $x_1 + h$, so zeigt diese Ungleichung, daß die Schwankung von $f(x)$ innerhalb dieses Intervalles um x_1 herum kleiner als τ ist. Die Größe $2h$ des Intervalles kann mit x_1 veränderlich sein. Wenn x_1 in eine der beiden Grenzen x_0 und X rückt, kommt nur das halbe Intervall h in Betracht. Deshalb bedeute σ eine

positive Zahl, die kleiner als alle vorkommenden positiven Zahlen h ist. In jedem Intervalle von der Länge σ ist die Schwankung alsdann kleiner als τ, wie es der Satz behauptet.

406. Existenz eines Grenzwertes des Polygoninhaltes. Wieder sei $f(x)$ eine im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ stetige Funktion. Ferner möge irgend eine unbegrenzte Folge von lauter *beständig abnehmenden* positiven Zahlen $\tau_1, \tau_2, \cdots$ ausgewählt sein, die nach Null strebt, wie z. B. die Folge $1, 1/2, 1/3, \cdots$. Nach dem letzten Satze gibt es dann zu jeder dieser Zahlen τ_i eine positive Zahl σ_i derart, daß die Schwankung von $f(x)$ in jedem Teilintervalle, das kürzer als σ_i ist, geringer als τ_i wird.

Wir wollen nun das Gesamtintervall $X - x_0$ zunächst in solche Teile zerlegen, die sämtlich kürzer als σ_1 sind. Zu dieser Zerlegung gehört nach Nr. 404 ein gewisses Polygon und ein gewisser Polygoninhalt J_1. Alsdann wollen wir *jedes einzelne* der Teilintervalle weiterhin in lauter Teile zerlegen, von denen jeder kürzer als σ_2 ist. Zu dieser neuen, feineren Zerlegung gehört ein neuer Polygoninhalt J_2. Wir teilen fernerhin *jedes einzelne* der neuen Intervalle in lauter solche Teile, die kürzer als σ_3 sind, so daß wir zu einem neuen Polygoninhalte J_3 kommen, usw. Wir behaupten, daß die Inhalte $J_1, J_2, J_3, \cdots$ einem bestimmten endlichen Grenzwerte zustreben.

Um dies zu beweisen, stellen wir eine Reihe von Ungleichungen auf. Es seien zunächst $\Delta_1, \Delta_2 \cdots \Delta_n$ die Teilintervalle der ersten Zerlegung, so daß

$$X - x_0 = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n, \quad \Delta_1 < \sigma_1, \cdots \Delta_n < \sigma_1$$

ist. Ferner seien $k_1, k_2, \cdots k_n$ bzw. $g_1, g_2, \cdots g_n$ die jeweils kleinsten bzw. größten Werte von $f(x)$ in den Intervallen $\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_n$. Der Polygoninhalt J_1 ist eine Summe von n Rechtecksinhalten. Der Inhalt des zu Δ_1 gehörigen Rechtecks liegt zwischen $k_1 \Delta_1$ und $g_1 \Delta_1$, der Inhalt des zu Δ_2 gehörigen Rechtecks zwischen $k_2 \Delta_2$ und $g_2 \Delta_2$, usw.

Demnach ist

$$(1) \qquad k_1 \Delta_1 + \cdots + k_n \Delta_n \leqq J_1 \leqq g_1 \Delta_1 + \cdots + g_n \Delta_n.$$

Nach Satz 3 der vorigen Nummer ist ferner:

$$g_1 - k_1 < \tau_1, \quad g_2 - k_2 < \tau_1, \quad \cdots g_n - k_n < \tau_1,$$

d. h. die Differenz der beiden Grenzen, zwischen denen J_1 nach (1) liegt, ist kleiner als

$$\tau_1 \Delta_1 + \cdots + \tau_1 \Delta_n = \tau_1(\Delta_1 + \cdots + \Delta_n) = \tau_1(X - x_0).$$

Ist ferner K der kleinste und G der größte Wert, den $f(x)$ im Gesamtintervalle $X - x_0$ erreicht, so ist

$$K \leqq k_1, \quad \cdots K \leqq k_n \text{ und } g_1 \leqq G, \quad \cdots g_n \leqq G,$$

also die untere Grenze in (1) größer als $K(X - x_0)$ oder wenigstens ebenso groß und die obere Grenze in (1) kleiner als $G(X - x_0)$ oder höchstens ebenso groß.

Wir haben also zweierlei erkannt:

Erstens: Der Polygoninhalt J_1 liegt nach (1) zwischen zwei Grenzen

$$\varkappa_1 = k_1 \Delta_1 + \cdots + k_n \Delta_n, \quad \gamma_1 = g_1 \Delta_1 + \cdots + g_n \Delta_n.$$

Diese Grenzen sind die Summen aus den Produkten der benutzten Teilintervalle und der jeweils kleinsten bzw. größten Werte, die $f(x)$ in den Teilintervallen annimmt. Der Unterschied beider Grenzen ist kleiner als $\tau_1 (X - x_0)$. Dabei bedeutet τ_1 eine obere Grenze für die Schwankungen von $f(x)$ in den Teilintervallen und $X - x_0$ die Gesamtlänge des Intervalles, auf das sich J_1 bezieht.

Zweitens: Die Grenzen $\varkappa_1$ und γ_1, zwischen denen J_1 liegt, sind ihrerseits wieder in zwei Grenzen $K(X - x_0)$ und $G(X - x_0)$ eingeschlossen, wobei K bzw. G den kleinsten bzw. größten Wert von $f(x)$ im Gesamtintervalle von x_0 bis X bedeutet.

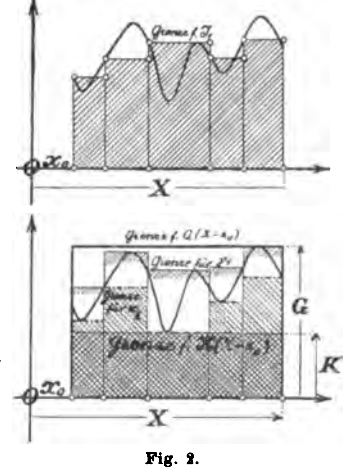


Fig. 2.

Beides suchen wir in Fig. 2 zu veranschaulichen, worin wir absichtlich $f(x)$ durch eine stark oszillierende Kurve dargestellt haben. Die obere Figur deutet J_1 selbst an, die untere die Grenzen $\varkappa_1$ und γ_1 und $K(X - x_0)$ und $G(X - x_0)$.

Die soeben gemachten Schlüsse können wir nun mit Leichtigkeit wiederholen, denn wenn wir die Intervalle Δ_1, Δ_2, $\cdots \Delta_n$ in der oben festgesetzten Weise *einzeln* in Intervalle zerlegen, von denen jedes kürzer als σ_2 ist, *so tun wir mit jedem Intervalle Δ_1, Δ_2, $\cdots \Delta_n$ genau dasselbe, was wir soeben mit dem Gesamtintervalle getan haben.* Wir haben dabei n einzelne Betrachtungen anzustellen, die sich auf die n einzelnen Intervalle Δ_1, Δ_2, $\cdots \Delta_n$ beziehen. Der neue Polygoninhalt J_2 ist eine Summe von n einzelnen Summen von Rechtecksinhalten; an die Stelle von τ_1 tritt τ_2, an die Stelle von $X - x_0$ jeweils Δ_1, Δ_2, $\cdots \Delta_n$. Im Intervalle Δ_i z. B. treten an die Stelle von $K(X - x_0)$ und $G(X - x_0)$ die Werte $k_i \Delta_i$ und $g_i \Delta_i$.

Wir finden also:

Erstens: Der Polygoninhalt J_2 liegt zwischen zwei Grenzen $\varkappa_2$ und γ_2. Diese Grenzen sind die Summen aus den Produkten der jetzt benutzten kürzeren Teilintervalle und der jeweils kleinsten bzw. größten Werte, die $f(x)$ in diesen Teilintervallen erreicht. Der Unterschied beider Grenzen ist kleiner als

$$\tau_2 \Delta_1 + \tau_2 \Delta_2 + \cdots + \tau_2 \Delta_n = \tau_2 (\Delta_1 + \cdots + \Delta_n) = \tau_2 (X - x_0).$$

Dabei bedeutet τ_2 eine obere Grenze für die Schwankungen von $f(x)$ in den jetzt benutzten kleineren Teilintervallen.

Zweitens: Die Grenzen $\varkappa_2$ und γ_2, zwischen denen J_2 liegt, sind ihrerseits wieder in die Grenzen

$$k_1 \Delta_1 + k_2 \Delta_2 + \cdots + k_n \Delta_n \quad \text{und} \quad g_1 \Delta_1 + g_2 \Delta_2 + \cdots + g_n \Delta_n$$

eingeschlossen. *Dies aber sind die Grenzen $\varkappa_1$ und γ_1, zwischen denen J_1 liegt.*

Dasselbe Schlußverfahren können wir beliebig oft, z. B. insgesamt m-mal anwenden. Dann finden wir die Ungleichungen:

$$(2) \begin{cases} \varkappa_1 \leqq J_1 \leqq \gamma_1, \\ \varkappa_2 \leqq J_2 \leqq \gamma_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varkappa_m \leqq J_m \leqq \gamma_m, \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} \gamma_1 - \varkappa_1 < \tau_1 (X - x_0), \\ \gamma_2 - \varkappa_2 < \tau_2 (X - x_0), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \gamma_m - \varkappa_m < \tau_m (X - x_0) \end{cases}$$

und

$$(4) \quad \varkappa_1 \leqq \varkappa_2 \leqq \cdots \leqq \varkappa_m, \quad \gamma_m \leqq \cdots \leqq \gamma_2 \leqq \gamma_1.$$

Dabei bedeutet $\varkappa_m$ bzw. γ_m die Summe aus den Produkten der bei J_m benutzten Teilintervalle und der jeweils kleinsten bzw. größten Werte, die $f(x)$ in diesen Teilintervallen erreicht.

Infolge von (4) gelten die Ungleichungen (2) auch noch, wenn wir darin $J_1, J_2, \ldots J_{m-1}$ sämtlich durch J_m ersetzen. Also folgt: J_m liegt zwischen zwei Zahlenreihen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_m$ und $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$, von denen die eine beständig wächst und die andere beständig abnimmt. Dabei ist jedes $\varkappa$ kleiner als jedes γ, weil J_m größer als alle $\varkappa$ und kleiner als alle γ ist. Die Differenzen $\gamma_1 - \varkappa_1, \gamma_2 - \varkappa_2, \ldots \gamma_m - \varkappa_m$ nehmen nach (3) beständig ab, da dies von $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m$ vorausgesetzt worden war.

Gehen wir zur Grenze für $\lim m = \infty$ über, indem wir die Teilung ohne Ende in der angegebenen Art fortsetzen, so folgt, weil nach Voraussetzung $\lim \tau_m = 0$ ist, *daß sich als Grenzwert von J_m eine bestimmte endliche Zahl ergibt*, nämlich die Grenze zwischen den beiden Zahlenreihen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ (vgl. Nr. 2).

407. Ein einziger Grenzwert des Polygoninhaltes. Daß aber dieser Nachweis noch nicht hinreicht, wurde schon zum Schlusse von Nr. 404 erwähnt. In der Tat haben wir die fortgesetzte Zerlegung von $X - x_0$ in immer kleinere Teilintervalle insofern nur in einer speziellen Art ausgeführt, als wir *jeden einzelnen Teil für sich* weiterhin zerkleinert haben. Es erübrigt also noch der Nachweis, daß wir *stets zu demselben* Grenzwerte des Polygoninhaltes gelangen.

Da wir nach dem bisherigen speziellen Verfahren die Zerlegungen beliebig weit fortsetzen können, so dürfen wir annehmen: Es sei τ eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl, so daß es nach Satz 3 von Nr. 405 eine positive Zahl σ derart gibt, daß $f(x)$ in jedem Intervalle, das kürzer als σ ist, eine Schwankung kleiner als τ hat. Das Intervall von x_0 bis X sei nun *erstens* in solche Teile zerlegt, die sämtlich kürzer als σ sind. Eine *zweite* Teilung desselben Intervalles sei so beschaffen, daß jeder ihrer Teile kleiner als der kleinste Teil der ersten Teilung ist, denn wir dürfen ja die zweite Art der Teilung nach der Betrachtung der vorigen Nummer beliebig weit verfeinern.

Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Teilstellen der ersten Teilung liegt nun mindestens eine Teilstelle der zweiten. Um sogleich den allgemeinsten Fall ins Auge zu fassen, wollen

wir annehmen, daß $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ die Abszissen der Teilstellen der ersten Teilung, $x_1', x_2', \ldots x_{m-1}'$ die der Teilstellen der zweiten Teilung sein und daß sie so aufeinander folgen:

$$x_0 \quad x_1' \ldots x_r' \quad x_1 \quad x_{r+1}' \ldots x_{r+s}' \quad x_2 \quad x_{r+s+1}' \quad \ldots\ldots x_{m-1}' X.$$

Die zu den beiden Teilungen gehörigen Polygoninhalte J und J' sind:

$$(1)\quad J = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(X - x_{n-1}),$$
$$J' = f(x_0)(x_1' - x_0) + f(x_1')(x_2' - x_1') + \cdots + f(x_{m-1}')(X - x_{m-1}').$$

Nun ist

$$x_{r+1}' - x_r' = (x_1 - x_r') + (x_{r+1}' - x_1),$$
$$x_{r+s+1}' - x_{r+s}' = (x_2 - x_{r+s}') + (x_{r+s+1}' - x_2)$$

usw. Daher läßt sich J' in n Summen zerlegen:

$$(2)\qquad J' = S_1 + S_2 + \cdots + S_n,$$

von denen sich die erste auf das Intervall von x_0 bis x_1, die zweite auf das von x_1 bis x_2 usw., die letzte auf das von x_{n-1} bis X bezieht. Es genügt die ausführliche Angabe der ersten dieser n Summen:

$$S_1 = f(x_0)(x_1' - x_0) + f(x_1')(x_2' - x_1') + \cdots + f(x_r')(x_1 - x_r')$$

und des Anfanges der zweiten:

$$S_2 = f(x_r')(x_{r+1}' - x_1) + \cdots.$$

Weil die Schwankung von $f(x)$ im Intervalle von x_0 bis x_1 nach Voraussetzung kleiner als τ ist, so unterscheiden sich $f(x_1'), \ldots f(x_r')$ von $f(x_0)$ um weniger als τ. Da alle Differenzen $x_1' - x_0, \ldots x_1 - x_r'$ positiv sind, so unterscheidet sich also S_1 von $f(x_0)[(x_1' - x_0) + (x_2' - x_1') + \cdots + (x_1 - x_r')]$ oder $f(x_0)(x_1 - x_0)$ um weniger als $\tau(x_1 - x_0)$. Analoges gilt für $S_2, S_3, \ldots S_n$. Somit folgt:

$$f(x_0)(x_1 - x_0) - \tau(x_1 - x_0) \leqq S_1 \leqq f(x_0)(x_1 - x_0) + \tau(x_1 - x_0),$$
$$f(x_1)(x_2 - x_1) - \tau(x_2 - x_1) \leqq S_2 \leqq f(x_1)(x_2 - x_1) + \tau(x_2 - x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x_{n-1})(X - x_{n-1}) - \tau(X - x_{n-1}) \leqq S_n$$
$$\leqq f(x_{n-1})(X - x_{n-1}) + \tau(X - x_{n-1}).$$

Hieraus folgt durch Addition nach (1) und (2):

$$J - \tau(X - x_0) \leqq J' \leqq J + \tau(X - x_0).$$

Da τ beliebig klein gewählt worden war, so folgt: Bei hinreichend weit getriebener Zerkleinerung des Intervalles $X - x_0$ haben J und J' Werte, die um beliebig wenig voneinander abweichen. Mit andern Worten: *J und J' haben denselben Grenzwert.*

Hiermit ist der grundlegende Satz gewonnen:

Satz 4: Ist $f(x)$ eine in dem Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ stetige Funktion von x, so hat die Summe:

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(X - x_{n-1}),$$

in der

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < X$$

ist, einen von den gewählten Zwischenwerten $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ unabhängigen bestimmten endlichen Grenzwert, falls alle Teilintervalle $x_1 - x_0,\ x_2 - x_1, \cdots X - x_{n-1}$ zur Grenze Null streben und dementsprechend ihre Anzahl n über jede endliche Zahl wächst.

Beispiel: Das Bild der Funktion $y = 1 : x$ ist eine *gleichseitige Hyperbel*, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind. Eine Unstetigkeit tritt nur für $x = 0$ ein. Wir wollen ein Intervall von $x_0 = 1$ bis $X > 1$ betrachten, siehe Fig. 3, indem wir zwischen 1 und X als Zwischenwerte die in diesem Beispiele besonders bequemen Werte

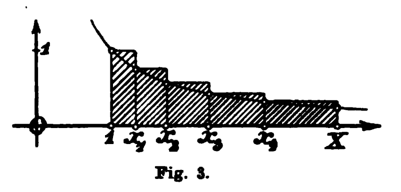


Fig. 3.

$$x_1 = \sqrt[n]{X}, \qquad x_2 = \sqrt[n]{X^2}, \quad \cdots \quad x_{n-1} = \sqrt[n]{X^{n-1}}$$

einschalten, die ja eine zunehmende Reihe bilden. In Fig. 3 ist $n = 5$ gewählt. Es ist nun $f(x) = 1 : x$, also

$$f(x_0) = f(1) = 1,\ f(x_1) = \frac{1}{\sqrt[n]{X}},\ f(x_2) = \frac{1}{\sqrt[n]{X^2}},\ \cdots f(x_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt[n]{X^{n-1}}},$$

also der Polygoninhalt:

$$J = 1 \cdot (\sqrt[n]{X} - 1) + \frac{1}{\sqrt[n]{X}}(\sqrt[n]{X^2} - \sqrt[n]{X}) + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{X^{n-1}}}(X - \sqrt[n]{X^{n-1}})$$

oder kürzer:

$$J = n(\sqrt[n]{X} - 1).$$

Lassen wir nun n nach ∞ streben, so werden die Zwischenwerte immer dichter aneinanderrücken, und es kommt:

$$\lim J = \lim_{n=\infty} n(\sqrt[n]{X} - 1).$$

[407

Bezeichnen wir $1 : n$ mit ε, so haben wir

$$\lim J = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{X^\varepsilon - 1}{\varepsilon},$$

und dieser Wert ist nach Satz 25, Nr. 129:

$$\lim J = \ln X.$$

Dies wird also im vorliegenden Beispiele nach Satz 4 auch dann der Grenzwert des Polygoninhaltes, wenn wir nicht gerade die obigen, hier besonders bequemen Zwischenwerte, sondern andere Zwischenwerte benutzen.

408. Eine Verallgemeinerung. Der grundlegende Satz 4 läßt sich noch von einer zuweilen lästigen Voraussetzung befreien. Bei der Bildung der Summe

(1) $J = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(X - x_{n-1})$

haben wir nämlich als Faktoren der n Teilintervalle $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \cdots X - x_{n-1}$ die Ordinaten $f(x_0), f(x_1), \cdots f(x_{n-1})$ der *Anfangs*abszissen der Teilintervalle benutzt, vgl. Fig. 1, S. 7. Wir wollen statt dieser Ordinaten jetzt diejenigen Ordinaten benutzen, die zu solchen Abszissen $x_1', x_2', \cdots x_n'$ gehören, von denen x_1' irgendwie im Bereiche von x_0 bis x_1, x_2' irgendwie im Bereiche von x_1 bis x_2 usw., schließlich x_n' irgendwie im Bereiche von x_{n-1} bis X gewählt sei. Siehe Fig. 4. Als Rechteckshöhen nehmen wir also Ordinaten $f(x_1'), f(x_2'), \cdots f(x_n')$, die über den betreffenden Grundlinien stehen, aber sonst beliebig herausgegriffen werden dürfen. An die Stelle von J tritt nun die Summe:

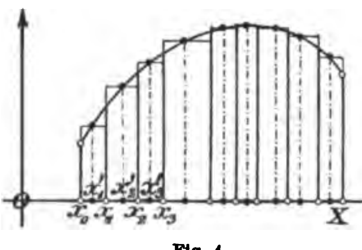


Fig. 4.

(2) $J' = f(x_1')(x_1 - x_0) + f(x_2')(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_n')(X - x_{n-1})$.

Wir behaupten, daß sie denselben Grenzwert wie die Summe J erreicht, falls alle Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $\cdots X - x_{n-1}$ nach Null streben und dementsprechend die Anzahl n aller Differenzen jeden endlichen Wert überschreitet.

Es folgt dies sofort aus Satz 3 von Nr. 405. Denn danach gibt es, wenn eine beliebig kleine positive Zahl τ gewählt

wird, stets eine positive Zahl σ derart, daß die Schwankung von $f(x)$ in jedem der n Teilintervalle kleiner als τ ist, sobald man alle Teilintervalle kürzer als σ macht. Dann unterscheidet sich folglich $f(x_1')$ von $f(x_0)$ um weniger als τ, ebenso $f(x_2')$ von $f(x_1)$ usw., ebenso schließlich auch $f(x_n')$ von $f(x_{n-1})$. Folglich ist

$$|J'-J|<\tau[(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(X-x_{n-1})]=\tau(X-x_0),$$

und der Wert rechts weicht beliebig wenig von Null ab. Also ist $\lim J'$ gleich $\lim J$. Daher:

Satz 5: Die in Satz 4, Nr. 407, betrachtete Summe behält denselben Grenzwert, wenn man in ihr als Faktoren von x_1-x_0, x_2-x_1, $\cdots$ $X-x_{n-1}$ *nicht die Werte der Funktion* $f(x)$ *für die Anfangsabszissen der Teilintervalle, sondern die Werte der Funktion* $f(x)$ *für irgend solche* n *Abszissen wählt, die den* n *Intervallen von* x_0 *bis* x_1, *von* x_1 *bis* x_2, *usw., schließlich von* x_{n-1} *bis* X *angehören und im übrigen beliebig angenommen werden dürfen, z. B. auch als die Endabszissen* x_1, x_2, $\cdots$ X *der Teilintervalle.*

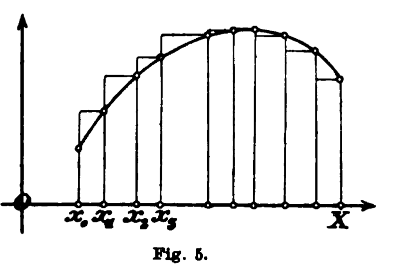


Fig. 5.

Insbesondere hat also auch die in Fig. 5 dargestellte Summe

$$(3)\quad f(x_1)(x_1-x_0)+f(x_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(X)(X-x_{n-1})$$

denselben Grenzwert wie die Summe (1).

409. Definition des Flächeninhaltes. Die elementare Planimetrie definiert nur die Flächen von *geradlinig* begrenzten Stücken der Ebene und leitet z. B. den Inhalt des Kreises dadurch ab, daß der Kreis durch ein regelmäßiges umschriebenes oder eingeschriebenes Vieleck ersetzt wird, dessen Seitenzahl nach Unendlich strebt. Analog, wenn auch nicht genau ebenso verfahren wir jetzt, indem wir den Grenzwert des Polygoninhaltes J zur Definition des Flächeninhaltes benutzen. Wir sagen:

Definition: Unter der Fläche F, die von dem Bilde der im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ *stetigen Funktion* $y=f(x)$, *von der*

Abszissenachse und von den zu x_0 *und* X *gehörigen Ordinaten begrenzt wird, soll der Grenzwert*

$$\lim J = \lim \sum_{x_0}^{X} f(x) \Delta x$$

verstanden werden. (Vgl. Fig. 1, S. 7).

Wir werden später die Gelegenheit wahrnehmen, zu zeigen, daß diese Definition für den Kreis genau dieselbe Inhaltsformel liefert, wie es die elementare Planimetrie tut (siehe Nr. 411).

Weil J eine Summe von Rechtecksinhalten ist, liegt in der obigen Definition zugleich eine Vorzeichenbestimmung. Wenn nämlich $f(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ teils positive, teils negative Werte annimmt, so können wir es stets so einrichten, daß gerade diejenigen Werte von x, für die $f(x)$ gleich Null ist, zu den Teilstellen $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ des Intervalles gehören, und zwar auch während des Grenzüberganges. Derjenige Teil der Summe $\lim J$, der sich dann auf ein solches Stück des Gesamtintervalles bezieht, zu dem lauter negative Werte von $f(x)$ gehören, ist alsdann negativ, da die Grundlinien der betreffenden Rechtecke positiv und ihre Höhen negativ sind. Auf Grund unserer Definition *sind daher Flächenstücke oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse positiv bzw. negativ zu rechnen.* Siehe Fig. 6.

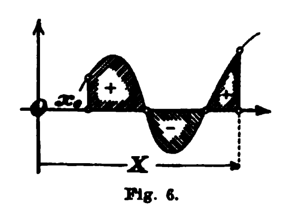


Fig. 6.

Wir haben bei der Bildung von

(1) $J = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(X - x_{n-1})$

einen Summationsprozeß ausgeführt, indem wir die Abszisse von x_0 an nach und nach um lauter *positive* Stücke $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \cdots X - x_{n-1}$ bis $X > x_0$ wachsen ließen, d. h. *wir haben mit wachsenden Werten von x summiert.*

Wir können auch mit *abnehmenden* Werten von x summieren. Dies geschieht, indem wir in (1) die Glieder der zunehmenden Reihe

$$x_0, x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, X$$

durch die entsprechenden Glieder der abnehmenden Reihe

$$X, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots x_1, x_0$$

ersetzen, wodurch die Summe

(2) $J' = f(X)(x_{n-1} - X) + f(x_{n-1})(x_{n-2} - x_{n-1}) + \cdots + f(x_1)(x_0 - x_1)$

409]

hervorgeht, in der alle Differenzen $x_{n-1} - X$, $x_{n-2} - x_{n-1}$, $\cdots x_0 - x_1$ *negativ* sind. Nun ist aber

$$-J' = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(X)(X - x_{n-1}),$$

und dies ist die in voriger Nummer mit (3) bezeichnete Summe, von der wir wissen, daß sie denselben Grenzwert wie J hat. Also ist

$$\lim J' = -\lim J$$

oder in symbolischer Schreibweise:

$$\lim \sum_X^{x_0} f(x) \Delta x = -\lim \sum_{x_0}^X f(x) \Delta x. \qquad (3)$$

Dies leuchtet auch geometrisch ein, denn in der Summe (2) treten Rechtecksinhalte auf, deren Grundlinien sämtlich negativ sind.

Die vorhin angegebene Vorzeichenregel wird daher jetzt die umgekehrte: *Wenn die Summation mit abnehmenden Werten von x ausgeführt wird, so sind Flächenstücke oberhalb bzw. unterhalb der x-Achsen negativ bzw. positiv.*

410. Das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe. Um uns die Möglichkeit offen zu lassen, vorwärts oder rückwärts zu summieren, wollen wir nunmehr annehmen, daß $f(x)$ in einem gewissen Intervalle $A < x < B$ stetig sei, und die Summation über irgend ein Stück dieses Intervalles in positiver oder negativer Richtung ausführen. Wir wollen uns aber jetzt nicht mehr wie bisher vorstellen, daß die Anfangs- und Endabszisse x_0 und X bestimmt gewählt seien. Vielmehr nehmen wir nur die Abszisse x_0, bei der wir beginnen, bestimmt gewählt an innerhalb des Bereiches $A < x_0 < B$, während die Abszisse, bis zu der wir die Summation fortsetzen, noch veränderlich sein möge, also *irgend einen* Wert X im Bereiche $A < X < B$ haben soll. Es kann dabei X sowohl größer als auch kleiner als x_0 sein. Die zugehörige Summe:

$$J = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(X - x_{n-1})$$

oder

$$J = \sum_{x_0}^X f(x) \Delta x$$

hat alsdann einen Grenzwert $\lim J$, der mit X veränderlich ist. Da er für jede Endabszisse X im Bereiche $A < X < B$

bestimmt und endlich ist, weil $f(x)$ in diesem Bereiche überall stetig vorausgesetzt wird, so heißt dies: *Der Grenzwert lim J ist eine Funktion der Endabszisse X im ganzen Intervalle* $A < X < B$. Wir drücken diesen Grenzwert daher durch ein Funktionszeichen $F(X)$ aus:

$$F(X) = \lim \sum_{x_0}^{X} f(x) \varDelta x. \tag{1}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß diese Funktion *stetig und differenzierbar* ist. Wir wählen zu diesem Zwecke irgend einen positiven oder negativen Zuwachs h der Endabszisse X derart, daß auch $X + h$ dem Bereiche von A bis B angehört. Alsdann ist

$$F(X + h) = \lim \sum_{x_0}^{X+h} f(x) \varDelta x. \tag{2}$$

Ist $h > 0$, so ist das Summationsintervall von (2) um h länger als das von (1), also

$$F(X + h) = \lim \sum_{x_0}^{X} f(x) \varDelta x + \lim \sum_{X}^{X+h} f(x) \varDelta x,$$

so daß hieraus und aus (1) folgt:

$$F(X + h) - F(X) = \lim \sum_{X}^{X+h} f(x) \varDelta x \qquad (h > 0). \tag{3}$$

Ist $h < 0$ und etwa gleich $-h'$, so daß $h' > 0$ ist, so ist dagegen das Summationsintervall von (1) um h' länger als das von (2), also

$$F(X) = \lim \sum_{x_0}^{X-h'} f(x) \varDelta x + \lim \sum_{X-h'}^{X} f(x) \varDelta x.$$

Von (2), worin h durch $-h'$ zu ersetzen ist, ziehen wir diesen Wert ab und erhalten so:

$$F(X - h') - F(X) = -\lim \sum_{X-h'}^{X} f(x) \varDelta x \qquad (h' > 0). \tag{4}$$

In den beiden in (3) und (4) rechts stehenden Summen sind alle Differenzen $\varDelta x$ positiv. Ist nun k der kleinste, g der größte Wert, den $f(x)$ im Intervalle von X bis $X + h$ erreicht, dessen Länge h ist, so folgt

$$kh \leqq \sum_{X}^{X+h} f(x) \varDelta x \leqq gh.$$

Ebenso folgt, wenn k' der kleinste und g' der größte Wert ist, den $f(x)$ im Intervalle von $X - h'$ bis X erreicht:

$$k'h' \leqq \sum_{X-h'}^{X} f(x) \Delta x \leqq g'h'.$$

Wir wissen, daß diese Ungleichungen auch für die Grenzwerte der Summen gelten, vgl. Nr. 406. Demnach folgt aus (3) und (4) durch Division mit h bzw. $-h'$:

$$k \leqq \frac{F(X+h) - F(X)}{h} \leqq g \qquad (h > 0),$$

$$k' \leqq \frac{F(X-h') - F(X)}{-h'} \leqq g' \qquad (h' > 0).$$

Gehen wir jetzt zur Grenze für $\lim h = 0$ oder $\lim h' = 0$ über, so steht in den Mitten dieser beiden Ungleichungen nach Nr. 27 die *Ableitung* $F'(X)$ von $F(X)$. Bei diesen Grenzübergängen rücken k und g und ebenso k' und g' in $f(X)$ zusammen, weil $f(x)$ stetig ist, so daß folgt:

$$\frac{dF(X)}{dX} = f(X). \tag{5}$$

Die Funktion $F(X)$ hat daher im Bereiche $A < X < B$ *überall die bestimmte endliche Ableitung* $f(X)$ und ist demnach auch daselbst überall *stetig*, nach Satz 1, Nr. 27. Die Formel (5) zeigt, *daß* $F(X)$ *ein Integral von* $f(X)$ *ist.* Nach Nr. 400 hat aber $f(X)$, wenn überhaupt *ein* Integral existiert, deren unzählig viele, die aus diesem einen durch Addition willkürlicher Konstanten hervorgehen. Nach der Definition (1) von $F(X)$ ist die Funktion $F(X)$ insbesondere dasjenige Integral, das für $X = x_0$ verschwindet. Denn wenn der obere Index X der Summe in (1) gleich dem unteren Index x_0 ist, so ist das Intervall, auf das sich die Summe bezieht, gleich Null.

Satz 6: Ist $f(X)$ eine im Intervalle $A < X < B$ stetige Funktion von X, so hat sie in dem Intervalle überall Integrale und insbesondere ein Integral, das an einer bestimmt gewählten Stelle x_0 im Intervalle gleich Null ist. Dies Integral ist überall im Intervalle $A < X < B$ stetig und kann definiert werden als der Grenzwert einer Summe

$$f(x_1')(x_1 - x_0) + f(x_2')(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_n')(X - x_{n-1}),$$

[410

in der x_1', x_1, x_2', x_2, $\ldots x_{n-1}$, x_n' *eine im Falle* $X > x_0$ *zunehmende und im Falle* $X < x_0$ *abnehmende Reihe von im übrigen willkürlichen Zwischenwerten zwischen* x_0 *und* X *bedeuten. Unter dem Grenzwerte dieser Summe ist derjenige Wert verstanden, der hervorgeht, wenn alle* n *Differenzen* $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $\ldots X - x_{n-1}$ *nach Null streben und dementsprechend ihre Anzahl* n *über jede endliche Zahl wächst.*

Nun wird auch das in Nr. 401 eingeführte Integralzeichen $\int$ verständlich. Um nämlich anzudeuten, daß

$$F(X) = \lim \sum_{x_0}^{X} f(x) \varDelta x$$

ist, d. h. daß der Grenzwert einer Summe gebildet werden soll, ersetzt man nach *Leibniz* die Zeichen $\lim \Sigma$ durch das Summenzeichen $\int$. Um ferner anzudeuten, daß alle Differenzen $\varDelta x$ nach Null streben, zieht man es vor, das Differentialzeichen dx statt $\varDelta x$ anzuwenden, so daß sich diese Darstellung ergibt:

$$(6) \qquad F(X) = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

gelesen: Integral von $f(x)$, von der *unteren* Grenze x_0 bis zur *oberen* Grenze X erstreckt. *Da die untere Grenze* x_0 *bestimmt gewählt ist,* nennt man dies Integral insbesondere ein *bestimmtes Integral.* Es ist dies nämlich dasjenige Integral, das gleich Null ist, sobald X gleich der unteren Grenze x_0 gewählt wird. Der Name Integral rührt daher, daß *Leibniz* den Grenzwert der Summe als *functio integralis* oder Gesamtfunktion im Gegensatze zu den nach Null strebenden Summanden $f(x)\,dx$ bezeichnete.

Wir erinnern noch einmal daran, daß die obere Grenze X des Integrals sehr wohl kleiner als die untere Grenze x_0 sein kann.

Häufig bezeichnet man die obere Grenze X, die ja die unabhängige Veränderliche der Integralfunktion ist, mit dem sonst für die unabhängige Veränderliche gebräuchlichen Buchstaben x:

$$(7) \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Aber man darf dabei nicht außer acht lassen, daß hier x in *zweierlei* Bedeutung auftritt. Denn die obere Grenze x ist der Endwert, zu dem die Veränderliche x bei der ausgeführt gedachten Summation gelangt, indem sie vom Werte x_0 um lauter solche Größen, die einzeln nach Null streben, Schritt für Schritt wächst oder abnimmt, bis sie schließlich den Endwert x, nämlich den Wert der oberen Grenze, erreicht hat.

Die Schreibweise (7) ist deshalb bequemer, weil nach (5)

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad \text{also } dF(x) = f(x)dx$$

ist, so daß in (7) unter dem Integralzeichen gerade das Differential von $F(x)$ steht, wenn wir dx wirklich als das Differential der oberen Grenze x auffassen.

411. Anwendungen auf Flächenmessungen. Die Ausmessung von ebenen Flächenstücken heißt *Quadratur*, weil man, sobald eine Fläche ausgemessen worden ist, ein Quadrat konstruieren kann, das denselben Inhalt hat. Es gilt nun nach Nr. 409 der

Satz 7: Ist $f(x)$ im Intervalle $A < x < B$ eine stetige Funktion von x und sind x_0 und X irgend zwei Werte von x im Intervalle, so ist die Fläche, die zwischen dem Bilde der Funktion $y = f(x)$, der Abszissenachse und den zu x_0 und X gehörigen Ordinaten liegt, gleich dem bestimmten Integrale

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx.$$

Ist dabei $X > x_0$, so sind Flächenteile, die oberhalb bzw. unterhalb der Abszissenachse liegen, positiv bzw. negativ; ist $X < x_0$, so gilt das Umgekehrte.

Man erinnere sich nämlich an die beiden in Nr. 409 gewonnenen Vorzeichenregeln.

Ehe wir diesen Satz auf einige Beispiele anwenden, weisen wir auf Nr. 400 und insbesondere auf den Satz 2 zurück. Er zeigt: Um das *bestimmte* Integral

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)dx$$

zu berechnen, suche man zunächst das *unbestimmte Integral*

$$\int f(x)\,dx$$

zu finden, d. h. irgend eine Funktion $\Phi(x)$ zu berechnen, deren Ableitung gleich $f(x)$ ist. Alsdann ist, da das Integral (1) für $X = x_0$ verschwindet, das bestimmte Integral:

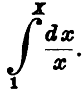
$$(2) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \Phi(X) - \Phi(x_0).$$

Man schreibt hierfür auch zur Abkürzung:

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \Big[\Phi(x)\Big]_{x_0}^{X},$$

indem die rechte Seite so zu bilden ist: Von dem Werte von $\Phi(x)$ für die obere Grenze X soll ihr Wert für die untere Grenze x_0 abgezogen werden.

1. Beispiel: Die Fläche, die zwischen der *gleichseitigen Hyperbel* $y = 1 : x$, der Abszissenachse, der zu $x_0 = 1$ und der zu einem beliebigen positiven X gehörigen Ordinate liegt, ist gleich



$$\int_1^X \frac{dx}{x}.$$

Fig. 7.

Nun ist $\ln x$ eine Funktion, deren Ableitung $1 : x$ ist. Also folgt nach (3):

$$\int_1^X \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^X = \ln X - \ln 1 = \ln X.$$

Vgl. Nr. 221 und das Beispiel in Nr. 407. Ist $X > 1$, so stellt $\ln X$ nach der in Satz 7 gegebenen Vorzeichenregel die Fläche mit Pluszeichen dar, siehe Fig. 7. Lassen wir X bis 1 abnehmen, so wird die Fläche zu Null. Wird $X < 1$, so wird die Fläche negativ, da dann von 1 bis X mit abnehmender Abszisse integriert wird. Für $x = 0$ ist die vorgelegte Funktion $1 : x$ unstetig. Also muß

$X > 0$ angenommen werden. Nun ist aber auch nach (2) in Nr. 402:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + \text{konst.}$$

für $x < 0$. Demnach ist

$$\int_{-1}^{X} \frac{dx}{x} = [\ln(-x)]_{-1}^{X} = \ln(-X) - \ln 1 = \ln(-X)$$

die Fläche der Hyperbel von der zu $x_0 = -1$ gehörigen Ordinate an bis zur Ordinate einer beliebigen negativen Abszisse X. Ist dabei $X > -1$ und < 0, so ist die Fläche negativ, da sie unterhalb der x-Achse liegt und da im Sinne wachsender Abszissen integriert wird. Ist dagegen $X < -1$, so ist die Fläche positiv (siehe Fig. 8).

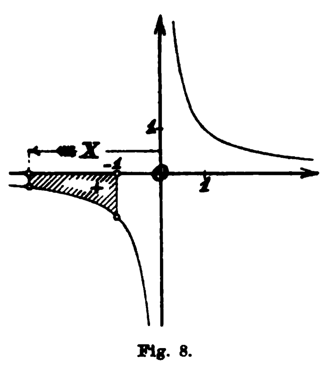


Fig. 8.

2. Beispiel: Bei der *Sinuslinie* $y = \sin x$ tritt nirgends eine Unstetigkeit ein. Die von $x = 0$ bis zu einem beliebigen X gerechnete Fläche ist hier

$$\int_0^X \sin x\,dx$$

oder nach (3) in Nr. 402:

$$\int_0^X \sin x\,dx = [-\cos x]_0^X = -\cos X + \cos 0 = 1 - \cos X.$$

Ist $X > 0$, aber $< \pi$, so ist die Fläche positiv, siehe Fig. 9, da im Sinne wachsender Abszissen integriert wird und die Fläche oberhalb der x-Achse liegt. Für $X = \pi$ ergibt sich die Fläche 2. Der Inhalt des ersten Wellenberges der Sinuslinie ist also doppelt so groß wie der des eingezeichneten Quadrates.

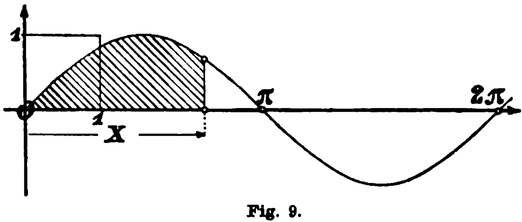


Fig. 9.

[411

Lassen wir X von π an weiter wachsen, so nimmt $\cos X$ von -1 an zu, so daß $1-\cos X$ abnimmt. Daß die Fläche abnimmt, erklärt sich daraus, daß jetzt ein negatives, nämlich unterhalb der Abszissenachse gelegenes Flächenstück hinzutritt. Für $X = 2\pi$ ergibt sich sogar die Fläche Null; in der Tat: Wellenberg und Wellental haben denselben Inhalt, aber die Inhalte treten mit verschiedenen Vorzeichen auf.

3. Beispiel: In Nr. 409 hoben wir hervor, daß noch bewiesen werden muß, daß die dort gegebene Definition der Fläche insbesondere für den Kreis die aus der elementaren Planimetrie bekannte Formel liefert. Dies soll hier geschehen. Betrachten wir den in Fig. 10 gezeichneten Viertelkreis vom Radius Eins und dasjenige Flächenstück, das zwischen dem Kreisbogen, der Abszissenachse, der Ordinatenachse und der zur Abszisse x gehörigen Ordinate $y = \sqrt{1-x^2}$ gehört. Es besteht aus einem Dreiecke von der Grundlinie x und der Höhe $\sqrt{1-x^2}$ und aus einem Kreissektor, dessen Zentriwinkel gleich $\operatorname{arc\,tg}(x:y)$ oder $\operatorname{arc\,tg}(x:\sqrt{1-x^2})$ ist. Also ist der Inhalt des Flächenstückes nach den Lehrsätzen der Planimetrie gleich

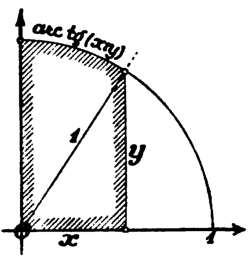


Fig. 10.

$$\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Andererseits gibt der Satz 7 für diese Fläche, da die Ordinate $y = \sqrt{1-x^2}$ ist, den Wert:

$$\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Soll beides übereinstimmen, so muß also:

$$(4) \qquad \int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

sein. *Die Wurzel ist positiv, und der Arkus liegt zwischen* 0 *und* $\frac{1}{2}\pi$. Daß die Formel (4) in der Tat stimmt, erkennt man

durch die Probe: Die rechte Seite gibt differenziert gerade $\sqrt{1-x^2}$. Außerdem ist die rechte Seite für $x = 0$ auch gleich Null. Daher ist die Formel (4) richtig. Mithin gibt unsere Definition der Fläche in Nr. 409 für den Kreissektor genau denselben Wert wie die elementare Planimetrie. Insbesondere gibt (4) für $x = 1$ die Fläche des Viertelkreises:

$$(5) \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \infty = \frac{\pi}{4}.$$

412. Sätze über bestimmte Integrale. Die Formel (3) von Nr. 409 können wir, nachdem wir in Nr. 410 den Begriff des bestimmten Integrals eingeführt haben, nunmehr durch den folgenden Satz wiedergeben:

Satz 8: Vertauscht man die Grenzen eines bestimmten Integrals, so ändert der Wert des Integrals nur das Vorzeichen, in Formel:

$$\int_X^{x_0} f(x)\, dx = -\int_{x_0}^X f(x)\, dx$$

Für $X = x_0$ folgt hieraus insbesondere wieder die Tatsache, daß ein bestimmtes Integral gleich Null ist, sobald beide Grenzen denselben Wert haben.

Sind x_0, x_1, X Werte von x in einem solchen Intervalle, in dem $f(x)$ überall stetig ist, so ist für die in Nr. 404 betrachtete Summe, falls x_1 zwischen x_0 und X liegt:

$$\sum_{x_0}^{x_1} f(x) \Delta x + \sum_{x_1}^{X} f(x) \Delta x = \sum_{x_0}^{X} f(x) \Delta x,$$

da wir ja bei der rechts stehenden Summe einen der Zwischenwerte gerade an die Stelle x_1 legen können. Beim Grenzübergange folgt hieraus für $x_0 < x_1 < X$:

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_1}^{X} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx.$$

Wir behaupten aber, daß diese Formel auch dann gilt, wenn x_1 *nicht* zwischen x_0 und X liegt. Denn wenn wir die

Annahme $x_0 < x_1 < X$ beibehalten, so daß (1) richtig ist, so folgt aus (1):

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{X} f(x)dx - \int_{x_1}^{X} f(x)dx$$

oder, wenn wir die Grenzen x_1 und X des letzten Integrals vertauschen, also nach Satz 8 das Minuszeichen zugleich durch das Pluszeichen ersetzen und alsdann beide Seiten der Gleichung vertauschen:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx + \int_{X}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx.$$

Diese Gleichung hat wieder die Form der Gleichung (1), aber die Grenzen, die in (1) die Reihenfolge x_0, x_1, X hatten, haben jetzt die Reihenfolge x_0, X, x_1, und X liegt nach Voraussetzung *nicht* zwischen x_0 und x_1. Daher gilt

Satz 9: Es ist

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{X} f(x)dx.$$

Nach Satz 7 in voriger Nummer leuchtet dies sofort ein, da wir die von x_0 bis x_1 erstreckte Fläche und die von x_1 bis X erstreckte Fläche zu der von x_0 bis X erstreckten Fläche summieren können und zwar auch, wenn x_1 nicht zwischen x_0 und X liegt, sobald wir nur die Vorzeichenregeln des Satzes 7 beachten.

Augenscheinlich können wir den Satz 9 so verallgemeinern:

Satz 10: Es ist

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{X} f(x)dx.$$

In Nr. 406 sahen wir, daß die dort mit J_1 bezeichnete Summe

$$\sum_{x_0}^{X} f(x)dx$$

zwischen $K(X - x_0)$ und $G(X - x_0)$ liegt, falls $X > x_0$ ist und K den kleinsten, G den größten Wert von $f(x)$ im Intervalle

$x_0 \leqq x \leqq X$ bezeichnet. Auch sahen wir, daß dasselbe für den Grenzwert der Summe J_1 gilt. Daraus folgt nach Nr. 410:

$$(2) \quad K(X - x_0) \leqq \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \leqq G(X - x_0) \qquad \text{für } X > x_0.$$

Ist dagegen $X < x_0$, so folgt ebenso für das von X bis x_0 erstreckte Integral:

$$K(x_0 - X) \leqq \int_{X}^{x_0} f(x)\,dx \leqq G(x_0 - X)$$

oder nach Satz 8:

$$(3) \quad K(x_0 - X) \leqq -\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \leqq G(x_0 - X) \qquad \text{für } X < x_0$$

Dividieren wir (2) durch die positive Größe $X - x_0$ und (3) durch die positive Größe $x_0 - X$, so ergeben beide Formeln denselben

Satz 11: Ist $f(x)$ eine im Intervalle von x_0 bis X stetige Funktion und ist K der kleinste und G der größte Wert von $f(x)$ in dem Intervalle, so ist stets, ob nun $x_0 < X$ oder $x_0 > X$ ist:

$$K \leqq \frac{1}{X - x_0} \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \leqq G.$$

Da das betrachtete Integral nach Satz 10 in eine Summe von einzelnen Integralen zerlegt werden kann, erstreckt über Teilintervalle, so kann man hiernach auch die einzelnen Summanden in Grenzen einschließen, wobei K und G jeweils durch den kleinsten und größten Wert von $f(x)$ in dem betreffenden Teilintervalle zu ersetzen sind. Infolge davon läßt sich dann auch das Gesamtintegral in engere Grenzen einschließen, als es durch den Satz 11 geschieht. Dies ist bei manchen Abschätzungen von Integralwerten nützlich. Übrigens haben wir die soeben angedeuteten Ungleichungen schon in Nr. 406 unter (2) aufgestellt, denn jene Formeln (2) gelten ja, wie wir sahen, auch für den Grenzwert der Summen $J_1, J_2, \ldots, J_m$, d. h. für das Integral.

[412

Ist insbesondere $f(x)$ im Intervalle von x_0 bis X stets positiv, so gilt dies auch von dem kleinsten Werte K von $f(x)$. Ist überdies $X > x_0$, so folgt aus Satz 11:

Satz 12: Ist $f(x)$ eine im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ überall positive stetige Funktion von x, so ist

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx > 0.$$

Nach Satz 7 der vorigen Nummer leuchtet dieser Satz geometrisch sofort ein.

§ 3. Integrationsmethoden.

413. Integration einer Summe. Der Satz 6 von Nr. 410 lehrt, daß eine Funktion $f(x)$ in einem solchen Intervalle, in dem sie stetig ist, auch stetige Integrale hat. Wir wollen nun Methoden entwickeln, die zur Berechnung von Integralen dienen, und dabei immer voraussetzen, *daß die zu integrierenden Funktionen in den Integrationsintervallen überall stetig seien.*

Da das Differenzieren und Integrieren inverse Operationen sind (siehe Nr. 401), so ist es leicht, aus gewissen Differentiationsregeln Integrationsregeln abzuleiten. Man hat dabei den Umstand zu benutzen, daß sich zwei Funktionen, deren Ableitungen übereinstimmen, nur um eine additive Konstante unterscheiden können, nach Satz 8, Nr. 29. Solange man nur unbestimmte Integrale benutzt, ist diese additive Konstante ohne Belang, da es ja im Begriffe des unbestimmten Integrals liegt, daß es mit einer willkürlichen additiven Konstante versehen ist. Wir dürfen daher im folgenden diese Konstanten beiseite lassen.

Das Integral

$$\int (u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n)\,dx$$

einer algebraischen Summe von n Funktionen $u_1, u_2, \cdots u_n$ hat zur Ableitung diese Summe selbst. Nun hat andererseits die Summe:

$$\int u_1\,dx \pm \int u_2\,dx \pm \cdots \pm \int u_n\,dx$$

ebenfalls die Ableitung $u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n$, da diese Summe gliedweise differenziert werden darf, nach Satz 12, Nr. 34. Mithin folgt:

Satz 13: Das Integral einer algebraischen Summe ist gleich der algebraischen Summe der Integrale der Summanden, in Formel:

$$\int (u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n) dx = \int u_1 dx \pm \int u_2 dx \pm \cdots \pm \int u_n dx.$$

Eine Summe darf also *gliedweise* integriert werden.

Handelt es sich um das von x_0 bis x erstreckte bestimmte Integral der Summe, so muß allerdings auf die additive Konstante Rücksicht genommen werden. Es kommt dann:

$$\int_{x_0}^{x} (u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n) dx = \left[\int u_1 dx \pm \int u_2 dx \cdots \pm \int u_n dx\right]_{x_0}^{x},$$

wenn wir uns der in Nr. 411 eingeführten abgekürzten Bezeichnung bedienen. Nun ist aber

$$\left[\int u_i dx\right]_{x_0}^{x}$$

dasjenige Integral von u_i, das für $x = x_0$ den Wert Null hat, also gleich

$$\int_{x_0}^{x} u_i dx.$$

Wir erkennen also, daß die Formel für bestimmte Integrale gilt:

$$(1) \quad \int_{x_0}^{x} (u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n) dx = \int_{x_0}^{x} u_1 dx \pm \int_{x_0}^{x} u_2 dx \pm \cdots \pm \int_{x_0}^{x} u_n dx.$$

Eine einfache, aber wichtige Anwendung hiervon ist folgende: Es seien u und v zwei im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ stetige Funktionen von x. Für jeden Wert von x im Intervalle sei außerdem $u \leqq v$. Alsdann ist die Funktion $v - u$ im ganzen Intervalle positiv. Nach Satz 12 von Nr. 412 ist folglich

$$\int_{x_0}^{X} (v - u) dx \geqq 0.$$

[413

Hieraus aber folgt nach (1):

$$\int_{x_0}^{X} v\,dx - \int_{x_0}^{X} u\,dx \geqq 0,$$

so daß sich ergibt:

Satz 14: Ist $u(x) \leqq v(x)$ für jedes x im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$, so ist auch:

$$\int_{x_0}^{X} u(x)\,dx \leqq \int_{x_0}^{X} v(x)\,dx.$$

Dieser Satz gestattet uns oft, die Werte von bestimmten Integralen abzuschätzen.

Beispiel: Für $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ und $n > 2$ ist für die positiven Quadratwurzeln

$$1 \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

so daß sich ergibt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Das erste Integral hat den Wert $\frac{1}{2}$, das letzte nach (4) in Nr. 402 den Wert arc sin $\frac{1}{2}$ — arc sin 0, wobei die Arkus zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen, also den Wert $\frac{1}{6}\pi$. Daher folgt, daß der Wert des bestimmten Integrals

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$$

für $n > 2$ und positives Wurzelzeichen zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}\pi$, d. h. zwischen 0,5 und 0,524 liegt.

414. Konstante Faktoren der Integrale. In dem Integrale

$$\int a u\,dx$$

sei a ein *konstanter* Faktor des Integranden. Die Ableitung des Integrals ist au. Nach Satz 13, Nr. 35, hat

$$a\int u\,dx$$

ebenfalls die Ableitung au. Daher folgt:

Satz 15: Das Integral eines Produktes aus einer Konstanten und einer Funktion ist gleich dem mit der Konstanten multiplizierten Integrale der Funktion, in Formel:

$$\int a u\,dx = a\int u\,dx \qquad \textit{für } a = \textit{konst.}$$

Handelt es sich um das bestimmte Integral von x_0 bis x, also um dasjenige, das für $x = x_0$ verschwindet, so ist die Formel nur dann richtig, wenn auch die rechte Seite für $x = x_0$ verschwindet. Wir gelangen so zu der Regel:

(1) $$\int_{x_0}^{x} a u\,dx = a\int_{x_0}^{x} u\,dx \qquad \text{für } a = \text{konst.}$$

Konstante Faktoren der Integranden dürfen also vor das Integralzeichen gesetzt werden. Umgekehrt: Anstatt ein Integral mit einer Konstanten zu multiplizieren, kann man auch den Integranden damit multiplizieren.

Die Sätze 13 und 15 folgen übrigens auch ohne weiteres daraus, daß das Integral als Grenzwert einer *Summe* aufgefaßt werden kann.

1. Beispiel: Nach Satz 13 ist:

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)dx = \int a_0\,dx + \int a_1 x\,dx + \int a_2 x^2\,dx + \cdots + \int a_n x^n\,dx,$$

also nach Satz 15 gleich:

$$a_0\int dx + a_1\int x\,dx + a_2\int x^2 dx + \cdots + a_n\int x^n dx,$$

so daß sich nach (1) in Nr. 402 ergibt:

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)dx = \text{konst.} + \frac{a_0}{1}x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

2. Beispiel: Wenn man alle Ordinaten einer Kurve $y = f(x)$ mit dem konstanten Faktor a multipliziert, so geht eine neue Kurve hervor. Die zwischen zwei bestimmten Ordinaten gelegene Fläche der neuen Kurve ist nach Satz 15 und nach

Satz 7 von Nr. 411 das a-fache der entsprechenden Fläche der alten Kurve. Wenn wir die Ebene der neuen Kurve um die x-Achse drehen, so können wir, falls $a > 1$ ist, erreichen, daß die neue Kurve schließlich so liegt, daß ihre senkrechte Projektion auf die alte Ebene die alte Kurve gibt. Dies tritt ein, wenn der Kosinus des Winkels beider Ebenen gleich $1 : a$ ist. Daraus folgt: *Projiziert man ein ebenes Flächenstück senkrecht auf eine andere Ebene, so ist die Fläche der Projektion gleich der Fläche des gegebenen Stückes, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels beider Ebenen.*

Wir wollen den Satz 15 anwenden, um aus dem Satze 14 der vorigen Nummer eine einfache, aber wichtige Folgerung zu ziehen. Ist $f(x)$ eine im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ stetige Funktion von x, so gilt dasselbe von dem absoluten Betrage $|f(x)|$ der Funktion. Weil für jedes x

$$-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$$

ist, so ergibt Satz 14:

$$\int_{x_0}^{X} -|f(x)|\,dx \leqq \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \leqq \int_{x_0}^{X} |f(x)|\,dx.$$

Der im ersten Integrale vorkommende Faktor -1 läßt sich nun nach Satz 15 vor das Integralzeichen setzen. Also folgt:

Satz 16: Es ist stets:

$$-\int_{x_0}^{X} |f(x)|\,dx \leqq \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \leqq \int_{x_0}^{X} |f(x)|\,dx \text{ für } x_0 < X.$$

415. Teilweise Integration. Das Integral

$$\int \frac{d(uv)}{dx}\,dx$$

ist einerseits gleich $uv +$ konst. und andererseits nach Satz 13 von Nr. 413 so umzuformen:

$$\int \frac{d(uv)}{dx}\,dx = \int (u'v + uv')\,dx = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx,$$

so daß folgt:

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx + \text{konst.}$$

Da rechts ein unbestimmtes Integral steht, brauchen wir die additive Konstante nicht besonders anzugeben. Unsere Formel besagt nun:

Satz 17: Das unbestimmte Integral des Produktes uv' aus einer Funktion u und der Ableitung einer Funktion v ist gleich dem Produkte beider Funktionen, vermindert um das Integral des Produktes aus der Ableitung der Funktion u und aus der Funktion v, in Formel:

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx.$$

Setzen wir beiderseits von x_0 an erstreckte bestimmte Integrale, so haben wir zunächst noch die additive Konstante beizubehalten:

$$\int_{x_0}^{x} uv'\,dx = uv - \int_{x_0}^{x} u'v\,dx + C$$

und diese Konstante C so zu bestimmen, daß die Formel für $x = x_0$ richtig wird. Aber für $x = x_0$ sind beide Integrale gleich Null. Also muß

$$(uv)_{x=x_0} + C = 0, \quad \text{d. h.} \quad C = -(uv)_{x=x_0}$$

gesetzt werden. Wenn wir diesen Wert von C einsetzen und die in Nr. 410 eingeführte Bezeichnung

$$[uv]_{x_0}^{x} = uv - (uv)_{x=x_0}$$

benutzen, so kommt:

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x} uv'\,dx = [uv]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} u'v\,dx.$$

Die in Satz 17 enthaltene Integrationsmethode heißt die *Methode der teilweisen Integration*, weil bei ihrer Anwendung auf ein Integral $\int uv'dx$ noch die Aufgabe übrig bleibt, das Integral $\int u'v\,dx$ auszuwerten.

Ist irgend ein vorgelegtes Integral $\int f(x)dx$ zu berechnen, so kann man es auf unzählig viele Arten auf die Form $\int uv'dx$ bringen. Denn wenn man die Funktion v irgend wie wählt, so hat man $uv' = f(x)$, also $u = f(x) : v'$ anzunehmen. Alsdann gibt die Anwendung des Satzes:

$$\int f(x)dx = f(x)\cdot\frac{v}{v'} - \int v\,\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{v'}\right)dx.$$

Im allgemeinen wird freilich das rechtsstehende Integral alsdann noch mehr Schwierigkeiten als das ursprünglich vorgelegte bereiten. Es ist Sache der Gewandtheit, eine geschickte Wahl der Funktion v zu treffen; allgemeine Regeln lassen sich dafür nicht geben.

416. Beispiele zur Methode der teilweisen Integration. Die letzte Bemerkung soll durch einige Beispiele erläutert werden.

1. Beispiel: Der Integrand $\ln x$ des Integrals $\int \ln x dx$ kann als das Produkt aus $\ln x$ und 1 aufgefaßt werden. Da 1 die Ableitung von x ist, so wählen wir $v = x$, d. h. $uv' = u = \ln x$, so daß $u' = 1 : x$ wird und der Satz liefert:

$$\int \ln x dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \cdot dx = x \ln x - \int dx$$
$$= x \ln x - x + \text{konst.}$$

2. Beispiel: Es liege das Integral $\int x^n e^{-x} dx$ vor. Hier ist der Integrand schon als das Produkt aus x^n und e^{-x} gegeben. Es liegt also nahe, $u = x^n$, $v' = e^{-x}$ zu setzen. Dann darf $v = \int e^{-x} dx$ nach (1) in Nr. 402 gleich $-e^{-x}$ gewählt werden. Da ferner $u' = nx^{n-1}$ wird, so kommt:

$$\int x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} - \int n x^{n-1}(-e^{-x}) dx$$

oder nach Satz 15, Nr. 414:

$$(1) \qquad \int x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Ist $n = 1$, so folgt hieraus sofort:

$$(2) \qquad \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + \text{konst.}$$

Ist n eine ganze Zahl > 1, so wird das Integral vermöge (1) auf ein eben solches zurückgeführt, in dem $n - 1$ statt n steht. Setzen wir allgemein

$$J_n = \int x^n e^{-x} dx,$$

so folgt nämlich:

$$J_n = -x^n e^{-x} + n J_{n-1}$$

und weiterhin analog:

$$J_{n-1} = -x^{n-1}e^{-x} + (n-1)J_{n-2},$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$J_2 = -x^2e^{-x} + 2J_1$$

und nach (2):

$$J_1 = -xe^{-x} - e^{-x} + \text{konst.}$$

Dividieren wir diese n Gleichungen bzw. mit $n!$, $(n-1)!$, ... $2!$, $1!$ und addieren sie dann, so kommt:

$$\frac{J_n}{n!} = -\left[\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1\right]e^{-x} + \text{konst.}$$

Demnach ist *für ganzes positives* n:

$$(3)\qquad \int x^n e^{-x}dx = -n!\left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} + \text{konst.}$$

Für $x = 0$ ist die rechte Seite gleich $-n! +$ konst. Daher muß, falls das Integral von 0 bis x erstreckt wird, die Konstante gleich $n!$ gewählt werden. So folgt für *positives ganzes* n:

$$(4)\qquad \int_0^x x^n e^{-x}dx = n!\left[1 - \left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}\right].$$

Ist dagegen n *eine negative ganze Zahl*, so bezeichnen wir sie mit $-m+1$, so daß m eine positive ganze Zahl > 1 ist. Aus (1) folgt nun:

$$\int x^{-m+1}e^{-x}dx = -x^{-m+1}e^{-x} - (m-1)\int x^{-m}e^{-x}dx,$$

woraus durch Auflösung nach dem rechts stehenden Integral hervorgeht:

$$\int \frac{e^{-x}}{x^m}dx = -\frac{e^{-x}}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{e^{-x}}{x^{m-1}}dx.$$

Das links stehende Integral ist also hierdurch auf ein eben solches zurückgeführt, in dem m um eine Einheit erniedrigt ist. Wiederholte Anwendung dieser *Rekursionsformel* führt schließlich das Integral

$$\int \frac{e^{-x}}{x^m}dx,$$

in dem m eine positive ganze Zahl > 1 ist, auf das Integral

$$\int \frac{e^{-x}}{x}dx$$

zurück, das freilich, wie man zeigen kann, nicht mittels der uns bekannten Funktionen ausdrückbar ist.

3. Beispiel. Im Integral $\int e^x \cos x dx$ setzen wir $u = e^x$, also $v' = \cos x$ und daher $v = \sin x$, so daß Satz 17 gibt:

$$(5) \qquad \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Das neue Integral behandeln wir analog, indem wir in ihm $u = e^x$, $v' = \sin x$, daher $v = -\cos x$ setzen, so daß die Anwendung des Satzes liefert:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x (-\cos x) dx$$

oder nach Satz 15 in Nr. 414:

$$(6) \qquad \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx + \text{konst.}$$

Wir haben hier mit Absicht die additive Konstante ausdrücklich angegeben, weil nämlich das rechts stehende Integral um eine additive Konstante von dem ursprünglich vorgelegten, in (5) links stehenden Integrale abweichen kann und wir beide Formeln (5) und (6) kombinieren wollen, indem wir den Wert (6) in (5) rechts einsetzen. So folgt:

$$\int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x dx + \text{konst.},$$

d. h.

$$(7) \qquad \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + \text{konst.}$$

Aus (6) folgt jetzt überdies:

$$(8) \qquad \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \text{konst.}$$

417. Integration durch Substitution. Außer der Methode der teilweisen Integration ist das wichtigste Hilfsmittel zur Auswertung von Integralen die *Methode der Substitution.* Sie besteht darin, daß man in das Integral

$$J = \int f(x) dx,$$

das berechnet werden soll, eine neue Veränderliche t vermöge einer Substitution

(1) $$x = \varphi(t)$$

einführt.

Das Integral J ist nämlich definiert als eine Funktion von x, für die

$$\frac{dJ}{dx} = f(x)$$

ist. Wird nun $x = \varphi(t)$ gesetzt, so wird J eine Funktion von t und hat als solche die Ableitung:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{dJ}{dx}\frac{dx}{dt} = f(x)\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Demnach ist

(2) $$J = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Schneller erhält man diese neue Form des Integrals J so: Vermöge (1) ist

(3) $$dx = \varphi'(t)\,dt,$$

so daß die Substitution der Werte (1) und (2) in das Differential von J, nämlich in

$$dJ = f(x)\,dx,$$

das Differential in (2) liefert. Hat man die Substitution (1) derart gewählt, daß das Integral in der neuen Form (2) berechnet werden kann, so ergibt sich eine Funktion von t, in die man nachträglich wieder die ursprüngliche Veränderliche x einführen muß vermöge der zu (1) *inversen* Substitution:

(4) $$t = \Phi(x).$$

Bei der Auswahl der anzuwendenden Substitution (1) muß man darauf achten, *daß nicht nur vermöge ihrer x als stetige Funktion von t, sondern auch t vermöge ihrer Umkehrung* (4) *als stetige Funktion von x definiert wird.* Handelt es sich ins besondere um die Auswertung des *bestimmten* Integrals

(5) $$J = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

das für $x = x_0$ verschwindet, so geht es durch Einführung der neuen Veränderlichen t in ein solches Integral über, das für den aus

$$x_0 = \varphi(t_0)$$

folgenden Wert t_0 von t verschwindet. Folglich ist t_0 die untere Grenze des in t ausgedrückten bestimmten Integrals:

$$(6) \qquad J = \int_{t_0}^{t} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Bei der Anwendung der Substitution auf bestimmte Integrale darf man also nicht vergessen, *die neuen Werte der Grenzen für die neue Veränderliche zu berechnen und einzuführen.* Denn dasselbe gilt für die obere Grenze, falls sie in (5) einen bestimmt gegebenen Wert x_1 hat, indem dann die obere Grenze t_1 des neuen Integrals (6) aus $x_1 = \varphi(t_1)$ berechnet werden muß.

418. Beispiele zur Methode der Substitution. Darüber, welche Substitution bei einem vorgelegten Integrale zweckmäßig sein kann, lassen sich keine Regeln aufstellen. Einige Beispiele werden aber wenigstens Fingerzeige geben.

1. Beispiel: Soll das Integral $\int (a + bx)^n dx$ ausgewertet werden, so setzen wir $a + bx = t$, woraus $x = (t - a) : b$ und $dx = dt : b$ folgt, so daß kommt:

$$\int (a + bx)^n dt = \int t^n \frac{dt}{b} = \frac{1}{b}\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{(n+1)b} + \text{konst.}$$
$$= \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b} + \text{konst.}$$

2. Beispiel: Im Nenner des Integranden von

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

seien p und q solche Konstanten, für die $q - \frac{1}{4}p^2 > 0$ ist. Da

$$x^2 + px + q = (x + \tfrac{1}{2}p)^2 + q - \tfrac{1}{4}p^2 = (q - \tfrac{1}{4}p^2)\left[\left(\frac{x + \frac{1}{2}p}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}}\right)^2 + 1\right]$$

ist, so setzen wir

$$\frac{x + \frac{1}{2}p}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}} = t, \quad \text{d. h.} \quad x = t\sqrt{q - \tfrac{1}{4}p^2} - \tfrac{1}{2}p, \quad dx = dt\sqrt{q - \tfrac{1}{4}p^2},$$

so daß nach (5) in Nr. 402 folgt:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}} + \text{konst.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+\frac{1}{2}p}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}} + \text{konst.},$$

wobei es einerlei ist, welches Vorzeichen man der Quadratwurzel gibt.

3. Beispiel: Um das bestimmte Integral

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$$

zu berechnen, setzen wir $\ln x = t$, also $x = e^t$, $dx = e^t dt$. Für $x = 1$ bzw. e ist $t = 0$ bzw. 1, so daß 0 und 1 die Grenzen des neuen Integrals sind:

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx = \int_0^1 t^2 e^{-t} e^t dt = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

4. Beispiel: Durch die Substitution können wir aus schon berechneten Integralen andere ableiten. Z. B. gibt die Formel (3) von Nr. 416, wenn wir darin zunächst $x = mt$, $dx = m dt$ setzen:

$$(1) \quad \int t^n e^{-mt} dt = -\frac{n!}{m^{n+1}}\left(1 + \frac{mt}{1!} + \frac{m^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{m^n t^n}{n!}\right) e^{-mt} + \text{konst.}$$

und, wenn weiterhin die Substitution $t = -\ln z$, $dt = -dz : z$ gemacht wird:

$$(2) \quad \int (\ln z)^n z^{m-1} dz = \frac{(-1)^n n!}{m^{n+1}} \left[1 - \frac{m \ln z}{1!} + \frac{(m\ln z)^2}{2!} - \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^n \frac{(m \ln z)^n}{n!}\right] z^m + \text{konst.}$$

für *ganzes positives n.*

§ 4. Mittelwertsätze.

419. Erster Mittelwertsatz. Die Sätze in § 1, 2. Kap. des 1. Bandes, beruhen im wesentlichen auf dem in Nr. 28 bewiesenen Mittelwertsatze 2. Dieser Satz läßt sich leicht in einen Satz umwandeln, der dem Gebiete der Integralrechnung

angehört. Es tritt nämlich in jenem Satze eine Funktion $f(x)$ auf, die ebenso wie ihre Ableitung $f'(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ bestimmte endliche Werte hat. Wird die Ableitung $f'(x)$ mit $F(x)$ bezeichnet und wird vorausgesetzt, daß $F(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ stetig sei, so ist auch $f(x)$, nämlich $\int F(x)dx$, nach Satz 6, Nr. 410, in diesem Intervalle stetig, so daß die Annahmen jenes Mittelwertsatzes erfüllt sind. Ferner ist jetzt

$$f(X) - f(x_0) = [f(x)]_{x_0}^{X} = \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

Daher liefert die Formel jenes Satzes sofort den

Satz 18 (Mittelwertsatz): Ist $F(x)$ eine im Intervalle von x_0 bis X stetige Funktion von x, so gibt es im Intervalle wenigstens einen von x_0 und X verschiedenen Wert x_1 von x, für den die Formel gilt:

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = (X - x_0)F(x_1).$$

Die Voraussetzung $x_0 < X$ ist offenbar nicht nötig.

Wir hätten den Satz auch aus Satz 11, Nr. 412, ableiten können; er leuchtet geometrisch sofort ein. Er besagt nämlich nach Satz 7, Nr. 411, daß die Fläche zwischen dem Bilde der Funktion $y = F(x)$, der Abszissenachse und den zu x_0 und X gehörigen Ordinaten, siehe Fig. 11, gleich der Fläche eines Rechtecks ist, das dieselbe Grundlinie $X - x_0$ hat und dessen Höhe $F(x_1)$ eine gewisse unter den Ordinaten des Flächenstückes ist.

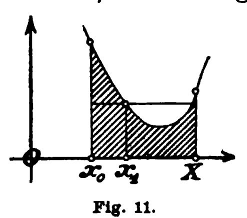


Fig. 11.

Diese Ordinate $F(x_1)$ kann als *das arithmetische Mittel aller Ordinaten des Flächenstückes* bezeichnet werden. Denn wenn wir das Intervall von x_0 bis X in n *gleichlange* Teile $\varDelta x$ teilen und die nach Nr. 404 zugehörige Summe

$$J = \sum_{x_0}^{X} F(x)\varDelta x$$

bilden, so ist, weil alle $\varDelta x$ einander gleich sind, $n\varDelta x = X - x_0$, so daß folgt:

$$\frac{J}{X - x_0} = \frac{1}{n}\sum_{x_0}^{X} F(x),$$

d. h. $J:(X-x_0)$ ist das arithmetische Mittel der n Ordinaten, die in den Anfangspunkten aller n Teilintervalle Δx zu errichten sind. Beim Grenzübergange zu $\lim \Delta x = 0$, d. h. zu $\lim n = \infty$, geht J nach Nr. 410 in das von x_0 bis X erstreckte bestimmte Integral über, so daß das arithmetische Mittel gleich

$$\frac{1}{X-x_0}\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx$$

oder also nach Satz 18 gleich $F(x_1)$ wird.

Satz 19: Ist $F(x)$ eine im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ stetige Funktion von x und teilt man das Intervall in n gleiche Teile, so ist das arithmetische Mittel der zu den Anfangsabszissen aller n Teilintervalle gehörigen Funktionswerte $F(x)$ für $\lim n = \infty$ gleich

$$\frac{1}{X-x_0}\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

Aus Satz 18 folgt noch: Wenn $F(x)$ in einem Intervalle stetig ist, so können wir zwei Werte n und m von x, die dem Intervalle angehören, beliebig nahe beieinander wählen, so daß

$$\int_{n}^{m} F(x)\,dx = (m-n)F(x_1)$$

wird, wobei dann x_1 zwischen m und n liegt. Indem wir $|m-n|$ hinreichend klein wählen, können wir die rechte Seite absolut genommen kleiner als eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl τ machen. Daher:

Satz 20: Ist $F(x)$ in einem Intervalle eine stetige Funktion von x und sind n und m irgend zwei Werte von x, die dem Intervalle angehören, so wird dadurch, daß $|m-n|$ hinreichend klein angenommen wird, der absolute Betrag des von n bis m erstreckten Integrals von $F(x)$ kleiner als eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl τ:

$$\left|\int_{n}^{m} F(x)\,dx\right| < \tau.$$

Es folgt dies übrigens auch daraus, daß dies Integral eine stetige Funktion von m ist.

420. Zweiter Mittelwertsatz. Wir können jetzt den Satz beweisen:

Satz 21 (Zweiter Mittelwertsatz): Sind u und v im Intervalle von x_0 bis X stetige Funktionen von x und hat v überall im Intervalle einerlei Vorzeichen, so gibt es einen Wert u_1, der zwischen dem größten und kleinsten Werte von u innerhalb des Intervalles liegt und für den die Formel gilt:

$$\int_{x_0}^{X} uv\,dx = u_1 \int_{x_0}^{X} v\,dx.$$

Dabei darf $x_0 < X$ oder $> X$ sein.

Ist nämlich k der kleinste und g der größte Wert von u innerhalb des Intervalles, so ist, falls v im ganzen Intervalle positiv ist:

$$kv < uv < gv$$

und, falls v im ganzen Intervalle negativ ist:

$$kv > uv > gv.$$

Nach Satz 14, Nr. 413, liegt daher der Wert des Integrals

$$\int_{x_0}^{X} uv\,dx$$

in beiden Fällen zwischen:

$$\int_{x_0}^{X} kv\,dx \quad \text{und} \quad \int_{x_0}^{X} gv\,dx$$

oder, da k und g konstant sind, nach Satz 15, Nr. 414, zwischen:

$$k\int_{x_0}^{X} v\,dx \quad \text{und} \quad g\int_{x_0}^{X} v\,dx.$$

Dies aber sagt Satz 21 aus, da u_1 zwischen k und g liegt. Ist insbesondere v im ganzen Intervalle gleich Eins, so kommt der Satz 21 auf den Mittelwertsatz 18 der vorigen Nummer zurück.

Man kann dem Satze 21 eine etwas andere Form geben. Da nämlich u im Intervalle stetig ist und u_1 zwischen dem kleinsten und größten Werte von u im Intervalle liegt, so gibt es nach Satz 6, Nr. 21, wenigstens einen Wert x_1 von x im Intervalle, für den u gerade gleich u_1 ist. Daher:

Satz 22: Sind u und v im Intervalle von x_0 bis X stetige Funktionen von x und hat v überall im Intervalle einerlei Vorzeichen, so gibt es wenigstens einen Wert x_1 von x im Intervalle, für den die Formel gilt:

$$\int_{x_0}^{X} u v\, dx = u(x_1) \int_{x_0}^{X} v\, dx.$$

Dabei darf $x_0 < X$ oder $> X$ sein.

421. Neuer Beweis der Taylorschen Formel. Die Methode der teilweisen Integration (Nr. 415) liefert einen sehr einfachen und eleganten Beweis des Satzes 19 in Nr. 112, der ja auch ein verallgemeinerter Mittelwertsatz ist und den Taylorschen Satz 20 ebenda nach sich zieht.

Es seien nämlich x und h zwei *gegebene* Zahlen, dagegen sei t *veränderlich* und $F(x + h - t)$ eine solche Funktion von t, die nebst ihren n ersten Ableitungen für alle Werte von t im Intervalle von 0 bis h stetig ist. Die erste Ableitung von F nach t ist $-F'$, die zweite F'', die dritte $-F'''$ usw., wenn die Akzente die Differentiationen nach $x + h - t$ andeuten. Ist nun m eine der Zahlen $1, 2, \cdots n - 1$, so läßt sich das Integral

$$\int_0^t F^{(m)}(x + h - t)\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\, dt$$

mittels teilweiser Integration nach der Formel (1) von Nr. 415 umformen, wenn

$$u = F^{(m)}(x + h - t), \quad \text{also} \quad v' = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}, \quad v = \frac{t^m}{m!}$$

gewählt wird. Es ergibt sich:

$$\int_0^t F^{(m)}(x+h-t)\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\, dt = \frac{t^m}{m!}F^{(m)}(x+h-t) + \int_0^t F^{(m+1)}(x+h-t)\frac{t^m}{m!}\, dt.$$

Wählen wir nun die obere Grenze $t = h$, so müssen wir diese Substitution auch in dem von Integralzeichen freien ersten Summanden rechts machen. Also folgt:

$$\int_0^h F^{(m)}(x+h-t)\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\, dt = \frac{h^m}{m!}F^{(m)}(x) + \int_0^h F^{(m+1)}(x+h-t)\frac{t^m}{m!}\, dt.$$

Setzen wir hier nacheinander $m = 1, 2, \cdots n - 1$ und addieren wir alsdann alle hervorgehenden $n - 1$ Gleichungen, so ergibt sich, weil insbesondere

$$\int_0^h F'(x+h-t)\,dt = -\int_0^h \frac{dF(x+h-t)}{dt}\,dt = -[F(x+h-t)]_{t=0}^{t=h} = F(x+h) - F(x)$$

ist, die Gleichung:

$$(1)\quad F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1!}F'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\overset{(n-1)}{F}(x) + R_n,$$

worin der *Rest* R_n den Wert hat:

$$(2)\qquad R_n = \int_0^h F^{(n)}(x+h-t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

Die Gleichung (1) führt zu dem Taylorschen Satze 20 in Nr. 112, wenn *alle* Ableitungen der betrachteten Funktion $F(x+h-t)$ von $t = 0$ bis $t = h$, d. h. wenn alle Ableitungen der Funktion $F(x)$ im Intervalle von x bis $x + h$ stetig sind und der Rest R_n für $\lim n = \infty$ den Grenzwert Null hat. Die Gleichung (2) gibt eine *neue Form des Restes*, die bisweilen von Nutzen ist.

422. Neue Ableitung der Lagrangeschen und Cauchyschen Restform. Wenden wir den Satz 22 von Nr. 420 auf das in dem Reste R_n auftretende Integral an, indem wir die zu integrierende Funktion von t in das Produkt von

$$u = F^{(n)}(x+h-t) \quad \text{und} \quad v = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

zerlegen, und bezeichnen wir den dort auftretenden Wert x_1 jetzt, da an seine Stelle ein Wert zwischen 0 und h tritt, mit $(1-\theta)h$, wo θ einen positiven echten Bruch bedeutet, so kommt:

$$R_n = F^{(n)}(x+\theta h)\int_0^h \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x+\theta h).$$

Dies aber ist die *Lagrangesche Restform*, siehe (4) in Nr. 112.

Wenden wir dagegen den Satz 22 von Nr. 420 in der Art an, daß wir

$$u = F^{(n)}(x+h-t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{und} \quad v = 1$$

wählen, so kommt:

$$R_n = F^{(n)}(x+\theta h)\frac{(1-\theta)^{n-1}h^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^h dt = \frac{(1-\theta)^{n-1}h^n}{(n-1)!}F^{(n)}(x+\theta h),$$

und dies ist die *Cauchysche Restform*, siehe (5) in Nr. 113.

423. Ein Hilfssatz. Um noch einen anderen Mittelwertsatz abzuleiten, bedürfen wir eines einfachen Hilfssatzes, den wir jetzt aufstellen wollen.

Es seien $\tau_0, \tau_1, \cdots \tau_{n-1}$ solche n positive Zahlen, von denen jede folgende kleiner als die vorhergehende oder höchstens gerade so groß ist. Dagegen seien $t_0, t_1, \cdots t_{n-1}$ beliebige n (reelle) Zahlen. Setzen wir nun

$$(1)\quad \begin{cases} t_0 = p_0, \quad t_0 + t_1 = p_1, \quad t_0 + t_1 + t_2 = p_2, \quad \cdots \\ \qquad t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1} = p_{n-1}, \end{cases}$$

so ist

$$t_0 = p_0, \quad t_1 = p_1 - p_0, \quad t_2 = p_2 - p_1, \quad \cdots t_{n-1} = p_{n-1} - p_{n-2},$$

also

$$\tau_0 t_0 + \tau_1 t_1 + \cdots + \tau_{n-1} t_{n-1} =$$
$$\tau_0 p_0 + \tau_1(p_1 - p_0) + \tau_2(p_2 - p_1) + \cdots + \tau_{n-1}(p_{n-1} - p_{n-2}),$$

daher:

$$(2)\quad \begin{cases} \tau_0 t_0 + \tau_1 t_1 + \cdots + \tau_{n-1} t_{n-1} = \\ p_0(\tau_0 - \tau_1) + p_1(\tau_1 - \tau_2) + \cdots + p_{n-2}(\tau_{n-2} - \tau_{n-1}) + p_{n-1}\tau_{n-1}. \end{cases}$$

Hierin sind alle Differenzen $\tau_0 - \tau_1, \tau_1 - \tau_2, \cdots \tau_{n-2} - \tau_{n-1}$ nach Voraussetzung *positiv* oder wenigstens gleich Null, und dasselbe gilt von τ_{n-1}. Sind nun A und $B > A$ zwei Zahlen, zwischen denen *alle* Summen (1) liegen, so ist folglich:

$$A(\tau_0 - \tau_1) \leqq p_0(\tau_0 - \tau_1) \leqq B(\tau_0 - \tau_1),$$
$$A(\tau_1 - \tau_2) \leqq p_1(\tau_1 - \tau_2) \leqq B(\tau_1 - \tau_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A(\tau_{n-2} - \tau_{n-1}) \leqq p_{n-2}(\tau_{n-2} - \tau_{n-1}) \leqq B(\tau_{n-2} - \tau_{n-1}),$$
$$A\tau_{n-1} \leqq p_{n-1}\tau_{n-1} \leqq B\tau_{n-1}.$$

Addition aller dieser Formeln gibt nach (2):

$$A\tau_0 \leqq \tau_0 t_0 + \tau_1 t_1 + \cdots + \tau_{n-1} t_{n-1} \leqq B\tau_0.$$

Also gilt der

Satz 23: Sind $\tau_0, \tau_1, \cdots \tau_{n-1}$ solche n positive Zahlen, von denen jede folgende kleiner als die vorhergehende oder höchstens

gerade so groß ist, und sind $t_0, t_1, \cdots t_{n-1}$ *beliebige n reelle Zahlen, so ist, falls alle Summen*

$$t_0, \quad t_0+t_1, \quad t_0+t_1+t_2, \quad \cdots \quad t_0+t_1+\cdots+t_{n-1}$$

zwischen den Zahlen A und $B > A$ *liegen, auch*

$$A\tau_0 \leqq \tau_0 t_0 + \tau_1 t_1 + \cdots + \tau_{n-1} t_{n-1} \leqq B\tau_0.$$

424. Dritter Mittelwertsatz. Wir betrachten nun das Integral

$$\int_{x_0}^{X} uv\,dx,$$

dessen obere Grenze $X > x_0$ sei. Wir setzen voraus, daß u und v im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ stetige Funktionen von x seien, und *außerdem soll v beständig positiv sein und abnehmen,* wenn x von x_0 bis X wächst.

Schalten wir zwischen x_0 und X irgend welche Werte $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ in steigender Reihe ein, so ist das vorgelegte Integral nach Nr. 410 der Grenzwert der Summe

$$J = u(x_0)v(x_0)(x_1-x_0) + u(x_1)v(x_1)(x_2-x_1) + \cdots + u(x_{n-1})v(x_{n-1})(X-x_{n-1}),$$

und zwar derjenige Grenzwert, der sich ergibt, wenn alle *positiven* Differenzen $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \cdots X - x_{n-1}$ nach Null streben und ihre Anzahl n dementsprechend über jede endliche Zahl wächst

Setzen wir nun:

$$\tau_0 = v(x_0), \quad \tau_1 = v(x_1), \quad \cdots \tau_{n-1} = v(x_{n-1}),$$

so bilden $\tau_0, \tau_1, \cdots \tau_{n-1}$ nach der über $v(x)$ gemachten Voraussetzung eine abnehmende Reihe von lauter positiven Zahlen wie in Satz 23 der vorigen Nummer. Setzen wir außerdem

$$t_0 = u(x_0)(x_1-x_0), \; t_1 = u(x_1)(x_2-x_1), \; \cdots t_{n-1} = u(x_{n-1})(X-x_{n-1}),$$

so können wir daher den Hilfssatz 23 anwenden. Es bedeute also A eine Zahl kleiner als alle Summen:

$$(1)\begin{cases} t_0 = u(x_0)(x_1-x_0), \\ t_0+t_1 = u(x_0)(x_1-x_0) + u(x_1)(x_2-x_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_0+t_1+\cdots+t_{n-1} = u(x_0)(x_1-x_0)+u(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+u(x_{n-1})(X-x_{n-1}) \end{cases}$$

und B eine Zahl größer als alle diese Summen. A darf auch

gleich der kleinsten und B gleich der größten aller n Summen sein. Alsdann folgt aus dem Hilfssatze, daß

$$(2) \qquad Av(x_0) \leqq J \leqq Bv(x_0)$$

ist.

Wenn wir jetzt alle positiven Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $\cdots X - x_{n-1}$ nach Null streben lassen, indem ihre Anzahl n über jede endliche Zahl wächst, so geht aus J das vorgelegte Integral hervor. Dagegen gehen die Summen (1) über in alle Integrale von der Form:

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x} u\,dx,$$

wo die obere Grenze x alle Werte von x_0 bis X erreichen kann. Folglich bedeute A den kleinsten Wert, den dieses Integral (3) annimmt, wenn x von x_0 bis X wächst, und B seinen größten Wert. Nach (2) liegt

$$(4) \qquad \frac{1}{v(x_0)} \int_{x_0}^{X} uv\,dx$$

zwischen diesem Minimum und Maximum. Nun aber ist das Integral (3) nach Satz 6, Nr. 410, eine stetige Funktion von x im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$. Also erreicht es jeden zwischen dem Minimum und Maximum gelegenen Wert wenigstens einmal, wenn x alle Werte von x_0 bis X durchläuft, nach Satz 6 von Nr. 21. Für wenigstens einen Wert ξ von x zwischen x_0 und X hat es mithin gerade den Wert (4). Daraus folgt, daß es einen Wert ξ im Intervalle $x_0 \leqq \xi \leqq X$ derart gibt, daß:

$$(5) \qquad \int_{x_0}^{X} uv\,dx = v(x_0) \int_{x_0}^{\xi} u\,dx$$

ist.

Wir hatten angenommen, daß $v(x)$ beständig positiv sei und abnehme, wenn x von x_0 bis X wächst. Wenn dagegen $v(x)$ beständig positiv ist und zunimmt, sobald x von x_0 bis X wächst, so machen wir die Substitution $x = -t$, wodurch das vorgelegte Integral nach Nr. 417 in das Integral

$$-\int_{-x_0}^{-X} u(-t)v(-t)\,dt \quad \text{oder} \quad \int_{-X}^{-x_0} u(-t)v(-t)\,dt$$

übergeht (vgl. Satz 8, Nr. 412). Hier ist wieder die untere Grenze $-X$ kleiner als die obere Grenze $-x_0$. Während t alle Werte von $-X$ bis $-x_0$ durchläuft, nimmt x alle Werte von X bis x_0 an, so daß $v(-t)$ oder $v(x)$ dabei beständig *abnimmt.* Wir kommen also zu den früheren Annahmen zurück, und es folgt, daß ein Wert $-\xi$ im Intervalle $-X \leqq -\xi \leqq -x_0$ existiert derart, daß analog (5)

$$\int_{-X}^{-x_0} u(-t)v(-t)dt = v(X)\int_{-X}^{-\xi} u(-t)dt$$

ist. Wenn wir jetzt wieder $x = -t$ einführen, so kommt:

$$-\int_X^{x_0} u(x)v(x)dx = -v(X)\int_X^{\xi} u(x)dx$$

oder nach Satz 8, Nr. 412:

$$\int_{x_0}^{X} u(x)v(x)dx = v(X)\int_{\xi}^{X} u(x)dx. \tag{6}$$

Mithin ergibt sich der

Satz 24 (dritter Mittelwertsatz): Sind $u(x)$ und $v(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ stetige Funktionen von x und ist $v(x)$ im ganzen Intervalle positiv, so gibt es, falls $v(x)$ beständig abnimmt, wenn x alle Werte von x_0 bis X durchläuft, wenigstens einen Wert ξ im Intervalle $x_0 \leqq \xi \leqq X$ derart, daß:

$$\int_{x_0}^{X} uv\,dx = v(x_0)\int_{x_0}^{\xi} u\,dx$$

ist, dagegen, falls $v(x)$ beständig zunimmt, wenn x alle Werte von x_0 bis X durchläuft, wenigstens einen Wert ξ im Intervalle $x_0 \leqq \xi \leqq X$ derart, daß

$$\int_{x_0}^{X} uv\,dx = v(X)\int_{\xi}^{X} u\,dx$$

ist.

§ 5. Integration und Differentiation unendlicher Reihen.

425. Gleichmäßige Konvergenz. Von solchen unendlichen Reihen, die eine Veränderliche x enthalten, haben wir bisher nur einen besonderen Fall, nämlich die Potenzreihen, betrachtet. (Vgl. Nr. 112 und Nr. 363). Jetzt wollen wir allgemeiner annehmen, daß $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ eine unbegrenzte und nach irgend einer Vorschrift gebildete Folge von Funktionen einer Veränderlichen x seien. *Alle diese Funktionen seien in dem Intervalle $A < x < B$ stetig.* Ist alsdann die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ für jedes x dieses Intervalles konvergent, so ist ihre Summe

$$f(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

eine im Intervalle $A < x < B$ definierte *Funktion* von x.

Man darf aber den Satz 13 von Nr. 23 über die Stetigkeit einer Summe von stetigen Funktionen nicht ohne weiteres auf eine unbegrenzte Anzahl von Summanden ausdehnen. Es steht daher noch gar nicht fest, ob die Funktion $f(x)$ stetig ist, wenn auch die einzelnen Summanden $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ sämtlich stetig sind.

Es ist vielmehr für die folgenden Untersuchungen unerläßlich, vorauszusetzen, daß die unendliche Reihe (1) im Intervalle $A < x < B$ *gleichmäßig konvergiere.* Was unter der gleichmäßigen Konvergenz zu verstehen ist, geht schon aus den Betrachtungen in Nr. 364 hervor, die sich allerdings auf den Bereich der komplexen Zahlen beziehen, während wir hier im Bereiche der reellen Zahlen verbleiben. Danach lautet die

Definition der gleichmäßigen Konvergenz: Es soll stets, wie klein auch eine positive Zahl σ gewählt sein mag, einen Index n derart geben, daß für jedes x im Intervalle $A < x < B$ und für jeden Index $m \geqq n$ der absolute Betrag des Restes

$$R_m(x) = u_m + u_{m+1} + \cdots$$

kleiner als σ wird:

$$|R_m(x)| < \sigma. \tag{2}$$

Ist diese Voraussetzung erfüllt, so läßt sich in der Tat zeigen, daß auch die Summe $f(x)$ der Reihe (1) eine stetige Funktion von x ist, und zwar so:

Bezeichnet $f_m(x)$ die Summe der m ersten Glieder der Reihe (1):

$$f_m(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_{m-1},$$

so ist $f_m(x)$ nach Satz 13 von Nr. 23 im Intervalle $A < x < B$ stetig, da hier ja die Zahl der Summanden endlich ist. Ferner ist $R_m(x)$ gleich $f(x) - f_m(x)$ und daher nach (2) für *jedes* x im Intervalle

$$|f(x) - f_m(x)| < \sigma.$$

Bedeutet x_1 irgend einen bestimmten Wert im Intervalle, so ist also auch:

$$|f(x_1) - f_m(x_1)| < \sigma.$$

Nach Satz 3, Nr. 20, gibt es ferner, wie klein auch die positive Zahl σ gewählt sein mag, um die Stelle x_1 herum ein Intervall $x_1 - h < x < x_1 + h$ derart, daß für jedes x innerhalb dieser Umgebung

$$|f_m(x) - f_m(x_1)| < \sigma$$

wird, weil $f_m(x)$ stetig ist. Da

$$f(x) - f(x_1) = [f(x) - f_m(x)] - [f(x_1) - f_m(x_1)] + [f_m(x) - f_m(x_1)]$$

ist, so folgt aus den drei vorstehenden Ungleichungen nach Satz 2, Nr. 4:

$$|f(x) - f(x_1)| < 3\sigma,$$

sobald $x_1 - h < x < x_1 + h$ ist. Aber 3σ ist eine beliebig kleine positive Zahl. Also bedeutet dies Ergebnis nach Satz 3, Nr. 20, daß $f(x)$ an jeder Stelle x_1 *innerhalb* des Intervalles von A bis B stetig ist.

Satz 25: Sind die Summanden der unendlichen Reihe

$$f(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

im Intervalle $A < x < B$ stetige Funktionen der Veränderlichen x und konvergiert die Reihe im ganzen Intervalle gleichmäßig, so ist auch die Summe $f(x)$ der Reihe innerhalb des Intervalles eine stetige Funktion von x.

426. Integration gleichmäßig konvergenter unendlicher Reihen. Wir können nun den Satz beweisen:

Satz 26: Sind die Summanden der unendlichen Reihe

$$f(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

im Intervalle $A < x < B$ stetige Funktionen der Veränderlichen x und konvergiert die Reihe im ganzen Intervalle gleichmäßig, so ist auch die unendliche Reihe

$$\int_{x_0}^{X} u_0\,dx + \int_{x_0}^{X} u_1\,dx + \cdots + \int_{x_0}^{X} u_n\,dx + \cdots$$

gleichmäßig konvergent und ihre Summe gleich dem Integrale

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

falls die Integralgrenzen x_0 und X im Innern des Intervalles von A bis B liegen, d. h.: Eine gleichmäßig konvergente unendliche Reihe darf gliedweise integriert werden.

Zum Beweise setzen wir wie in voriger Nummer

$$f(x) = f_m(x) + R_m(x).$$

Da $f(x)$ nach Satz 25 stetig ist und dasselbe von $f_m(x)$ gilt, so ist auch $R_m(x)$ als Differenz von beiden Funktionen stetig. Alle drei Funktionen haben folglich nach Satz 6, Nr. 410, im Intervalle stetige Integrale, so daß kommt:

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f_m(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} R_m(x)\,dx,$$

sobald x_0 und X innerhalb des Intervalles von A bis B liegen. Nach dem Mittelwertsatze 18, Nr. 419, gibt es einen Wert x_1 zwischen x_0 und X, für den

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{X} R_m(x)\,dx = (X - x_0)\,R_m(x_1)$$

ist. Dieser Wert x_1 wird im allgemeinen für verschiedene Werte von X verschieden sein. Aus (1) und (2) folgt:

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f_m(x)\,dx + (X - x_0)\,R_m(x_1).$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der vorgelegten Reihe gibt es, wenn σ eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, einen Indexwert n derart, daß für jedes x im Intervalle von

A bis B und für jeden Index $m \geqq n$ auch $|R_m| < \sigma$ ist. Beim Grenzübergange für $\lim m = \infty$ folgt also aus (3)

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{m=\infty} \int_{x_0}^{X} f_m(x)\,dx.$$

Es ist aber nach Satz (1) in Nr. 413:

$$\int_{x_0}^{X} f_m(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} u_0\,dx + \int_{x_0}^{X} u_1\,dx + \cdots + \int_{x_0}^{X} u_{m-1}\,dx,$$

so daß folgt:

$$(4)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} u_0\,dx + \int_{x_0}^{X} u_1\,dx + \cdots + \int_{x_0}^{X} u_m\,dx + \cdots.$$

Diese unendliche Reihe ist hiernach auch sicher konvergent. Noch erübrigt aber der Beweis, daß sie für jedes X im Intervalle von A bis B *gleichmäßig* konvergiert.

Zum Beweise bezeichne $\mathfrak{R}_m(X)$ den Rest der Reihe (4), der nach Streichung der m ersten Glieder hervorgeht, so daß wir haben:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f_m(x)\,dx + \mathfrak{R}_m(X).$$

Vergleichung mit (3) lehrt, daß

$$\mathfrak{R}_m(X) = (X - x_0)\,R_m(x_1)$$

ist, wobei wir wissen, daß x_1 zwischen x_0 und X liegt. Da nun $|R_m(x_1)| < \sigma$ für $m \geqq n$ ist, so folgt:

$$|\mathfrak{R}_m(X)| < \sigma\,|X - x_0|.$$

Im Intervalle von A bis B ist $|X - x_0|$ kleiner als $|A - B|$, mithin:

$$|\mathfrak{R}_m(X)| < \sigma\,|A - B|.$$

Wählen wir eine beliebig kleine positive Zahl τ und setzen wir dann $\sigma = \tau : |A - B|$, so folgt, daß $|\mathfrak{R}_m(X)| < \tau$ für jedes X innerhalb des Intervalles von A bis B und für jeden Index $m \geqq n$ ist, d. h. die Reihe (4) konvergiert innerhalb des Intervalles von A bis B in der Tat überall gleichmäßig.

427. Differentiation gleichmäßig konvergenter unendlicher Reihen. Es liege jetzt wieder eine im Intervalle von A bis B gleichmäßig konvergente unendliche Reihe

$$F(x) = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots$$

von lauter stetigen Funktionen $v_0, v_1, \ldots v_n, \ldots$ vor. Wir fügen jedoch noch die Voraussetzung hinzu: Die Funktionen $v_0, v_1, \ldots v_n, \ldots$ sollen überall im Intervalle stetige Ableitungen haben, und die unendliche Reihe dieser Ableitungen

(1) $$f(x) = v_0' + v_1' + \cdots + v_n' + \cdots$$

soll ebenfalls im Intervalle gleichmäßig konvergieren. Nach unserem letzten Satze ist alsdann:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} v_0'\,dx + \int_{x_0}^{X} v_1'\,dx + \cdots + \int_{x_0}^{X} v_n'\,dx + \cdots,$$

falls x_0 und X innerhalb des Intervalles gewählt sind, und diese Reihe konvergiert gleichmäßig. Sie läßt sich so schreiben:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = v_0(X) - v_0(x_0) + v_1(X) - v_1(x_0) + \cdots + v_n(X) - v_n(x_0) + \cdots$$

Addieren wir $F(x_0)$, so kommt nach Satz 6, Nr. 103:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx + F(x_0) = v_0(X) + v_1(X) + \cdots + v_n(X) + \cdots.$$

Differentiation nach X gibt nun:

$$f(X) = \frac{d}{dX}[v_0(X) + v_1(X) + \cdots + v_n(X) + \cdots].$$

Hieraus und aus (1) folgt für jedes X im Intervalle:

$$v_0'(X) + v_1'(X) + \cdots + v_n'(X) + \cdots = \frac{d}{dX}[v_0(X) + v_1(X) + \cdots + v_n(X) + \cdots].$$

Satz 27: Sind die Summanden der unendlichen Reihe

$$F(x) = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots$$

im Intervalle von A bis B stetige Funktionen von x mit stetigen Ableitungen $v_0', v_1', \ldots v_n', \ldots$ und konvergiert sowohl diese Reihe als auch die unendliche Reihe

$$f(x) = v_0' + v_1' + \cdots + v_n' + \cdots$$

innerhalb des Intervalles überall gleichmäßig, so ist $f(x)$ die Ableitung von $F(x)$, d. h.: Eine gleichmäßig konvergente unendliche Reihe darf gliedweise differenziert werden, sobald auch die dadurch hervorgehende unendliche Reihe gleichmäßig konvergiert.

428. Beispiele. Die Sätze der beiden letzten Nummern zeigen, daß die Sätze von der gliedweisen Differentiation einer Summe und von der gliedweisen Integration einer Summe, nämlich Satz 12 von Nr. 34 und Satz 13 von Nr. 413, unter gewissen Bedingungen auch auf unendliche Reihen ausgedehnt werden können. Wir heben hervor, daß dabei die Bedingungen für die Differenzierbarkeit viel mehr verlangen als die für die Integrierbarkeit.

Liegt insbesondere eine *Potenzreihe*

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \cdots$$

vor, so wissen wir nach Nr. 364, daß sie, falls x komplex ist, innerhalb ihres Konvergenzkreises gleichmäßig konvergiert. Ist r der Konvergenzradius, so ist folglich die Reihe, wenn $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ ebenso wie x und x_0 *reell* sind, gleichmäßig konvergent für $|x - x_0| < r$, dagegen divergent für $|x - x_0| > r$. Die Potenzreihen liefern uns daher Beispiele für unsere Sätze.

1. Beispiel: Nach Satz 1, Nr. 101, ist die Reihe

$$(1) \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

im Intervalle $-1 < x < +1$ gleichmäßig konvergent. Wählen wir $x_0 = 0$, so gibt die Integration:

$$(2) \qquad \operatorname{arc\,tg} X = \frac{X}{1} - \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{5} - \frac{X^7}{7} + \cdots$$

für $|X| < 1$. Dabei ist der Arkus im Intervalle von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ zu wählen, weil wir $\operatorname{arc\,tg} x_0 = \operatorname{arc\,tg} 0 = 0$ angenommen haben. Man kann hieraus schnell konvergierende Reihen für die Zahl π gewinnen. Z. B. ist $4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}$ gleich $\operatorname{arc\,tg} \frac{120}{119}$. Da andererseits $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{1}{4}\pi$ ist, so folgt:

$$\frac{1}{4}\pi = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239},$$

also nach (2):

$$\pi = 16\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \cdots\right] - 4\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 - \cdots\right].$$

Brechen wir die erste Reihe nach der 17., die zweite nach der 5. Potenz ab, so ergibt sich hieraus auf 12 Dezimalen genau

$$\pi = 3,\ 141\ 592\ 653\ 59\bar{0}.$$

Die Reihe (2) ergibt sich auch aus der Maclaurinschen Entwicklung. Ist nämlich $y = \operatorname{arc\,tg} x$, so ist $y' = \cos^2 y$ oder $y' = \cos y \sin (y + \frac{1}{2}\pi)$. Hieraus folgt durch Schluß von n auf $n+1$ leicht:

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \sin [n(y + \tfrac{1}{2}\pi)] = (n-1)!\frac{\sin[n(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\pi)]}{\sqrt{1+x^2}^{\,n}},$$

wo die Wurzel positiv ist, weil sie $\cos y > 0$ vorstellt. Nach Satz 24 von Nr. 116 ist also:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n},$$

wobei die Cauchysche Restform gilt:

$$R_{2n} = \sin [2n(\operatorname{arc\,tg} \theta x + \tfrac{1}{2}\pi)] \cdot \frac{(1-\theta)^{2n-1}x^{2n}}{(1+\theta^2x^2)^n},$$

die zeigt, daß $\lim R_{2n} = 0$ für $n = \infty$ ist, sobald $|x| < 1$ ist, und auch noch für $x = \pm 1$. Für $x = \pm 1$ geht die allerdings sehr langsam konvergierende Reihe für π hervor, die *Leibniz* fand:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

2. Beispiel: Nach der Binomialformel (4) in Nr. 125 ist für $|x| < 1$:

(3) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots,$$

wobei die Wurzel positiv ist. Satz 26 von Nr. 426 gibt, wenn $x_0 = 0$ gewählt wird, für $|X| < 1$:

(4) $$\arcsin X = \frac{X}{1} + \frac{1}{2}\frac{X^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{X^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{X^7}{7} + \cdots,$$

wobei der Arkus zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Für $|X| > 1$ ist die Formel sinnlos. Die Reihe (4) ist dagegen noch für $X = \pm 1$ konvergent und liefert, wie wir nebenbei bemerken, alsdann:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{1}{5} + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\tfrac{1}{7} + \cdots$$

Zweites Kapitel.

Integrale von elementaren Funktionen.

---

§ 1. Integration der rationalen Funktionen.

429. Vorbemerkung. Wenn wir auch in Nr. 44 unter den *elementaren* Funktionen nur gewisse sehr spezielle Funktionen verstanden haben, so mag doch von jetzt an *jede solche Funktion elementar heißen*, die wir auf Grund der Differentiationsregeln von § 2 bis 5 des 2. Kap., 1. Bd., zu differenzieren imstande sind. Elementar nennen wir also solche Funktionen, die aus den in Nr. 44 angeführten speziellen elementaren Funktionen durch eine endliche Anzahl von Operationen zusammensetzbar sind. Nach Satz 6 von Nr. 410 hat jede elementare Funktion, sobald sie in einem Intervalle stetig ist, auch Integrale, die in demselben Intervalle ebenfalls stetig sind.

Es liegt jedoch kein Grund vor zu der Erwartung, durch die Integration von elementaren Funktionen wieder zu elementaren Funktionen zu gelangen. In dem besonderen Falle, den wir in diesem Paragraphen betrachten wollen, ist es allerdings so.

Daß zunächst die *Integrale der ganzen rationalen Funktionen* in der Tat elementar und zwar wieder ganze rationale Funktionen sind, zeigt das erste Beispiel in Nr. 414. Wir wenden uns zu den *gebrochenen* rationalen Funktionen.

430. Allgemeine Integration einer gebrochenen rationalen Funktion. Es sei $F(x):f(x)$ eine gebrochene rationale Funktion von x. Nach Nr. 379 dürfen wir annehmen,

daß sie schon auf eine solche Form gebracht sei, in der die ganzen rationalen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ *relativ prim* sind. Ferner nehmen wir an, die Funktion $f(x)$ sei schon in ihre verschiedenen linearen Faktoren zerlegt worden:

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda},$$

so daß $a, b, \ldots l$ voneinander verschiedene Konstanten und $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ ganze positive Zahlen bedeuten. Wir haben hier wie in Nr. 383 angenommen, daß der Koeffizient der höchsten Potenz von x in $f(x)$ gleich Eins sei. Dies ist statthaft, denn wir können den Bruch $F(x):f(x)$ dadurch, daß wir ihn mit einer Konstanten erweitern, stets auf eine solche Form bringen.

Nach Satz 2 in Nr. 383 läßt sich nun die vorgelegte gebrochene Funktion in der Form darstellen:

$$(1)\left\{\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ &+ \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{L}{(x-l)^{\lambda}} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} + G(x). \end{aligned}\right.$$

Dabei bedeuten $A, A_1, \ldots A_{\alpha-1}, B, B_1, \ldots B_{\beta-1}, \ldots L, L_1, \ldots L_{\lambda-1}$ Konstanten, von denen $A, B, \ldots L$ sämtlich von Null verschieden sind, während $G(x)$ eine ganze rationale Funktion ist. Diese Summe können wir nach Satz 13 von Nr. 413 gliedweise integrieren. Das letzte Glied $G(x)$ liefert dabei nach voriger Nummer eine ganze rationale Funktion $H(x)$.

Da ferner nach (1) und (2) in Nr. 402:

$$\int\frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} + \text{konst. für } n \neq 1, \int\frac{dt}{t} = \ln t + \text{konst.}$$

ist, woraus durch die Substitution $t = x - c$ folgt:

$$\int\frac{dx}{(x-c)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-c)^{n-1}} + \text{konst. für } n \neq 1,$$

$$\int\frac{dx}{x-c} = \ln(x-c) + \text{konst.},$$

[430

so ergibt die Integration:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = -\frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} - \frac{A_1}{(\alpha-2)(x-a)^{\alpha-2}} - \cdots - \frac{A_{\alpha-2}}{x-a} + A_{\alpha-1}\ln(x-a)$$

$$-\frac{B}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} - \frac{B_1}{(\beta-2)(x-b)^{\beta-2}} - \cdots - \frac{B_{\beta-2}}{x-b} + B_{\beta-1}\ln(x-b)$$

$$\cdot\ \cdot$$

$$-\frac{L}{(\lambda-1)(x-l)^{\lambda-1}} - \frac{L_1}{(\lambda-2)(x-l)^{\lambda-2}} - \cdots - \frac{L_{\lambda-2}}{x-l} + L_{\lambda-1}\ln(x-l)$$

$$+ H(x) + \text{konst.}$$

Das unbestimmte Integral einer gebrochenen rationalen Funktion ist also darstellbar als eine Summe aus rationalen und logarithmischen Funktionen. Doch ist dies nur ein vorläufiges Ergebnis, denn die Nullstellen $a, b, \ldots l$ des Nenners $f(x)$ können ja zum Teil oder sämtlich komplexe Zahlen sein, so daß dann in unserer Formel rechts noch mit imaginären Größen behaftete Glieder auftreten. Da wir bisher nur über die Integration von *reellen* Funktionen gesprochen haben, so ist unser Ergebnis in diesem Falle vorläufig geradezu unbegründet. Wir werden in Nr. 432 sehen, daß es dennoch auch im Falle komplexer Nullstellen des Nenners zu dem richtigen Ergebnisse führt.

Außerdem ist hervorzuheben, daß wir x auf ein solches Intervall zu beschränken haben, wo der Integrand $F(x):f(x)$ stetig ist, d. h. auf ein Intervall, das keine der Stellen $a, b, \cdots l$ enthält. Ist ferner z. B. $x - a < 0$, so ist nach der zweiten Formel (2) von Nr. 402 statt $\ln(x-a)$ der Wert $\ln(a-x)$ zu setzen.

431. Bedingung dafür, daß das Integral einer rationalen Funktion auch rational wird. Da das Integral einer ganzen rationalen Funktion stets rational ist, sehen wir von diesem Falle ab und betrachten eine wirklich gebrochene rationale Funktion $F(x):f(x)$. Die letzte Formel der vorigen Nummer zeigt, daß das Integral nur dann rational ist, wenn einzeln

$$A_{\alpha-1} = 0, \quad B_{\beta-1} = 0, \quad \cdots L_{\lambda-1} = 0$$

ist. Da $A, B, \cdots L$ nach Satz 2, Nr. 383, von Null verschieden sind und andererseits mit $A_{\alpha-1}, B_{\beta-1}, \cdots L_{\lambda-1}$ zu-

sammenfallen, wenn $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\cdots \lambda = 1$ ist, so ist also vor allem erforderlich, daß der Nenner $f(x)$ *keine einfache* Nullstelle habe.

In Nr. 390 sahen wir nun: Wenn man

$$\varphi(x) = (x-a)^\alpha \frac{F(x)}{f(x)}, \quad \psi(x) = (x-b)^\beta \frac{F(x)}{f(x)}, \quad \cdots$$
$$\omega(x) = (x-l)^\lambda \frac{F(x)}{f(x)}$$

setzt, so ist

$$A_{\alpha-1} = \frac{\varphi^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)!}, \quad B_{\beta-1} = \frac{\psi^{(\beta-1)}(b)}{(\beta-1)!}, \quad \cdots L_{\lambda-1} = \frac{\omega^{(\lambda-1)}(l)}{(\lambda-1)!}.$$

Also ist das Integral dann und nur dann rational, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$(1) \qquad \varphi^{(\alpha-1)}(a) = 0, \quad \psi^{(\beta-1)}(b) = 0, \quad \cdots \omega^{(\lambda-1)}(l) = 0$$
$$(\alpha \neq 1, \ \beta \neq 1, \ \cdots \ \lambda \neq 1).$$

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist gleich der Anzahl der verschiedenen Nullstellen von $f(x)$.

Ist der Grad des Zählers $F(x)$ um mindestens zwei Einheiten kleiner als der des Nenners $f(x)$, so reduziert sich die Anzahl der Gleichungen um Eins. Denn wenn $f(x)$ vom n^{ten} Grade und $F(x)$ vom höchstens $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade ist, enthält die Partialbruchzerlegung (1) in Nr. 430 keine ganze rationale Funktion $G(x)$, und außerdem ist dann $\alpha + \beta \cdots + \lambda$ gleich n. Bringt man nun alle Partialbrüche auf den gemeinsamen Nenner $f(x)$, so wird der Zähler vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade in x, muß aber gleich $F(x)$, also vom höchstens $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade sein. Daher muß dabei x^{n-1} den Koeffizienten Null erhalten, und somit ist dann:

$$A_{\alpha-1} + B_{\beta-1} + \cdots + L_{\lambda-1} = 0$$

oder

$$(2) \qquad \frac{\varphi^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)!} + \frac{\psi^{(\beta-1)}(b)}{(\beta-1)!} + \cdots + \frac{\omega^{(\lambda-1)}(l)}{(\lambda-1)!} = 0,$$

so daß also eine der Bedingungen (1) eine Folge der übrigen ist. Die Formel (2) umfaßt als besonderen Fall, nämlich für $\alpha = \beta = \cdots = \lambda = 1$, die des Satzes 5 in Nr. 386.

[431

432. Erste Methode zur Integration einer rationalen Funktion mit komplexen Nullstellen des Nenners. Wie in Nr. 430 gesagt wurde, müssen wir die dort gegebene Methode noch ergänzen, wenn der Nenner $f(x)$ der zu integrierenden Funktion $F(x):f(x)$ komplexe Nullstellen hat. Wir nehmen dabei natürlich an, daß die Koeffizienten von $F(x)$ und $f(x)$ sämtlich reell seien. Ist nun $h+ik$ eine gerade m-fache Nullstelle des Nenners, so ist nach Satz 24, Nr. 378, auch $h-ik$ eine solche. Diese Nullstellen liefern in der Partialbruchzerlegung (1) von Nr. 430 zwei Summen von der Form:

$$\frac{R}{(x-h-ik)^m}+\frac{R_1}{(x-h-ik)^{m-1}}+\cdots+\frac{R_{m-1}}{x-h-ik}$$
$$+\frac{S}{(x-h+ik)^m}+\frac{S_1}{(x-h+ik)^{m-1}}+\cdots+\frac{S_{m-1}}{x-h+ik}.$$

Dabei lassen sich die Koeffizienten $R, R_1, \cdots R_{m-1}$ nach Nr. 390 durch ein Verfahren berechnen, das ebenso für $S, S_1, \cdots S_{m-1}$ zu benutzen ist und sich von jenem nur dadurch unterscheidet, daß anstatt $h+ik$ der Wert $h-ik$ zu nehmen ist. Daraus folgt, daß R und S, ebenso R_1 und S_1 usw., schließlich ebenso R_{m-1} und S_{m-1} konjugiert komplex sind. Die zu betrachtenden Glieder der Partialbruchzerlegung haben mithin die Form:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{M+iN}{(x-h-ik)^m}+\frac{M_1+iN_1}{(x-h-ik)^{m-1}}+\cdots+\frac{M_{m-1}+iN_{m-1}}{x-h-ik}\\&+\frac{M-iN}{(x-h+ik)^m}+\frac{M_1-iN_1}{(x-h+ik)^{m-1}}+\cdots+\frac{M_{m-1}-iN_{m-1}}{x-h+ik}.\end{aligned}\right.$$

Nehmen wir *vorläufig*, ohne die dazu eigentlich nötige Begründung, auch jetzt die Integration so vor, als ob alle diese Glieder nur reelle Konstanten enthielten, so liefern die beiden in (1) übereinander stehenden Summanden

$$(2)\qquad \frac{M+iN}{(x-h-ik)^m}+\frac{M-iN}{(x-h+ik)^m}$$

nach Nr. 430 das Integral:

$$(3)\qquad -\frac{M+iN}{(m-1)(x-h-ik)^{m-1}}-\frac{M-iN}{(m-1)(x-h+ik)^{m-1}}.$$

Die Summe (2) und ebenso die Summe (3) ist reell, denn wenn darin i mit $-i$ vertauscht wird, so ändern sich die Summen nicht. Die reellen Formen gehen sofort hervor, wenn man die Summen auf gemeinsame Nenner bringt. Um also zu beweisen, daß diese Methode der Integration im Bereiche der komplexen Zahlen erlaubt ist, genügt es zu beweisen, daß der Differentialquotient der reellen Funktion (3) in der Tat die reelle Funktion (2) ist. Diesen Nachweis dürfen wir für die Summanden in (3) einzeln führen, da ja nach Nr. 368 auch im Bereiche der komplexen Zahlen die Regeln für die Differentiation einer Summe und einer ganzzahligen Potenz gelten. Man sieht nun sofort, daß die Summanden von (3) differenziert die von (2) ergeben.

Derselbe Schluß gilt für jedes andere Paar von übereinanderstehenden Summanden des Ausdruckes (1), abgesehen von dem letzten Paare Dieses Paar

$$(4)\qquad \frac{M_{m-1}+iN_{m-1}}{x-h-ik}+\frac{M_{m-1}-iN_{m-1}}{x-h+ik}$$

ergibt nämlich, wenn wir unbekümmert um die auftretenden imaginären Größen die gliedweise Integration ausführen, das Integral:

$$(5)\ (M_{m-1}+iN_{m-1})\operatorname{Ln}(x-h-ik)+(M_{m-1}-iN_{m-1})\operatorname{Ln}(x-h+ik),$$

wo wir wie in Nr. 376 das Zeichen Ln statt ln benutzen, weil es sich um Logarithmen im Bereiche der komplexen Zahlen handelt. Nun können wir die Summe (4) auf die reelle Form bringen:

$$(6)\qquad 2\,\frac{M_{m-1}(x-h)-N_{m-1}k}{(x-h)^2+k^2}.$$

Andererseits können wir, wie sogleich gezeigt werden soll, auch die Summe (5) auf eine reelle Form bringen. Ist dies geschehen, so genügt es, um die Richtigkeit der angewandten Methode zu beweisen, nur noch zu zeigen, daß die reell geschriebene Funktion (5) als Ableitung die reelle Funktion (6) hat.

Um den Ausdruck (5) auf eine reelle Form zu bringen, bedenken wir, daß

$$(7)\qquad x-h-ik=\sqrt{(x-h)^2+k^2}\,\frac{1+iw}{1-iw}$$

[432

ist, wenn

(8) $$w = \frac{x-h-\sqrt{(x-h)^2+k^2}}{k}$$

gesetzt wird. Die Größe w ist reell. Nun ist nach Nr. 376 und nach (7)

$$\operatorname{Ln}(x-h-ik) = \ln\sqrt{(x-h)^2+k^2} + \operatorname{Ln}\frac{1+iw}{1-iw}$$

oder also nach (1) in Nr. 377:

$$\operatorname{Ln}(x-h-ik) = \tfrac{1}{2}\ln[(x-h)^2+k^2] + 2i\operatorname{arc\,tg} w.$$

Ebenso ist:

$$\operatorname{Ln}(x-h+ik) = \tfrac{1}{2}\ln[(x-h)^2+k^2] - 2i\operatorname{arc\,tg} w.$$

Setzen wir diese Werte in (5) ein, so nimmt die Summe (5) in der Tat die reelle Form an:

(9) $$M_{m-1}\ln[(x-h)^2+k^2] - 4N_{m-1}\operatorname{arctg}\frac{x-h-\sqrt{(x-h)^2+k^2}}{k}.$$

Dieser Ausdruck läßt noch eine Vereinfachung zu. Setzen wir nämlich $(x-h):k=z$, so ist die auftretende Arkusfunktion diese:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(z-\sqrt{z^2+1}\right),$$

also ein Winkel, dessen Tangens gleich $z-\sqrt{z^2+1}$ ist. Der Tangens des doppelt so großen Winkels ist gleich $-1:z$, daher:

$$-2\operatorname{arc\,tg}\left(z-\sqrt{z^2+1}\right) = -\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{z}\right) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z} = \operatorname{arc\,ctg} z$$
$$= \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tg} z.$$

Da eine additive Konstante bei der ausgeführten unbestimmten Integration gleichgültig ist, so können wir folglich den Ausdruck (9) durch

(10) $$M_{m-1}\ln[(x-h)^2+k^2] - 2N_{m-1}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-h}{k}$$

ersetzen.

Wenn wir diese reelle Funktion von x differenzieren, so geht in der Tat der Ausdruck (6) hervor. Damit ist der Beweis dafür beendet, daß wir zunächst ohne Rücksicht auf auftretende imaginäre Konstanten wie in Nr. 430 integrieren dürfen. Fassen wir nachher je zwei konjugiert komplexe Ausdrücke zu einem zusammen, und ersetzen wir die Logarithmen von imaginären Größen, wie wir es getan haben, nach

Formel (1) von Nr. 377 durch Summen von Logarithmen und Arkusfunktionen von reellen Größen, so ergibt sich schließlich das Integral der gebrochenen rationalen Funktion in seiner exakten reellen Form.

433. Zweite Methode zur Integration einer rationalen Funktion mit komplexen Nullstellen des Nenners. Dies Verfahren, bei dem wir durchaus im Bereiche der reellen Zahlen verbleiben, beruht auf der in Satz 10 von Nr. 395 aufgestellten *reellen* Partialbruchzerlegung von $F(x):f(x)$, die wir gliedweise integrieren. Jene Zerlegung zeigt, daß die Integration geleistet werden kann, sobald wir Integrale von der Form:

$$(1) \qquad \int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m}\,dx$$

auszuwerten imstande sind. Darin bedeuten P, Q, p, q reelle Konstanten, und m ist eine positive ganze Zahl. Weil x^2+px+q nach Nr. 394 die Form

$$x^2+px+q=(x-h-ik)(x-h+ik)=(x-h)^2+k^2$$

hat, so ist dabei $p=-2h$ und $q=h^2+k^2$, also umgekehrt

$$h=-\tfrac{1}{2}p, \quad k=\sqrt{q-\tfrac{1}{4}p^2},$$

wobei der Radikand positiv ist und k mit beliebigem Vorzeichen gewählt werden darf. Es ist also:

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m}\,dx=\int \frac{Px+Q}{[(x-h)^2+k^2]^m}\,dx.$$

Einen speziellen Fall dieses Integrals haben wir im 2. Beispiele in Nr. 418 erledigt. Wir machen hier dieselbe Substitution wie dort, indem wir

$$(2) \qquad x=h+kt$$

setzen, so daß sich ergibt:

$$(3) \quad \int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m}\,dx=\frac{P}{k^{2(m-1)}}\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^m}+\frac{Ph+Q}{k^{2m-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^m}.$$

Weil $t\,dt=\frac{1}{2}d(t^2+1)$ ist, so ist insbesondere für $m>1$:

$$(4) \qquad \int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^m}=-\frac{1}{2(m-1)(t^2+1)^{m-1}}+\text{konst.},$$

dagegen für $m = 1$:

$$(5) \qquad \int \frac{t\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \text{konst.}$$

Es kommt also nur noch darauf an, das in (3) auftretende letzte Integral zu berechnen. Weil

$$\frac{1}{(t^2+1)^m} = \frac{1}{(t^2+1)^{m-1}} - \frac{t^2}{(t^2+1)^m}$$

ist, so wird:

$$(6) \qquad \int \frac{dt}{(t^2+1)^m} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{m-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^m}.$$

Um zunächst das zweite Integral rechts auszurechnen, wenden wir teilweise Integration nach Satz 17 in Nr. 415 an, indem wir seinen Integranden in

$$u \cdot v' = t \cdot \frac{t}{(t^2+1)^m}$$

zerlegen, also

$$u' = 1, \quad v = \int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^m}$$

oder nach (4):

$$v = -\frac{1}{2(m-1)(t^2+1)^{m-1}}$$

setzen. Dann gibt die teilweise Integration

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^m} = -\frac{t}{2(m-1)(t^2+1)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{m-1}}.$$

Setzen wir dies Ergebnis in (6) ein, so kommt für $m > 1$:

$$(7) \quad \int \frac{dt}{(t^2+1)^m} = \frac{t}{2(m-1)(t^2+1)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{m-1}}.$$

Es ist dies eine *Rekursionsformel*, in der wir nach und nach m durch $m-1$, $m-2$, ... 2 ersetzen, so daß insgesamt $m-1$ Formeln hervorgehen, von denen die letzte lautet:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t + \text{konst.}$$

Multiplizieren wir die $m-1$ Gleichungen bzw. mit

$$1, \quad \frac{2m-3}{2m-2}, \quad \frac{(2m-3)(2m-5)}{(2m-2)(2m-4)}, \ldots \frac{(2m-3)(2m-5)\cdots 3}{(2m-2)(2m-4)\cdots 4}$$

und addieren sie dann, so kommt für $m > 1$:

$$(8)\quad \int \frac{dt}{(t^2+1)^m} = \frac{1}{(2m-2)} \frac{t}{(t^2+1)^{m-1}} + \frac{2m-3}{(2m-2)(2m-4)} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^{m-2}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(2m-3)(2m-5)\cdots 3}{(2m-2)(2m-4)\cdots 2} \frac{t}{t^2+1} + \frac{(2m-3)(2m-5)\cdots 3}{(2m-2)(2m-4)\cdots 2} \operatorname{arc\,tg} t + \text{konst.},$$

während wir natürlich für $m = 1$ die einfachere Formel

$$(9)\quad \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arc\,tg} t + \text{konst.}$$

haben.

Wenn wir schließlich die Werte (4) und (8) bzw. im Falle $m = 1$ die Werte (5) und (9) in (3) einführen, so kommt

$$(10)\quad \int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m} dx = -\frac{P}{k^{2(m-1)}2(m-1)} \cdot \frac{1}{(t^2+1)^{m-1}} +$$

$$+ \frac{Ph+Q}{k^{2m-1}} \left[\frac{1}{2m-2} \frac{t}{(t^2+1)^{m-1}} \right.$$

$$+ \frac{2m-3}{(2m-2)(2m-4)} \frac{t}{(t^2+1)^{m-2}} + \cdots$$

$$+ \frac{(2m-3)(2m-5)\cdots 3}{(2m-2)(2m-4)\cdots 2} \frac{t}{(t^2+1)}$$

$$\left. + \frac{(2m-3)(2m-5)\cdots 3}{(2m-2)(2m-4)\cdots 2} \operatorname{arc\,tg} t \right] + \text{konst.}$$

für $m > 1$, dagegen für $m = 1$:

$$(11)\quad \int \frac{Px+Q}{x^2+px+q} dx = \frac{P}{2} \ln(t^2+1) + \frac{Ph+Q}{k} \operatorname{arc\,tg} t + \text{konst.}$$

Bei diesen Formeln ist daran zu erinnern, daß $p = -2h$, $q = h^2 + k^2$ und $t = (x-h):k$ ist, so daß

$$t^2 + 1 = \frac{x^2+px+q}{k^2}$$

ist. Mithin ergibt sich:

$$(12)\quad \ln(t^2+1) = \ln[(x-h)^2 + k^2] - 2\ln k,$$

$$(13)\quad \operatorname{arc\,tg} t = \operatorname{arc\,tg} \frac{x-h}{k}.$$

Es treten also, wie zu erwarten war, genau dieselben Logarithmus- und Arkusfunktionen wie bei der ersten Methode auf, vgl. (10) in Nr. 432.

Wir haben gefunden:

Satz 1: Die Integrale von gebrochenen rationalen Funktionen sind Summen von ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen und von Funktionen von der Form:

$$\textit{konst.} \cdot \ln[(x-h)^2 + k^2], \quad \textit{konst.} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{x-h}{k}.$$

Die zyklometrischen Funktionen fehlen nur dann, wenn der Nenner der zu integrierenden Funktion keine komplexe Nullstelle hat.

Die wirkliche Ausführung der Integration erfordert allerdings die vorhergehende Bestimmung aller Nullstellen des Nenners.

§ 2. Integration algebraischer Funktionen durch Rationalisieren.

434. Rationale Funktionen einer Wurzel aus $a+bx$. Wir werden in diesem Paragraphen eine Reihe von Integralen vorführen, bei denen es durch Einführung passender neuer Veränderlicher gelingt, die Integranden rational zu machen, so daß das Integrationsproblem auf das des ersten Paragraphen zurückkommt. Ist eine solche Zurückführung möglich, so sagt man, daß der Integrand *rationalisiert* werden kann. Insbesondere wenden wir dies Verfahren auf entwickelte *algebraische* Funktionen an (vgl. Nr. 39).

Wenn zunächst der Integrand $f(x)$ des Integrals $\int f(x)dx$ eine rationale Funktion von

$$\sqrt[m]{a+bx}$$

mit ganzem positiven Exponenten m ist, so setzen wir

$$a + bx = t^m, \quad \text{d. h.} \quad x = \frac{t^m - a}{b}, \quad dx = \frac{m}{b} t^{m-1} dt,$$

so daß der Integrand des neuen in t ausgedrückten Integrals nach Nr. 417 augenscheinlich rational wird.

Dasselbe Verfahren ist anwendbar, wenn der Integrand eine rationale Funktion von *mehreren* Potenzen von $a + bx$ ist, deren Exponenten rationale Zahlen sind. Denn wenn m die kleinste positive ganze Zahl ist, die alle Nenner der auftretenden rationalen Exponenten als Faktoren enthält, so sind alle jene

Potenzen *ganze* Funktionen der m^{ten} Wurzel aus $a + bx$. Der Integrand ist folglich wie in dem vorher betrachteten Falle eine rationale Funktion dieser Wurzel.

Beispiel: Liegt das Integral

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

vor und ist $\sqrt{x}$ etwa positiv, so tritt x mit den Exponenten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ auf. Also setzen wir $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, so daß kommt:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1+t^3}{1+t^2} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^8+t^5}{t^2+1} dt.$$

Die anzuwendende Partialbruchzerlegung ergibt sich leicht durch Partialdivision, nämlich:

$$\frac{t^8+t^5}{t^2+1} = t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1 + \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1},$$

so daß kommt:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx &= \tfrac{6}{7}t^7 - \tfrac{6}{5}t^5 + \tfrac{3}{2}t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 6t \\ &\quad + 3\ln(t^2+1) + 6\operatorname{arc\,tg} t + \text{konst.} \\ &= \tfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} \\ &\quad + 3\ln(\sqrt[3]{x}+1) + 6\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x} + \text{konst.}\end{aligned}$$

Weil $\sqrt{x} > 0$ angenommen und gleich t^3 gesetzt worden war, so ist $t > 0$, also $\sqrt[6]{x} > 0$.

435. Rationale Funktionen von x und $\sqrt{a+bx}$. Es sei die positive Quadratwurzel von $a + bx$ mit X bezeichnet. Wir betrachten alsdann Integrale

$$\int f(x, X)\,dx,$$

deren Integranden $f(x, X)$ rationale Funktionen von x und X sind. Setzen wir

$$a + bx = t^2, \quad \text{d. h. } dx = \frac{2}{b} t\,dt,$$

so wird der Integrand des neuen Integrals offenbar rational in t, womit die Rationalisierung geleistet ist.

Beispiel:

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \int \frac{t^2-a}{b}\cdot t\cdot \frac{2}{b}t\,dt = \frac{2}{b^2}\int (t^4 - at^2)\,dt$$

$$= \frac{2}{b^2}\left[\frac{t^5}{5} - a\frac{t^3}{3}\right] + \text{konst.}$$

$$= \frac{2}{b^2}\sqrt{a+bx}^{\,3}\left(\frac{b}{5}x - \frac{2}{15}a\right) + \text{konst.}$$

436. Rationale Funktionen von x und $\sqrt{a+bx+x^2}$. Ist

$$X = \sqrt{a+bx+cx^2}$$

die positive Wurzel aus $a+bx+cx^2$ und sind die Koeffizienten a, b, c so beschaffen, daß X für ein gewisses Intervall von Werten der Veränderlichen x reell wird, so soll es sich um die Auswertung solcher Integrale

$$\int f(x, X)\,dx$$

handeln, deren Integranden rationale Funktionen von x und X sind. Der Fall $c = 0$ ist schon in voriger Nummer erledigt. Je nachdem $c > 0$ oder $c < 0$ ist, können wir setzen:

$$X = \sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x + x^2} \quad \text{bzw.} \quad X = \sqrt{-c}\sqrt{-\frac{a}{c} - \frac{b}{c}x - x^2}.$$

Daher genügt es, die speziellen Fälle $c = +1$ und $c = -1$ zu untersuchen. In dieser Nummer nehmen wir $c = +1$, in der nächsten $c = -1$ an.

Es sei also

$$X = \sqrt{a+bx+x^2}.$$

Alsdann können wir drei verschiedene Wege einschlagen:

Erste Methode: Wir führen eine neue Veränderliche t ein, indem wir $X = t + x$ oder $X = t - x$ wählen. Setzen wir etwa $X = t - x$, so folgt:

$$a + bx = t^2 - 2tx,$$

d. h. eine in x *lineare* Gleichung, aus der sich ergibt:

$$(1) \quad x = \frac{t^2-a}{2t+b}, \quad X = \frac{t^2+bt+a}{2t+b}, \quad dx = 2\frac{t^2+bt+a}{(2t+b)^2}dt.$$

Vermöge dieser Substitutionen geht ein in t rationaler Integrand hervor.

Zweite Methode: Wenn insbesondere $a > 0$ ist, so können wir auch mittels der Einführung von t vermöge

$$X = \sqrt{a} + tx$$

zum Ziele kommen, da sie wieder für x eine *lineare* Gleichung

$$b + x = 2t\sqrt{a} + t^2 x$$

liefert, aus der sich ergibt:

$$(2) \quad x = \frac{b - 2\sqrt{a}\,t}{t^2 - 1}, \quad X = \frac{bt - \sqrt{a}(t^2 + 1)}{t^2 - 1}, \quad dx = -2\,\frac{bt - \sqrt{a}(t^2 + 1)}{(t^2 - 1)^2}\,dt,$$

so daß der neue Integrand rational in t wird.

Dritte Methode: Wenn insbesondere die Nullstellen x_1, x_2 der quadratischen Funktion $X^2 = a + bx + x^2$ reell sind, was z. B. für $a < 0$ stets der Fall ist, so können wir auch vermöge

$$X = (x - x_1)t$$

die neue Veränderliche t einführen. Denn da $X^2 = (x - x_1)(x - x_2)$ ist, so geht für x wieder eine *lineare* Gleichung

$$x - x_2 = (x - x_1)t^2$$

hervor, aus der sich ergibt:

$$(3) \quad x = \frac{x_1 t^2 - x_2}{t^2 - 1}, \quad X = \frac{(x_1 - x_2)t}{t^2 - 1}, \quad dx = -2\,\frac{(x_1 - x_2)t}{(t^2 - 1)^2}\,dt,$$

so daß der neue Integrand rational in t wird.

1. Beispiel: Nach der ersten Methode ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \int \frac{dx}{X} = \int \frac{2\,dt}{2t + b} = \ln(2t + b) + \text{konst.}$$

$$= \ln(2X + 2x + b) + \text{konst.}$$

$$= \ln\left(x + \tfrac{1}{2}b + \sqrt{a + bx + x^2}\right) + \text{konst.}$$

Die zweite Methode gibt dagegen:

$$\int \frac{dx}{X} = -\int \frac{2\,dt}{t^2 - 1} = -\int \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}\right) dt = -\int \frac{dt}{t - 1} + \int \frac{dt}{t + 1}$$

$$= \ln(t + 1) - \ln(t - 1) + \text{konst.} = \ln \frac{t + 1}{t - 1} + \text{konst.}$$

$$= \ln \frac{X + x - \sqrt{a}}{X - x - \sqrt{a}} + \text{konst.}$$

[436

Wenn man im Numerus die Quadratwurzel X durch Erweitern des Bruches mit $X + x + \sqrt{a}$ entfernt, so geht

$$\int \frac{dx}{X} = \ln \frac{x + \frac{1}{2}b + X}{\frac{1}{2}b - \sqrt{a}} + \text{konst.}$$

hervor. Dies ist derselbe Wert wie der bei der Anwendung der ersten Methode gewonnene, da die Konstante um $\ln(\frac{1}{2}b - \sqrt{a})$ vergrößert werden darf. Die dritte Methode gibt zunächst wie die zweite:

$$\int \frac{dx}{X} = -\int \frac{2\,dt}{t^2 - 1} = \ln \frac{t+1}{t-1} + \text{konst.}$$

Hier ist aber $t = X : (x - x_1)$, so daß kommt:

$$\int \frac{dx}{X} = \ln \frac{X + x - x_1}{X - x + x_1} + \text{konst.}$$

Da $X^2 = (x - x_1)(x - x_2)$ ist, läßt sich hierfür schreiben:

$$\int \frac{dx}{X} = \ln \frac{\sqrt{x - x_2} + \sqrt{x - x_1}}{\sqrt{x - x_2} - \sqrt{x - x_1}} + \text{konst.}$$
$$= \ln\left(\sqrt{x - x_2} + \sqrt{x - x_1}\right)^2 + \text{konst.}$$
$$= \ln(2x - x_1 - x_2 + 2X) + \text{konst.}$$

Weil x_1 und x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $X = 0$ sind, so ist $x_1 + x_2$ gleich $-b$, so daß derselbe Wert wie beim ersten Verfahren herauskommt.

2. Beispiel: Die Anwendung der ersten Methode gibt:

$$\int \sqrt{a + bx + x^2}\,dx = 2\int \frac{(t^2 + bt + a)^2}{(2t + b)^3}\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{[(t + \frac{1}{2}b)^2 + a - \frac{1}{4}b^2]^2}{(t + \frac{1}{2}b)^3}\,dt.$$

Setzen wir $t + \frac{1}{2}b = z$, so kommt weiter:

$$\int X\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{(z^2 + a - \frac{1}{4}b^2)^2}{z^3}\,dz.$$

Da sich nun durch Partialdivision

$$\frac{(z^2 + a - \frac{1}{4}b^2)^2}{z^3} = z + 2(a - \tfrac{1}{4}b^2)\frac{1}{z} + (a - \tfrac{1}{4}b^2)^2\frac{1}{z^3}$$

ergibt, so folgt:

$$\int X\,dx = \tfrac{1}{8}z^2 + \tfrac{1}{2}(a - \tfrac{1}{4}b^2)\ln z - \tfrac{1}{8}(a - \tfrac{1}{4}b^2)^2\frac{1}{z^2} + \text{konst.}$$

Es ist aber nach (1):

$$z = t + \tfrac{1}{2}b = x + \tfrac{1}{2}b + X, \quad \left(a - \tfrac{1}{4}b^2\right)\frac{1}{z} = -x - \tfrac{1}{2}b + X,$$

so daß schließlich hervorgeht:

$$\int \sqrt{a + bx + x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{1}{2}b\right)\sqrt{a + bx + x^2}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(a - \tfrac{1}{4}b^2\right)\ln\left(x + \tfrac{1}{2}b + \sqrt{a + bx + x^2}\right) + \text{konst.}$$

3. Beispiel: Die erste Methode ergibt:

$$\int \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \int \frac{\alpha(2t + b) + \beta(t^2 - a)}{(2t + b)^2}\,2\,dt.$$

Vermöge der Substitution $t + \frac{1}{2}b = z$ geht hieraus hervor:

$$\int \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{X} = \int \frac{\beta z^2 + (2\alpha - \beta b)z - \beta\left(a - \frac{1}{4}b^2\right)}{2z^2}\,dz$$
$$= \frac{\beta}{2}z + \frac{2\alpha - \beta b}{2}\ln z + \frac{\beta}{2}\left(a - \tfrac{1}{4}b^2\right)\frac{1}{z} + \text{konst.}$$
$$= \beta X + \left(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta b\right)\ln\left(x + \tfrac{1}{2}b + X\right) + \text{konst.}$$

437. Rationale Funktionen von x und $\sqrt{a + bx - x^2}$. Wie zu Beginn der letzten Nummer gesagt wurde, betrachten wir jetzt Integrale, deren Integranden rationale Funktionen von x und

$$X = \sqrt{a + bx - x^2}$$

sind. Die Quadratwurzel sei wieder positiv. Auch jetzt haben wir uns auf ein Intervall zu beschränken, in dem X reell ist. Wir geben zwei Wege zur Rationalisierung an.

Erste Methode: Hätte die Gleichung $a + bx - x^2 = 0$ nur komplexe Wurzeln, so wäre X für jedes x imaginär, weil dann X^2 stets negativ wäre. Hätte die quadratische Gleichung zwei zusammenfallende Wurzeln, so wäre X nur für diesen einen Wert von x reell, nämlich gleich Null. Also folgt, daß wir voraussetzen müssen, daß die quadratische Gleichung *zwei verschiedene reelle Wurzeln* x_1 und x_2 habe. Alsdann ist

$$X = \sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}.$$

Wir führen nun die neue Veränderliche t ein vermöge:

$$X = (x - x_1)t \quad \text{oder} \quad x_2 - x = (x - x_1)t^2.$$

Dies ist eine in x *lineare* Gleichung, und es kommt:

$$x = \frac{x_2 + x_1 t^2}{t^2+1}, \quad X = \frac{x_2 - x_1}{t^2+1} t, \quad dx = -\frac{2(x_2 - x_1)t}{(t^2+1)^2} dt.$$

Vermöge dieser Substitutionen wird der Integrand rational in t.

Zweite Methode: Ist insbesondere $a > 0$, so kann man eine neue Veränderliche t auch durch

$$X = \sqrt{a} + tx$$

definieren; dann wird x durch die *lineare* Gleichung:

$$b - x = 2\sqrt{a}\, t + t^2 x$$

als Funktion von t gegeben. Es kommt:

$$x = \frac{b - 2\sqrt{a}\, t}{t^2+1}, \quad X = \frac{bt - \sqrt{a}(t^2-1)}{t^2+1}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{a}(t^2-1) - bt}{(t^2+1)^2} dt,$$

so daß der Integrand mittels dieser Substitutionen rational in t wird.

438. Spezielle Fälle. Liegt ein Integral vor, das zu den in Nr. 436 und Nr. 437 betrachteten Klassen gehört, so führen zwar die angegebenen Methoden stets zum Ziele; aber man kann bisweilen auf anderen Wegen schneller zum Ziele gelangen. Hierfür einige Beispiele.

1. Beispiel: Bedenkt man, daß $X = \sqrt{a + bx + cx^2}$ den Differentialquotienten $(\frac{1}{2} b + cx) : X$ hat, so erkennt man unmittelbar, daß

$$\int \frac{\frac{1}{2} b + cx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} dx = \sqrt{a + bx + cx^2} + \text{konst.}$$

ist.

2. Beispiel: Das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}}$$

läßt sich so schreiben:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + \frac{1}{4} b^2 - (x - \frac{1}{2} b)^2}},$$

so daß es durch die Substitution:

$$\frac{x - \frac{1}{2} b}{\sqrt{a + \frac{1}{4} b^2}} = t, \text{ d. h. } x = \tfrac{1}{2} b + t\sqrt{a + \tfrac{1}{4} b^2}, \; dx = \sqrt{a + \tfrac{1}{4} b^2}\, dt$$

übergeht in:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\text{arc sin }t+\text{konst.}$$
$$=\text{arc sin }\frac{x-\frac{1}{2}b}{\sqrt{a+\frac{1}{4}b^2}}+\text{konst.}$$

3. Beispiel: Es ist

$$\int\frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\int\frac{\alpha+\frac{1}{2}\beta b-\beta(\frac{1}{2}b-x)}{\sqrt{a+bx-x^2}}dx$$
$$=(\alpha+\tfrac{1}{2}b\beta)\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}-\beta\int\frac{\frac{1}{2}b-x}{\sqrt{a+bx-x^2}}dx,$$

also nach dem ersten und zweiten Beispiele:

$$\int\frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta b)\text{ arc sin }\frac{x-\frac{1}{2}b}{\sqrt{a+\frac{1}{4}b^2}}$$
$$-\beta\sqrt{a+bx-x^2}+\text{konst.}$$

439. Rationale Funktionen von x, $\sqrt{a+bx}$ und $\sqrt{\alpha+\beta x}$. Ist der Integrand eine rationale Funktion von

$$x,\ \sqrt{a+bx},\quad \sqrt{\alpha+\beta x},$$

so setzen wir

$$\alpha+\beta x=t^2,\ \text{d. h. } x=\frac{t^2-\alpha}{\beta},\ dx=\frac{2t}{\beta}dt,$$

so daß

$$\sqrt{a+bx}=\sqrt{a-\frac{b\alpha}{\beta}+\frac{b}{\beta}t^2},\qquad \sqrt{\alpha+\beta x}=t$$

wird. Der Integrand des in t ausgedrückten Integrals wird daher eine rationale Funktion von t und

$$\sqrt{a-\frac{b\alpha}{\beta}+\frac{b}{\beta}t^2}.$$

Je nachdem $b:\beta>0$ oder <0 ist, läßt sich folglich das Integral auf eine der in Nr. 436 und 437 betrachteten Klassen zurückführen.

§ 3. Elliptische Integrale.

440. Definition der elliptischen Integrale. Wir gehen nunmehr einen Schritt weiter, indem wir Integrale betrachten, deren Integranden rationale Funktionen von x und einer Quadratwurzel X aus einer ganzen Funktion *dritten* oder *vierten*

Grades sind. Solche Integrale heißen *elliptisch*, weil zuerst das Problem der Rektifikation der Ellipse auf ihre Betrachtung geführt hat, worauf wir in Nr. 546 zurückkommen.

Hat der Radikand der Quadratwurzel X eine mehrfache Nullstelle, z. B. die doppelte Nullstelle x_1, so enthält er den Faktor $(x - x_1)^2$, der sich daher aus der Wurzel herausziehen läßt, so daß wir zu einem Integrale zurückkommen, das zu den in Nr. 436 und 437 betrachteten Integralen gehört. Dies gilt auch, wenn die doppelte Nullstelle x_1 komplex ist. Denn dann hat der Radikand nach Satz 24, Nr. 378, auch die zu x_1 konjugiert komplexe Zahl x_2 zur doppelten Nullstelle und ist also von der Form konst. $(x - x_1)^2 (x - x_2)^2$, so daß das Wurzelzeichen zu entfernen ist und für X eine ganze quadratische Funktion mit reellen Koeffizienten hervorgeht.

Wir nehmen daher im folgenden an: *Der Radikand der Quadratwurzel X soll keine mehrfache Nullstelle haben.* Alsdann läßt sich das elliptische Integral, wie man zeigen kann, im allgemeinen nicht mehr vermöge der elementaren Funktionen ausdrücken. Wir werden aber zeigen, daß sich alle elliptischen Integrale auf einige elliptische Integrale von spezieller Form reduzieren lassen, und andeuten, wie man diese speziellen elliptischen Integrale mittels unendlicher Reihen zu berechnen imstande ist.

Wenn wir in dem elliptischen Integrale $\int f(x, X)\,dx$, in dem also f eine rationale Funktion von x und X sein soll, vermöge einer Substitution von der Form

$$(1) \qquad x = \frac{p + qt}{p' + q't}$$

die neue Veränderliche t einführen, so geht es wieder in ein elliptisches Integral über, da X gleich der durch $(p' + q't)^2$ dividierten Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion dritten oder vierten Grades von t wird, während x und $dx:dt$ rationale Funktionen von t sind. Wir können also versuchen, durch geeignete Wahl der Koeffizienten p, q, p', q' der linear gebrochenen Substitution (1) zu erreichen, daß das elliptische Integral in der neuen Form einfacher wird. Insbesondere haben wir unser Augenmerk darauf zu richten, den Radikanden der Quadratwurzel zu vereinfachen.

441. Reduktion der in einem elliptischen Integrale vorkommenden Quadratwurzel. Vorauszusetzen ist, daß alle Koeffizienten des Radikanden der Quadratwurzel X reell seien. Zunächst nehmen wir an, daß der Radikand vom *vierten* Grade sei und die Nullstellen x_1, x_2, x_1', x_2' habe. Da alle Nullstellen nach Nr. 440 voneinander verschieden sein sollen, so gibt es nach Nr. 378 nur drei Möglichkeiten:

Erstens können x_1, x_2, x_1', x_2' sämtlich reell sein. Wir können dann annehmen, daß $x_1 > x_2 > x_1' > x_2'$ sei, d. h.:

$$(1)\qquad (x_1 - x_1')(x_1 - x_2')(x_2 - x_1')(x_2 - x_2') > 0.$$

Zweitens können x_1 und x_2 reell, dagegen $x_1' = h' + ik'$ und $x_2' = h' - ik'$ konjugiert komplex sein. Da dann die Produkte $(x_1 - x_1')(x_1 - x_2')$ und $(x_2 - x_1')(x_2 - x_2')$ positiv sind, so besteht auch in diesem Falle die Ungleichung (1).

Drittens können sowohl $x_1 = h + ik$ und $x_2 = h - ik$ als auch $x_1' = h' + ik'$ und $x_2' = h' - ik'$ konjugiert komplex sein. Alsdann sind $(x_1 - x_1')(x_2 - x_2')$ und $(x_1 - x_2')(x_2 - x_1')$ positiv, so daß auch in diesem Falle die Ungleichung (1) gilt.

In *jedem* der drei Fälle sind ferner $(x - x_1)(x - x_2)$ und $(x - x_1')(x - x_2')$ reelle quadratische Funktionen, so daß

$$(2)\qquad X^2 = c[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2][x^2 - (x_1' + x_2')x + x_1'x_2']$$

eine reelle Zerlegung des Radikanden darstellt, in der c, $x_1 + x_2$, x_1x_2, $x_1' + x_2'$ und $x_1'x_2'$ *reelle* Konstanten bedeuten.

Als die linear gebrochene Substitution (1) von Nr. 440 benutzen wir nun insbesondere eine von der speziellen Form:

$$(3)\qquad x = \frac{p + qt}{1 + t},$$

in der p und q *reelle* Konstanten bedeuten. Dabei muß jedoch $p \neq q$ gewählt werden, weil sich sonst t aus (3) forthebt. Alsdann wird:

$$(4)\qquad X^2 = \frac{c}{(1+t)^4}[(p+qt)^2 - (x_1 + x_2)(p+qt)(1+t) + x_1x_2(1+t)^2]$$
$$\cdot[(p+qt)^2 - (x_1' + x_2')(p+qt)(1+t) + x_1'x_2'(1+t)^2].$$

Die eckigen Klammern enthalten reelle ganze rationale Funktionen zweiten Grades von t. Wir behaupten nun, daß sich die reellen und verschiedenen Konstanten p und q der Sub-

stitution so wählen lassen, daß die in t linearen Glieder in diesen beiden quadratischen Funktionen fortfallen, d. h. daß

$$2pq - (x_1 + x_2)(p + q) + 2x_1x_2 = 0,$$
$$2pq - (x_1' + x_2')(p + q) + 2x_1'x_2' = 0$$

wird. Da sich aus diesen Forderungen pq und $p + q$ berechnen lassen, so heißt dies: p und q sollen die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(x_1 + x_2 - x_1' - x_2')x^2 - 2(x_1x_2 - x_1'x_2')x$$
$$+ x_1x_2(x_1' + x_2') - x_1'x_2'(x_1 + x_2) = 0$$

sein. Es erübrigt also zu beweisen, daß diese quadratische Gleichung zwei reelle und verschiedene Wurzeln hat. Die Bedingung dafür lautet:

$$(x_1x_2 - x_1'x_2')^2$$
$$- (x_1 + x_2 - x_1' - x_2')[x_1x_2(x_1' + x_2') - x_1'x_2'(x_1 + x_2)] > 0,$$

wobei allerdings $x_1 + x_2 \neq x_1' + x_2'$ *vorausgesetzt worden ist.* Die hier links stehende ganze rationale Funktion von x_1, x_2, x_1', x_2' ist, wie man sieht, gleich Null, wenn $x_1 = x_1'$ oder $x_1 = x_2'$ oder $x_2 = x_1'$ oder $x_2 = x_2'$ ist, muß also die Form

$$\text{konst.}\,(x_1 - x_1')(x_1 - x_2')(x_2 - x_1')(x_2 - x_2')$$

haben. Die Vergleichung der Koeffizienten von $x_1^2x_2^2$ lehrt überdies, daß der konstante Faktor gleich Eins ist. Die Bedingung ist also identisch mit der Ungleichung (1), von der wir wissen, daß sie in jedem Falle besteht.

Mithin lassen sich p und q reell und verschieden in der Art wählen, daß der Ausdruck (4) von X^2 die speziellere Form annimmt:

$$X^2 = \frac{(a + bt^2)(a' + b't^2)}{(1 + t)^4},$$

in der a, b, a', b' reelle Konstanten sind.

Allerdings wurde $x_1 + x_2 \neq x_1' + x_2'$ angenommen. Ist jedoch $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$, so benutzen wir statt (3) die noch speziellere lineare Substitution:

$$x = t + \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = t + \tfrac{1}{2}(x_1' + x_2'),$$

wodurch der Wert (2) von X^2 übergeht in:

$$X^2 = c\,[t^2 - \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2)^2]\,[t^2 - \tfrac{1}{4}(x_1' - x_2')^2],$$

so daß X^2 die Form annimmt:

$$X^2 = (a + bt^2)(a' + b't^2),$$

wo a, b und a', b' reelle Konstanten sind.

Je nachdem $x_1 + x_2 \neq x_1' + x_2'$ oder $= x_1' + x_2'$ ist, gelten also die Formeln:

$$\begin{array}{c|c}
x = \dfrac{p+qt}{1+t}, & x = t + \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \\
X = \dfrac{1}{(1+t)^2}\sqrt{(a+bt^2)(a'+b't^2)}, & X = \sqrt{(a+bt^2)(a'+b't^2)}, \\
dx = \dfrac{q-p}{(1+t)^2}\,dt. & dx = dt.
\end{array}$$

Man sieht hieraus, daß das elliptische Integral $\int f(x, X)\,dx$ auch in der neuen Veränderlichen t ein elliptisches Integral $\int \varphi(t, T)\,dt$ bleibt, bei dem die Quadratwurzel T eine speziellere Form

$$T = \sqrt{(a + bt^2)(a' + b't^2)}$$

hat. Außerdem ist in beiden Fällen

$$\frac{dx}{X} = \text{konst.}\,\frac{dt}{T}.$$

Ehe wir die Ergebnisse in einem Satze zusammenfassen, soll noch analog der Fall erledigt werden, in dem X^2 *nur vom dritten Grade* ist und keine mehrfachen Nullstellen hat. Sind x_1, x_2, x_3 die Nullstellen von X^2, so gibt es nach Nr. 378 nur *zwei* Fälle: Es darf x_1 stets reell angenommen werden, während entweder x_2 und x_3 beide reell sind und alsdann $x_1 > x_2 > x_3$ gesetzt werden darf oder aber x_2 und x_3 konjugiert komplex, also von der Form $h \pm ik$ sind. In beiden Fällen ist

$$(5) \qquad (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) > 0.$$

Da in beiden Fällen $x - x_1$ und $(x - x_2)(x - x_3)$ reelle Funktionen sind, so zerlegen wir X^2 reell in der Form:

$$X^2 = c(x - x_1)[x^2 - (x_2 + x_3)x + x_2 x_3].$$

Vermöge der Substitution

$$x = \frac{p + qt}{1 + t}$$

wird jetzt, wenn wir noch mit $1 + t$ multiplizieren und dividieren:

$$X^2 = \frac{c}{(1+t)^4}[p - x_1 + (p + q - 2x_1)t + (q - x_1)t^2]$$
$$[(p + qt)^2 - (x_2 + x_3)(p + qt)(1 + t) + x_2 x_3 (1 + t)^2].$$

In den beiden eckigen Klammern stehen, wenn p und q reell gewählt werden, reelle ganze rationale Funktionen zweiten Grades von t. Wieder lassen sich, behaupten wir, die Konstanten p und q reell und verschieden und zwar derart wählen, daß die in t linearen Glieder in beiden Funktionen fehlen. Denn die Bedingungen hierfür sind

$$p + q = 2x_1, \quad 2pq - (x_2 + x_3)(p + q) + 2x_2 x_3 = 0,$$

anders ausgedrückt: p und q müssen die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2x_1 x + (x_2 + x_3)x_1 - x_2 x_3 = 0$$

sein, die in der Tat wegen der Ungleichung (5) reell und verschieden sind. Im übrigen schließen wir wie vorhin, als wir X^2 als Funktion vom vierten Grade annahmen.

Wir fassen alle Ergebnisse zusammen in dem

Satz 2: Jedes reelle elliptische Integral $\int f(x, X)\,dx$, in dem die biquadratische oder kubische ganze Funktion X^2 von x keine mehrfache Nullstelle hat, läßt sich durch Einführung einer neuen Veränderlichen t vermöge einer reellen Substitution, die sich der allgemeinen Form

$$x = \frac{p + qt}{p' + q't}$$

unterordnet, stets in ein solches reelles elliptisches Integral $\int \varphi(t, T)\,dt$ verwandeln, in dem die Quadratwurzel T eine spezielle Form:

$$T = \sqrt{(a + bt^2)(a' + b't^2)}$$

mit reellen Koeffizienten a, b, a', b' hat. Infolge der Substitution ist außerdem:

$$\frac{dx}{X} = konst. \frac{dt}{T}.$$

442. Weitere Reduktion der elliptischen Integrale. Nach dem letzten Satze dürfen wir uns auf die Betrachtung der elliptischen Integrale von dieser spezielleren Form $\int \varphi(t, T)\,dt$ beschränken. Da φ eine rationale Funktion von t und T ist,

läßt sich φ als Bruch aus zwei *ganzen* rationalen Funktionen von t und T darstellen. Indem wir im Zähler und Nenner die mit geraden Potenzen von t behafteten Glieder von den mit ungeraden Potenzen von t behafteten absondern, bringen wir φ auf die Form:

$$\varphi = \frac{M_1 + N_1 t}{M + Nt},$$

worin M_1, N_1, M, N ganze rationale Funktionen von t^2 und T sind. Wenn wir diesen Bruch mit $M - Nt$ erweitern, erhält er die Form:

$$\varphi = \frac{MM_1 + (MN_1 - NM_1)t - NN_1 t^2}{M^2 - N^2 t^2},$$

so daß t im Nenner nur noch in *geraden* Potenzen auftritt. Daher läßt sich φ stets auf eine solche Form:

$$\varphi = P + Qt$$

bringen, in der P und Q *ganze oder gebrochene* rationale Funktionen von t^2 und T sind. Nunmehr ist das elliptische Integral als Summe darzustellen:

$$\int \varphi dt = \int P dt + \int Q t dt.$$

Das zweite Integral rechts läßt sich durch elementare Funktionen ausdrücken. Denn wenn wir darin die Substitution $t^2 = z$ machen, so wird $t dt = \frac{1}{2} dz$, also

$$\int Q t dt = \frac{1}{2} \int Q dz,$$

wo Q eine rationale Funktion von t^2 und T, d. h. von z und

$$\sqrt{(a + bz)(a' + b'z)}$$

ist. Es tritt also *nur eine* Quadratwurzel aus einer ganzen *quadratischen* Funktion der neuen Veränderlichen z auf, so daß dies Integral nach Nr. 436 bis 438 durch algebraische, logarithmische und zyklometrische Funktionen ausdrückbar ist.

Von Interesse ist also nur noch die Untersuchung der elliptischen Integrale von der Form $\int P dt$, worin P eine rationale Funktion von t^2 und T ist. Diese Funktion P ist ein Bruch aus zwei *ganzen* rationalen Funktionen von t^2 und T. Wenn

wir im Zähler und im Nenner alle geraden Potenzen von T mittels

$$(1) \qquad T^2 = (a + bt^2)(a' + b't^2)$$

rational und ganz durch t^2 ausdrücken, so nimmt das Integral die Form an:

$$\int P\,dt = \int \frac{A + BT}{C + DT}\,dt = \int \frac{B + \frac{A}{T}}{D + \frac{C}{T}}\,dt,$$

wo A, B, C, D ganze rationale Funktionen von t^2 allein sind.

Erweitern wir den Integranden mit $D - C : T$ und schreiben wir für T^2 seinen Wert (1), so nimmt das Integral die Form an:

$$\int P\,dt = \int \left(\Phi + \frac{\Psi}{T}\right) dt = \int \Phi\,dt + \int \Psi \frac{dt}{T},$$

wo Φ und Ψ ganze oder gebrochene rationale Funktionen von t^2 allein sind.

Das Integral $\int \Phi\,dt$ läßt sich nach Satz 1, Nr. 433, durch algebraische, logarithmische und zyklometrische Funktionen ausdrücken. Also ergibt sich:

Satz 3: Jedes reelle elliptische Integral ist gleich einer reellen Summe von algebraischen, logarithmischen und zyklometrischen Funktionen und von einem elliptischen Integrale von der besonderen Form:

$$\int \Psi(t^2)\,\frac{dt}{T},$$

worin Ψ eine reelle ganze oder gebrochene rationale Funktion von t^2 und

$$T = \sqrt{(a + bt^2)\,(a' + b't^2)}$$

ist. Dabei sind a, b, a', b' reelle Konstanten.

443. Normalformen des Radikanden in einem elliptischen Integrale. Wir betrachten jetzt die in dem letzten elliptischen Integrale auftretende Quadratwurzel T genauer. Je nachdem darin die Konstanten a, b, a', b' positiv oder negativ sind, ergeben sich verschiedene Gestalten von T. Da ein *positiver* konstanter Faktor des Radikanden aus der Wurzel heraus-

gezogen werden und in die Funktion $\Psi(t^2)$ hineingebracht werden kann, so erhellt, daß die folgenden fünf Gestalten übrig bleiben:

(1) $$T = \sqrt{+(t^2 - \lambda^2)(t^2 - \mu^2)},$$

(2) $$T = \sqrt{-(t^2 - \lambda^2)(t^2 - \mu^2)},$$

(3) $$T = \sqrt{+(t^2 + \lambda^2)(t^2 - \mu^2)},$$

(4) $$T = \sqrt{-(t^2 + \lambda^2)(t^2 - \mu^2)},$$

(5) $$T = \sqrt{+(t^2 + \lambda^2)(t^2 + \mu^2)},$$

worin λ und μ *reelle* Konstanten bedeuten. Denn der sechste Fall

$$T = \sqrt{-(t^2 + \lambda^2)(t^2 + \mu^2)}$$

ist auszuschließen, weil es in diesem Falle kein reelles Intervall für t gibt, in dem T reell ist.

Wir werden nun zeigen, daß sich die Wurzel in allen fünf Fällen durch Einführung einer passenden neuen Veränderlichen, wodurch die charakteristische Form des elliptischen Integrals in Satz 3 der vorigen Nummer nicht geändert wird, auf ein und dieselbe Form bringen läßt. Diese sogenannte *Normalform* ist keineswegs die einzig mögliche, denn in allen fünf Fällen lassen sich die Wurzeln noch auf mehreren anderen Wegen auf andere gemeinsame Formen bringen. Wir wollen die in mancher Hinsicht bequemste Normalform aufstellen, die übrigens auch am meisten angewandt wird.

Vorweg einige Bemerkungen: In den Fällen (1), (2) und (5) ändert sich T nicht, wenn λ^2 mit μ^2 vertauscht wird. In diesen drei Fällen darf daher $\lambda^2 < \mu^2$ angenommen werden. Ferner führen wir nachher in jedem der fünf Fälle eine neue positive Konstante k^2 ein; man wird dabei bemerken, daß sie stets kleiner als Eins, also ein *positiver echter Bruch* ist. Weiterhin ist zu beachten, welche Variabilitätsbereiche der Veränderlichen t^2 aufzuerlegen sind, damit die Wurzel T reell bleibe. Im Falle (1) sind es zwei Bereiche, nämlich $0 < t^2 < \lambda^2$ und $t^2 > \mu^2$, in allen anderen Fällen ist es immer nur einer. Im Falle (2) nämlich muß $\lambda^2 < t^2 < \mu^2$, im Falle (3) muß $t^2 > \mu^2$, im Falle (4) muß $0 < t^2 < \mu^2$ sein, und im Falle (5) darf t^2 alle positiven Werte annehmen. Wir werden nun in jedem der fünf Fälle und für jeden der möglichen Variabilitäts-

bereiche, also insgesamt auf sechs Arten, eine Substitution angeben, vermöge derer statt t eine neue Veränderliche x eingeführt wird.

Alles dies sowie die infolge der Substitutionen hervorgehenden Werte stellen wir in den folgenden Übersichten knapp zusammen. Man überzeuge sich jedesmal davon, daß, wenn t^2 den vorgeschriebenen Variabilitätsbereich durchläuft, x^2 *alle Werte zwischen Null und Eins annimmt.*

Fall (1): $\lambda^2 < \mu^2$, $k^2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2}$.

Für $0 < t^2 < \lambda^2$:

$$t^2 = \lambda^2 x^2, \quad dt = \lambda\, dx, \quad T = k\mu^2 \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

$$\frac{dt}{T} = \frac{1}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Für $t^2 > \mu^2$:

$$t^2 = \frac{\mu^2}{x^2}, \quad dt = -\mu \frac{dx}{x^2}, \quad T = \frac{\mu^2}{x^2}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

$$\frac{dt}{T} = -\frac{1}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Fall (2): $\lambda^2 < \mu^2$, $k^2 = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2}$, $\lambda^2 < t^2 < \mu^2$.

$$t^2 = \mu^2(1-k^2x^2), \quad dt = -\mu k^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-k^2x^2}}, \quad T = k^2\mu^2 x\sqrt{1-x^2},$$

$$\frac{dt}{T} = -\frac{1}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Fall (3): $k^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}$, $t^2 > \mu^2$.

$$t^2 = \frac{\mu^2}{1-x^2}, \quad dt = \mu \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}^3}, \quad T = \frac{\lambda\mu}{k} \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{1-x^2},$$

$$\frac{dt}{T} = \frac{k}{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Fall (4): $k^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}$, $0 < t^2 < \mu^2$.

$$t^2 = \mu^2(1-x^2), \quad dt = -\mu \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad T = \frac{\mu^2}{k} x\sqrt{1-k^2x^2},$$

$$\frac{dt}{T} = -\frac{k}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Fall (5): $\lambda^2 < \mu^2$, $k^2 = \dfrac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2}$.

$$t^2 = \lambda^2 \frac{x^2}{1 - x^2}, \quad dt = \lambda \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}^3}, \quad T = \lambda\mu \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{1 - x^2},$$

$$\frac{dt}{T} = \frac{1}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Diese Ergebnisse lehren:

Satz 4: Jedes reelle elliptische Integral von der Form

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(a + bt^2)(a' + b' t^2)}}$$

läßt sich durch Einführung einer neuen Veränderlichen x vermöge einer passenden Substitution von der Form

$$t^2 = \frac{\alpha + \beta x^2}{\gamma + \delta x^2}$$

mit reellen Konstanten α, β, γ, δ auf die Form bringen:

$$\text{konst.} \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Dabei ist k^2 ein positiver echter Bruch. Wenn t^2 einen solchen Variabilitätsbereich, in dem $\sqrt{(a + bt^2)(a' + b' t^2)}$ reell ist, vollständig durchläuft, so nimmt x^2 alle Werte von Null bis Eins an.

Die Zusammenstellung der fünf Fälle zeigt in der Tat, daß sich die sechs angewandten Substitutionen der allgemeinen Form

$$t^2 = \frac{\alpha + \beta x^2}{\gamma + \delta x^2}$$

unterordnen. Da diese Substitution jede rationale Funktion von t^2 in eine rationale Funktion von x verwandelt, so folgt aus Satz 3 der vorigen Nummer der

Satz 5: Jedes reelle elliptische Integral ist gleich einer Summe von reellen algebraischen, logarithmischen, zyklometrischen Funktionen und einem elliptischen Integrale von der besonderen Form

$$\int f(x^2) \frac{dx}{X},$$

in dem $f(x^2)$ eine ganze oder gebrochene reelle rationale Funktion von x^2 bedeutet und

$$X = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

ist, wobei k^2 einen positiven echten Bruch bezeichnet.

444. Abermalige Reduktion der elliptischen Integrale. Nach dem letzten Satze interessieren uns nur noch die elliptischen Integrale

$$\int f(x^2)\frac{dx}{X}$$

von der angegebenen besonderen Form.

Da $f(x^2)$ eine rationale Funktion von x^2 ist, so können wir auf sie die Partialbruchzerlegung anwenden. Wollten wir auch weiterhin gründlich vorgehen, so müßten wir die in Satz 10 von Nr. 395 gewonnene *reelle* Partialbruchzerlegung anwenden. Um jedoch in unserem Abrisse aus der Theorie der elliptischen Integrale nicht zu sehr ins Einzelne zu gehen, wollen wir die einfachere, *wenn auch nicht stets reelle* Partialbruchzerlegung des Satzes 2 in Nr. 383 anwenden, *wobei jetzt x^2 an die Stelle von x tritt.*

Vermöge ihrer wird $f(x^2)$ in eine Summe aus einer *ganzen* rationalen Funktion $G(x^2)$ von x^2 und Partialbrüchen zerteilt. Da $G(x^2)$ eine Summe von mit Konstanten multiplizierten ganzen positiven Potenzen von x^2 ist, so zeigt die Einsetzung der Zerlegung von $f(x^2)$ in das elliptische Integral: Das Integral kann zerteilt werden in eine Summe, deren Summanden, abgesehen von konstanten Faktoren, die beiden charakteristischen Formen

$$\int\frac{(x^2)^\mu\,dx}{X}, \qquad \int\frac{dx}{(x^2-a)^\nu X}$$

haben. Dabei sind μ und ν ganze positive Zahlen, während a eine Konstante bedeutet. Es können nun insbesondere solche Integrale von der zweiten Art auftreten, in denen $a = 0$ ist. Sie lassen sich so schreiben:

$$\int\frac{(x^2)^{-\nu}\,dx}{X}$$

und können also zu denen der ersten Art gerechnet werden, falls man auch *negative* ganze Zahlen für μ zuläßt. Ist da-

gegen a in einem Integrale von der zweiten Art nicht gleich Null, so können wir $-1:a=n$ setzen und das Integral auf die Form

$$\text{konst.} \int \frac{dx}{(1+nx^2)^\nu X}$$

bringen.

Satz 6: Jedes elliptische Integral ist gleich einer Summe von algebraischen, logarithmischen und zyklometrischen Funktionen, vermehrt um eine Summe, deren Summanden, abgesehen von konstanten Faktoren, die Formen haben:

$$Y_\mu = \int \frac{x^{2\mu}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad Z_\nu = \int \frac{dx}{(1+nx^2)^\nu \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Von den Konstanten μ, ν, n und k^2 ist μ ganzzahlig, ν ganzzahlig und positiv und k^2 ein positiver echter Bruch.

Wegen der zu Anfang dieser Nummer gemachten Bemerkung haben wir in der Formulierung dieses Satzes von dem Beiworte: *reell* absehen müssen.

Die letzten Betrachtungen lehren aber jedenfalls, daß den elliptischen Integralen von der Form Y_μ und Z_ν eine besonders hervorragende Bedeutung zukommt. Wir werden in Nr. 445 und Nr. 447 zeigen, daß auch sie sich noch weiter reduzieren lassen.

445. Elliptische Normalintegrale erster und zweiter Gattung. Da X^2 den Wert $(1-x^2)(1-k^2x^2)$ hat, so ist

$$X\frac{dX}{dx} = -(1+k^2)\,x + 2k^2x^3.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit $x^{2\mu-3}dx:X$ und Integration sofort:

$$(1) \qquad \int x^{2\mu-3}\frac{dX}{dx}\,dx = -(1+k^2)\,Y_{\mu-1} + 2k^2Y_\mu.$$

Das links stehende Integral können wir durch teilweise Integration umwandeln:

$$\int x^{2\mu-3}\frac{dX}{dx}dx = x^{2\mu-3}X - (2\mu-3)\int x^{2\mu-4}X\,dx.$$

Hier setzen wir im letzten Integrale

$$X = \frac{X^2}{X} = \frac{1-(1+k^2)\,x^2+k^2x^4}{X}$$

ein und erhalten:

$$\int x^{2\mu-3}\frac{dX}{dx}\,dx = x^{2\mu-3}X$$
$$-(2\mu-3)\left[Y_{\mu-2}-(1+k^2)Y_{\mu-1}+k^2Y_\mu\right]+\text{konst.}$$

Führen wir diesen Wert in (1) links ein, so erhalten wir schließlich die Formel:

$$(2)\quad (2\mu-1)k^2Y_\mu-(2\mu-2)(1+k^2)Y_{\mu-1}+(2\mu-3)Y_{\mu-2}$$
$$= x^{2\mu-3}X+\text{konst.}$$

Es ist dies eine *Rekursionsformel*, die, falls μ eine ganze Zahl und größer als Eins ist, gestattet, nacheinander Y_2 (für $\mu=2$), Y_3 (für $\mu=3$) usw. auszudrücken als Summe von der Form

$$\text{konst. } Y_0+\text{konst. } Y_1+g(x)X,$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion von x bedeutet. Ferner gibt (2) bei der Annahme $\mu=1$ eine ebensolche Formel für Y_{-1}, bei der Annahme $\mu=0$ alsdann für Y_{-2} usw.

Satz 7: Alle elliptischen Integrale von der Form

$$\int\frac{x^{2\mu}dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

worin μ eine ganze Zahl bedeutet, lassen sich darstellen als Summen von der Form

$$\textit{konst.}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\textit{konst.}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$+g(x)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion von x ist.

Daher ist die Berechnung der elliptischen Integrale Y_μ zurückgeführt auf die der beiden speziellen elliptischen Integrale

$$Y_0=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad Y_1=\int_0^x\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad\begin{pmatrix}k^2<1\\x^2<1\end{pmatrix},$$

die man die *elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung* nennt. Die Zahl k heißt ihr *Modul.*

446. Berechnung der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung. Mit Hilfe des Satzes 26 in Nr. 426 können wir die beiden Normalintegrale berechnen. Denn da x^2 auf das Intervall von 0 bis 1 beschränkt ist und

k^2 einen positiven echten Bruch bedeutet, ist nach der Binomialformel (4) in Nr. 125, falls $\sqrt{1-k^2x^2}$ positiv gewählt wird:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6x^6 + \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert nach der Bemerkung zu Beginn von Nr. 428 gleichmäßig. Gliedweise Multiplikation mit $1:\sqrt{1-x^2}$ gibt eine ebenfalls gleichmäßig konvergierende Reihe, deren gliedweise Integration nach dem zitierten Satze 26 in Nr. 426 das elliptische Normalintegral erster Gattung auf die Form bringt:

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1-k^2x^2)}} = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \tfrac{1}{2}k^2\int\limits_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\int\limits_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots$$

Ebenso ergibt sich für das elliptische Normalintegral zweiter Gattung für $|x|<1$:

$$\int\limits_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int\limits_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} + \tfrac{1}{2}k^2\int\limits_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\int\limits_0^x \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots$$

Die einzelnen Glieder dieser Reihen lassen sich, da teilweise Integration:

$$\int\limits_0^x \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m}\int\limits_0^x \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

liefert und hierin $m = 2, 4, 6 \cdots$ gesetzt werden kann, nach einander in der Form:

$$g(x)\sqrt{1-x^2} + \text{konst.}\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{oder } g(x)\sqrt{1-x^2} + \text{konst.}\arcsin x$$

darstellen, wobei jedesmal $g(x)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet.

[446

Je kleiner der echte Bruch k^2 ist, um so schneller nehmen die Glieder der unendlichen Reihen ab. Für größere Werte von k^2 kann man andere, ebenfalls schneller konvergierende Reihen aufstellen, worauf wir jedoch hier nicht eingehen.

447. Elliptisches Normalintegral dritter Gattung. Nach den Auseinandersetzungen von Nr. 444 betrachten wir jetzt die elliptischen Integrale

$$Z_\nu = \int \frac{dx}{(1+nx^2)^\nu X}, \text{ wo } X = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \text{ ist.}$$

Dabei bedeutet ν eine *positive* ganze Zahl. Um für diese Integrale eine Rekursionsformel zu gewinnen, gehen wir von der Formel aus:

$$(1)\quad \frac{d}{dx}\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}} = \frac{[X^2-(1+k^2)x^2+2k^2x^4](1+nx^2)-2n(\nu-1)x^2X^2}{(1+nx^2)^\nu X}.$$

Bezeichnen wir für den Augenblick $1+nx^2$ mit ω, so ist

$$x^2 = \frac{1}{n}(\omega-1),\quad X^2 = \frac{1}{n^2}(n+1-\omega)(n+k^2-k^2\omega).$$

Wenn diese Werte in den Zähler rechts eingesetzt werden, so nimmt er die Form an:

$$(2\nu-2)\alpha-(2\nu-3)\beta\omega+(2\nu-4)\gamma\omega^2-(2\nu-5)\delta\omega^3,$$

wobei α, β, γ, δ die folgenden Konstanten sind:

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{n^2}(n+1)(n+k^2), & \beta = \frac{1}{n^2}[n(n+2)+(2n+3)k^2], \\ \gamma = \frac{1}{n^2}[n+(n+3)k^2], & \delta = \frac{k^2}{n^2}. \end{cases}$$

Die Formel (1) läßt sich demnach so schreiben:

$$\frac{(2\nu-2)\alpha}{\omega^\nu X} - \frac{(2\nu-3)\beta}{\omega^{\nu-1}X} + \frac{(2\nu-4)\gamma}{\omega^{\nu-2}X} - \frac{(2\nu-5)\delta}{\omega^{\nu-3}X} = \frac{d}{dx}\frac{xX}{\omega^{\nu-1}}.$$

Wenn wir sie integrieren, so ergibt sich:

$$(3)\quad (2\nu-2)\alpha Z_\nu-(2\nu-3)\beta Z_{\nu-1}+(2\nu-4)\gamma Z_{\nu-2}-(2\nu-5)\delta Z_{\nu-3} = \frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}} + \text{konst.}$$

Es ist dies die gesuchte *Rekursionsformel.* Für $\nu=2$ ergibt sie Z_2 ausgedrückt durch Z_1, Z_0, Z_{-1} und $xX:\omega$, für

446, 447]

$\nu = 3$ ferner Z_3 ausgedrückt durch Z_2, Z_1, Z_0 und $xX : \omega^2$ usw., so daß alle Integrale Z_ν mit positiven ganzzahligen Indizes ν dargestellt werden in der Form:

$$(4) \quad Z_\nu = \text{konst.} Z_1 + \text{konst.} Z_0 + \text{konst.} Z_{-1} + \frac{g(x)X}{(1+nx^2)^{\nu-1}} + \text{konst.},$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion von x bedeutet.

Allerdings ist es denkbar, daß der Koeffizient α von Z_ν in (3) gleich Null wird, nämlich nach (2) für $n = -1$ und $n = -k^2$. In diesen Fällen ist β nach (2) gleich $k^2 - 1$ bzw. $(1 - k^2) : k^2$ und also nicht gleich Null, weil k^2 einen positiven echten Bruch bezeichnet. Die Rekursionsformel (3) nimmt also in den Fällen $n = -1$ und $n = -k^2$ eine einfachere Form an:

$$-(2\nu - 3)\beta Z_{\nu-1} + (2\nu - 4)\gamma Z_{\nu-2} - (2\nu - 5)\delta Z_{\nu-3} = \frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}} + \text{konst.},$$

so daß sich bei den Annahmen $\nu = 2, 3, 4 \cdots$ nach und nach $Z_1, Z_2, Z_3 \cdots$ darstellen lassen in der allgemeinen Form:

$$(5) \quad Z_\nu = \text{konst.}\, Z_0 + \text{konst.}\, Z_{-1} + \frac{g(x)X}{(1+nx^2)^{\nu-1}} + \text{konst.},$$

wo wieder jedesmal $g(x)$ ganze rationale Funktionen von x vorstellt.

Nach Nr. 444 ist nun aber Z_{-1} in der Form:

$$Z_{-1} = \int (1 + nx^2) \frac{dx}{X} = Y_0 + nY_1 + \text{konst.}$$

durch Y_0 und Y_1 ausdrückbar. Ferner ist $Z_0 = Y_0$. Sobald also $n = -1$ oder $n = -k^2$ ist, lehren die Formeln (5), daß alle Integrale Z_ν durch die schon betrachteten Integrale ausdrückbar sind. Ist jedoch n weder gleich -1 noch gleich $-k^2$, so zeigt (4), daß die Berechnung der Integrale Z_ν schließlich nur noch die des Integrals

$$Z_1 = \int \frac{dx}{(1+nx^2)X}$$

verlangt.

[447

Satz 8: Alle elliptischen Integrale von der Form:

$$\int \frac{dx}{(1+nx^2)^\nu \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

worin ν eine positive ganze Zahl größer als Eins, n eine Konstante und k^2 einen positiven echten Bruch bedeutet, lassen sich darstellen als Summen von der Form:

$$\text{konst.} \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \text{konst.} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$+ \text{konst.} \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{g(x)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{(1+nx^2)^{\nu-1}} + \text{konst.},$$

wobei $g(x)$ eine ganze rationale Funktion von x ist. Wenn insbesondere $n = -1$ oder $n = -k^2$ ist, so fehlt in dieser Summe das erste Glied; alsdann gilt der Satz auch für $\nu = 1$.

Wir sind also schließlich zu dem Ergebnisse gelangt, daß zu den beiden in Nr. 446 berechneten elliptischen Normalintegralen erster und zweiter Gattung nur noch ein wesentliches Integral hinzutritt, nämlich das sogenannte *elliptische Normalintegral dritter Gattung:*

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad \begin{pmatrix} k^2 < 1 \\ x^2 < 1 \end{pmatrix}.$$

Die Konstante $k^2 < 1$ heißt, wie schon in Nr. 445 erwähnt wurde, der *Modul.* Die Konstante n dagegen wird der *Parameter* des Normalintegrals dritter Gattung genannt. Ist er gleich -1 oder $-k^2$, so läßt sich, wie wir vorhin sahen, dies Integral auf die beiden Normalintegrale erster und zweiter Gattung zurückführen.

Auf die Berechnung des Normalintegrals dritter Gattung gehen wir nicht näher ein.

448. Überblick über die elliptischen Integrale. Die Gesamtheit unserer Untersuchungen über elliptische Integrale lehrt, daß sich jedes elliptische Integral als eine Summe darstellen läßt, deren Summanden außer algebraischen, logarithmischen und zyklometrischen Funktionen noch die mit Konstanten multiplizierten drei Normalintegrale sind. Allerdings müssen wir hinzufügen, daß wir bei der Anwendung der

Partialbruchzerlegung in Nr. 444, wie dort schon hervorgehoben wurde, keine Rücksicht darauf genommen haben, ob die Zerlegung auch rein *reell* ist. Trotzdem zeigen die gemachten Schlüsse, *daß die drei Normalintegrale bei der Untersuchung der elliptischen Integrale die grundlegende Rolle spielen.*

Es sind diese drei Integrale:

$$(1)\quad \begin{cases} u = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad v = \int\limits_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ w = \int\limits_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \end{cases}$$

Dabei ist der Modul k^2 ein echter Bruch und der Parameter n von w konstant. Die Quadratwurzel nehmen wir positiv an. Der Variabilitätsbereich von x geht von -1 bis $+1$.

Eine besonders einfache Form erhalten die Normalintegrale, wenn eine neue Veränderliche φ vermöge der Substitution

$$(2)\quad x = \sin\varphi$$

eingeführt wird, was gestattet ist, da x auf das Intervall von -1 bis $+1$ beschränkt ist. Wir dürfen alsdann φ auf das Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ einschränken, so daß $\cos\varphi = \sqrt{1-x^2}$ stets positiv ist. Die positive Wurzel aus $1-k^2x^2$ wird ferner gleich der aus $1-k^2\sin^2\varphi$. Man pflegt sie mit $\Delta\varphi$ zu bezeichnen:

$$(3)\quad \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Nun sind die drei Normalintegrale:

$$(4)\quad u = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad v = \int\limits_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad w = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}.$$

Weitergehende Untersuchungen, auf die wir nicht eingehen, lehren, daß sich die drei Normalintegrale bei beliebiger Annahme der Werte von k^2 und n in der Tat *nicht* durch die elementaren Funktionen ausdrücken lassen. Das ist jedoch möglich, wenn der Modul k^2, der ja ein positiver echter Bruch ist, einen der Grenzwerte Null oder Eins hat. Dies zeigen wir in den beiden nächsten Nummern.

449. Die Normalintegrale mit dem Modul Null. Ist $k^2 = 0$, so wird:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad w = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Zunächst ergibt sich sofort:

$$(1) \qquad u = \arcsin x,$$

wobei der Winkel im Intervalle von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ zu wählen ist. Die Integrale v und w lassen sich zwar nach der in Nr. 437 angegebenen ersten Methode berechnen, doch wollen wir hier anders vorgehen:

Weil $-\sqrt{1-x^2}$ die Ableitung $x : \sqrt{1-x^2}$ hat, gibt teilweise Integration:

$$v = \int_0^x x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \left[-x\sqrt{1-x^2}\right]_0^x + \int_0^x \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= -x\sqrt{1-x^2} + \int_0^x \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -x\sqrt{1-x^2} + u - v.$$

Bringen wir das letzte Glied links hin und dividieren wir dann durch 2, so kommt wegen (1):

$$(2) \qquad v = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x.$$

Das Integral w unterwerfen wir der Substitution

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}^3},$$

wodurch der Integrand rationalisiert wird. Da $t = 0$ für $x = 0$ ist, so kommt:

$$w = \int_0^t \frac{dt}{1+(1+n)t^2}.$$

Ist $1 + n > 0$, so setzen wir ferner $\sqrt{1+n} \cdot t = z$ und erhalten:

$$w = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \operatorname{arc\,tg} z.$$

Ist dagegen $1+n<0$ und etwa gleich $-m$, so daß $m>0$ ist, so kommt:

$$w=\int_0^t \frac{dt}{1-mt^2}=\tfrac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{1}{1+\sqrt{m}\,t}+\frac{1}{1-\sqrt{m}\,t}\right)dt=\frac{1}{2\sqrt{m}}\ln\frac{1+\sqrt{m}\,t}{1-\sqrt{m}\,t}.$$

Im Falle $1+n=0$ wird w einfach gleich t. Führen wir überall wieder die ursprüngliche Veränderliche x ein, so haben wir:

$$(3)\quad w=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+n}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x\sqrt{1+n}}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } n>-1,\\[2ex] \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } n=-1,\\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{-1-n}}\ln\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-1-n}}{\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{-1-n}} & \text{für } n<-1.\end{cases}$$

Im ersten Falle ist der Arkus auf das Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ zu beschränken. Die Wurzel aus $1+n$ bzw. $-1-n$ darf positiv angenommen werden.

450. Die Normalintegrale mit dem Modul Eins. Im Falle $k^2=1$ ist:

$$u=\int_0^x\frac{dx}{1-x^2},\quad v=\int_0^x\frac{x^2dx}{1-x^2},\quad w=\int_0^x\frac{dx}{(1+nx^2)(1-x^2)}.$$

Die Integranden sind rational, so daß die in § 1 gegebenen Methoden sofort liefern:

$$(1)\qquad u=\tfrac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

$$(2)\qquad v=\tfrac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x.$$

Ferner ist:

$$w=\frac{1}{1+n}\int_0^x\left(\frac{n}{1+nx^2}+\frac{1}{1-x^2}\right)dx=\frac{n}{1+n}\int_0^x\frac{dx}{1+nx^2}+\frac{1}{2(1+n)}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Das rechts noch vorhandene Integral wird wie das Integral w in der vorigen Nummer behandelt. Es ergibt sich auf diesem Wege:

$$(3)\quad w = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{n}}{1+n}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{n}\right) + \dfrac{1}{2(1+n)}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & \text{für } n > 0, \\ \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & \text{für } n = 0, \\ \dfrac{\sqrt{-n}}{2(1+n)}\ln\dfrac{1+x\sqrt{-n}}{1-x\sqrt{-n}} + \dfrac{1}{2(1+n)}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

Im ersten Falle ist der Arkus auf das Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ einzuschränken. Die Wurzel aus n bzw. $-n$ darf positiv angenommen werden.

§ 4. Integration transzendenter Funktionen.

451. Zurückführung transzendenter Integranden auf algebraische. Nachdem wir uns bisher in diesem Kapitel ausschließlich mit Integralen von *algebraischen* Funktionen beschäftigt haben, wollen wir in diesem Paragraphen Klassen von Integralen betrachten, deren Integranden *transzendent* sind.

Da für die Integrale der ersteren Art in den vorhergehenden Paragraphen manche Berechnungsmethoden gewonnen wurden, so wird es häufig zweckmäßig sein, Integrale von transzendenten Funktionen durch passende Substitutionen in Integrale von algebraischen Funktionen zu verwandeln. Dies ist natürlich nicht immer möglich. Es gelingt aber bei denjenigen Integralen, die wir hier übersichtlich zusammenstellen:

$$\int f(e^{mx})\,dx, \qquad \int f(\ln x)\,\frac{dx}{x},$$
$$\int f(\sin x)\,dx, \qquad \int f(\operatorname{tg} x)\,dx,$$
$$\int f(\arcsin x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int f(\operatorname{arc\,tg} x)\,\frac{dx}{1+x^2},$$

wozu sich noch einige analoge gesellen. Hierin soll überall f eine *algebraische Funktion* der bei f angegebenen Größe sein.

Vermöge der sechs Substitutionen:

$$t = e^{mx}, \quad t = \ln x, \quad t = \sin x, \quad t = \operatorname{tg} x,$$
$$t = \arcsin x, \quad t = \operatorname{arc\,tg} x,$$

die auf die einzelnen sechs Integrale auszuführen sind, werden sie augenscheinlich Integrale von algebraischen Funktionen

von t, da nämlich f eine algebraische Funktion in t wird und außerdem in den einzelnen Fällen ist:

$$dx = \frac{dt}{mt}, \quad \frac{dx}{x} = dt, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt, \quad \frac{dx}{1+x^2} = dt.$$

452. Integration goniometrischer Funktionen. Liegt insbesondere ein Integral von der Form

$$\int f(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)\, dx$$

vor, wo der Integrand eine *rationale* Funktion von $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ ist, so läßt sich der Integrand rationalisieren, indem man $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$ setzt. Denn dann ist:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t},$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

1. Beispiel: $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + \text{konst.} = \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + \text{konst.}$

2. Beispiel:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2\,dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} = \ln \frac{1+t}{1-t} + \text{konst.}$$

$$= \ln \frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x} + \text{konst.} = \ln \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi\right) + \text{konst.}$$

3. Beispiel: $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{4\,t\,dt}{1-t^4}$. Setzen wir $t^2 = z$, so kommt:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{2\,dz}{1-z^2} = \ln \frac{1+z}{1-z} + \text{konst.} = \ln \frac{1+t^2}{1-t^2} + \text{konst.}$$

$$= -\ln\left(\cos^2 \tfrac{1}{2}x - \sin^2 \tfrac{1}{2}x\right) + \text{konst.} = -\ln \cos x + \text{konst.}$$

4. Beispiel: $\int \operatorname{ctg} x\, dx$ wird vermöge der Substitution $x = \frac{1}{2}\pi - t$ auf das vorige zurückgeführt, so daß kommt:

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln \sin x + \text{konst.}$$

453. Wiederholte teilweise Integration. Es seien u und v Funktionen von x, und n bedeute eine positive ganze Zahl. Kann man alsdann $n+1$ Funktionen

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_n,\ v_{n+1}$$

finden, deren Ableitungen bzw. gleich

$$v,\ v_1 u',\ v_2 u',\ \ldots\ v_{n-1} u',\ v_n u'$$

sind, so kann man auch das Integral

$$\int u^n v\,dx$$

berechnen.

Denn nach Voraussetzung ist

$$(1)\qquad \frac{dv_1}{dx} = v,\quad \frac{dv_2}{dx} = v_1 u',\quad \cdots\quad \frac{dv_n}{dx} = v_{n-1} u',\quad \frac{dv_{n+1}}{dx} = v_n u',$$

so daß wiederholte teilweise Integration nach Satz 17, Nr. 415, gibt:

$$\int u^n v\,dx = \int u^n v_1'\,dx = u^n v_1 - n\int u^{n-1} u' v_1\,dx,$$

$$\int u^{n-1} u' v_1\,dx = \int u^{n-1} v_2'\,dx = u^{n-1} v_2 - (n-1)\int u^{n-2} u' v_2\,dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int u u' v_{n-1}\,dx = \int u v_n'\,dx = u v_n - \int u' v_n\,dx,$$

$$\int u' v_n\,dx = \int v_{n+1}'\,dx = v_{n+1} + \text{konst.}$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit

$1,\ -n,\ n(n-1),\ \cdots\ (-1)^{n-1} n(n-1)\cdots 3\cdot 2,\ (-1)^n n(n-1)\cdots 2\cdot 1$

multipliziert und dann addiert, so kommt:

$$(2)\qquad \int u^n v\,dx = u^n v_1 - n u^{n-1} v_2 + n(n-1) u^{n-2} v_3 - \cdots$$

$$+(-1)^{n-1} n(n-1)\cdots 3\cdot 2\, u v_n + (-1)^n n(n-1)\cdots 2\cdot 1\, v_{n+1} + \text{konst.}$$

Beispiel: Ist $u = \arcsin x$, $v = 1$, also $v_1 = x$, so kommt:

$$v_1 u' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d(-\sqrt{1-x^2})}{dx},\qquad \text{daher } v_2 = -\sqrt{1-x^2},$$

$$v_2 u' = -1 = \frac{d(-x)}{dx},\qquad \text{daher } v_3 = -x,$$

$$v_3 u' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d\sqrt{1-x^2}}{dx},\qquad \text{daher } v_4 = \sqrt{1-x^2}$$

usw. Aus (2) folgt also, falls n eine positive ganze Zahl ist:

$$(3)\quad \int (\arcsin x)^n dx = \text{konst.} + x[(\arcsin x)^n - n(n-1)(\arcsin x)^{n-2} + \cdots] + \sqrt{1-x^2}\,[n(\arcsin x)^{n-1} - n(n-1)(n-2)(\arcsin x)^{n-3} + \cdots].$$

Vermöge der Substitution $x = \sin z$ geht hieraus hervor:

$$(4)\quad \int z^n \cos z\, dz = \text{konst.} + \sin z[z^n - n(n-1)z^{n-2} + \cdots] + \cos z\,[nz^{n-1} - n(n-1)(n-2)z^{n-3} + \cdots].$$

Die Endglieder der in (3) und in (4) auftretenden Summen fallen verschieden aus, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

454. Auswertung reeller Integrale mit Hilfe des Imaginären. Wir haben die Integration im Bereiche der komplexen Zahlen noch nicht besprochen. Dennoch wollen wir hier an einem lehrreichen Beispiele zeigen, wie man mitunter durch Anwendung imaginärer Größen zu reellen Integralformeln gelangen kann, die sich ihrer umständlichen Form halber der direkten Berechnung leicht entziehen. Um aber völlig korrekt zu verfahren, werden wir nachträglich die Richtigkeit der gewonnenen Formeln durch direkte Differentiation prüfen und dadurch wie schon in Nr. 432 den eingeschlagenen Weg legitimieren.

In der Integralformel (1) von Nr. 418 wollen wir für $-m$ die komplexe Konstante $a + ib$ setzen. Alsdann kommt:

$$\int t^n e^{(a+ib)t} dt$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(a+ib)^{n+1}}\left[1 - \frac{(a+ib)t}{1!} + \frac{(a+ib)^2 t^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{(a+ib)^n t^n}{n!}\right] e^{(a+ib)t} + \text{konst.}$$

Nun ist nach (3) und (5) in Nr. 373:

$$e^{(a+ib)t} = e^{at} \cdot e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt).$$

Ist ϱ der absolute Betrag und α die Amplitude von $a + ib$, also $a + ib$ nach Satz 1, Nr. 355, gleich $\varrho(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, so ist nach der Moivreschen Formel in Nr. 358 für jede ganze positive Zahl k:

$$(a + ib)^k = \varrho^k (\cos k\alpha + i \sin k\alpha).$$

Also ist

$$\frac{1}{(a+ib)^{n+1}} = \frac{1}{\varrho^{n+1}} \cdot \frac{1}{\cos(n+1)\alpha + i\sin(n+1)\alpha}$$
$$= \frac{\cos[-(n+1)\alpha] + i\sin[-(n+1)\alpha]}{\varrho^{n+1}}.$$

Führen wir diese Werte in die Integralformel ein, kehren wir dabei die Reihenfolge der rechtsstehenden Summanden um und schreiben wir z statt t, so ergibt sich:

$$\int z^n e^{az} \cos bz\,dz + i\int z^n e^{az} \sin bz\,dz$$
$$= \text{konst.} + e^{az}\left\{\cos[bz-(n+1)\alpha] + i\sin[bz-(n+1)\alpha]\right\}\cdot$$
$$\cdot\left\{[\cos n\alpha + i\sin n\alpha]\frac{z^n}{\varrho} - [\cos(n-1)\alpha + i\sin(n-1)\alpha]\frac{nz^{n-1}}{\varrho^2}\right.$$
$$+ [\cos(n-2)\alpha + i\sin(n-2)\alpha]\frac{n(n-1)z^{n-2}}{\varrho^3} + \cdots\cdots$$
$$\left.+ (-1)^{n-1}[\cos\alpha + i\sin\alpha]\frac{n(n-1)\cdots 2z}{\varrho^n} + (-1)^n\frac{n!}{\varrho^{n+1}}\right\}.$$

Multiplizieren wir die beiden geschweiften Klammern aus, indem wir wiederholt von der Formel

$$(\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B) = \cos(A+B) + i\sin(A+B)$$

Gebrauch machen, und trennen wir die reellen Glieder von den rein imaginären, so ergeben sich zwei von imaginären Größen völlig freie Formeln, die wir in eine einzige zusammenfassen können:

$$(1)\qquad \int z^n e^{az} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, bz\,dz$$
$$= \text{konst.} + n!\,e^{az}\sum_0^n{}_k \frac{(-1)^k z^{n-k}}{(n-k)!\,\varrho^{k+1}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,[bz-(k+1)\alpha].$$

Hierin gilt entweder überall das Funktionszeichen cos oder überall das Zeichen sin. Außerdem haben ϱ, $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ die Bedeutungen:

$$(2)\qquad \varrho = \sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

wobei die Wurzel positiv ist.

Nachträglich beweisen wir die Richtigkeit der Formeln (1) dadurch, daß wir zeigen: Die rechte Seite von (1) gibt, nach z differenziert, in der Tat $z^n e^{az}\cos bz$ bzw. $z^n e^{az}\sin bz$.

Wenn wir die rechte Seite von (1) differenzieren, so ist zu bedenken, daß z rechts einmal vor dem Summenzeichen und zweimal unter dem Summenzeichen auftritt. Infolgedessen ergeben sich für jede der Zahlen $k = 1, 2, \ldots n$ drei mit z^{n-k} behaftete Glieder, nämlich diese:

$$\frac{n!\,e^{az}(-1)^k z^{n-k}}{(n-k)!\,\varrho^k}\left\{\frac{a}{\varrho}\,{\cos \atop \sin}[bz-(k+1)\alpha] \mp \frac{b}{\varrho}\,{\sin \atop \cos}[bz-(k+1)\alpha]\right.$$
$$\left. - {\cos \atop \sin}[bz - k\alpha]\right\},$$

wo entweder überall die oberen oder überall die unteren Zeichen gelten. Nach (2) ist der Inhalt der geschweiften Klammer gleich Null. Bei der Differentiation der rechten Seite von (2) fallen also alle mit $z^0, z^1, z^2, \ldots z^{n-1}$ behafteten Glieder fort.

Dagegen ergeben sich zwei mit z^n behaftete Glieder, nämlich

$$z^n e^{az}\left\{\frac{a}{\varrho}\,{\cos \atop \sin}(bz-\alpha) \mp \frac{b}{\varrho}\,{\sin \atop \cos}(bz-\alpha)\right\}.$$

Dies aber ist wegen (2) der Integrand. Also gibt die Differentiation der Formel (1) in der Tat eine richtige Gleichung. Damit ist die Formel verifiziert.

Wir heben hervor, daß sich aus (1) für $n = 0$ und wegen (2) die oft angewandten Formeln ergeben:

$$(3) \qquad \int e^{az}\cos bz\,dz = e^{az}\,\frac{a\cos bz + b\sin bz}{a^2+b^2} + \text{konst.},$$

$$(4) \qquad \int e^{az}\sin bz\,dz = e^{az}\,\frac{a\sin bz - b\cos bz}{a^2+b^2} + \text{konst.},$$

die man auch leicht durch teilweise Integration wie im 3. Beispiele von Nr. 416 findet.

455. Die Integrale $\int\cos(ax+b)\cos(a'x+b')\ldots dx$. Ist in $\int f(x)dx$ die Funktion $f(x)$ ein Produkt von mehreren Sinus oder Kosinus linearer ganzer Funktionen von x, so lassen sich alle Faktoren durch den Kosinus ausdrücken. Ferner läßt sich nach der bekannten Formel

$$\cos A\cos B = \tfrac{1}{2}\cos(A+B) + \tfrac{1}{2}\cos(A-B)$$

jedes Produkt von zwei solchen Kosinus in eine Summe zerlegen, in der wieder Kosinus von linearen ganzen Funktionen

von x auftreten. Wiederholte Anwendung dieser Formel zeigt also, daß schließlich jedes Integral von der Form

$$\int \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\cos(a''x+b'')\cdots dx$$

und ebenso jedes Integral, das hieraus hervorgeht, wenn die Kosinus zum Teil oder sämtlich durch Sinus ersetzt werden, in eine Summe von der Form

$$\frac{1}{2^n}\sum\int \cos(px+q)\,dx$$

verwandelt werden kann. Da

$$\int \cos(px+q)dx = \frac{\sin(px+q)}{p} + \text{konst. für } p \neq 0,$$

$$\int \cos q\,dx = \cos q \cdot x + \text{konst.}$$

ist, so läßt sich das Integral auswerten.

456. Anwendung auf $\int \cos^n x\,dx$ für ganzzahliges positives n. Nach der soeben entwickelten Methode ergibt sich

$$2\cos^2 x = \cos 2x + 1,$$
$$2^2\cos^3 x = (\cos 3x + \cos x) + 2\cos x = \cos 3x + 3\cos x,$$
$$2^3\cos^4 x = [\cos 4x + \cos 2x] + 3[\cos 2x + 1]$$
$$= \cos 4x + 4\cos 2x + 3,$$
$$2^4\cos^5 x = [\cos 5x + \cos 3x] + 4[\cos 3x + \cos x] + 6\cos x$$
$$= \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x,$$
$$2^5\cos^6 x = [\cos 6x + \cos 4x] + 5[\cos 4x + \cos 2x] + 10[\cos 2x + 1]$$
$$= \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10$$

usw. Man erkennt, daß die Koeffizienten der Kosinus rechts die Binomialkoeffizienten sind, da jeder solche Koeffizient als Summe zweier aufeinanderfolgenden Koeffizienten der vorhergehenden Formel entsteht. In den Formeln für gerade Potenzen von $\cos x$ tritt eine additive Konstante auf, die jedesmal gleich dem Koeffizienten von $\cos x$ in der vorhergehenden Formel ist Daher ist allgemein:

$$2^{2n-2}\cos^{2n-1}x = \cos(2n-1)x + \frac{2n-1}{1}\cos(2n-3)x$$
$$+\frac{(2n-1)(2n-2)}{1\cdot 2}\cos(2n-5)x+\cdots+\frac{(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\cos x,$$
$$2^{2n-1}\cos^{2n}x=\cos 2nx+\frac{2n}{1}\cos(2n-2)x+\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}\cos(2n-4)x+\cdots$$
$$+\frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\cos 2x+\frac{(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}.$$

Es bedeutet hierbei n eine positive ganze Zahl.

Integration dieser Formeln liefert nun:

$$2^{2n-2}\int\cos^{2n-1}x\,dx=\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}+\frac{2n-1}{1}\frac{\sin(2n-3)x}{2n-3}$$
$$+\frac{(2n-1)(2n-2)}{1\cdot 2}\frac{\sin(2n-5)x}{2n-5}+\cdots+\frac{(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\frac{\sin x}{1}+\text{konst.},$$
$$2^{2n-1}\int\cos^{2n}x\,dx=\frac{\sin 2nx}{2n}+\frac{2n}{1}\frac{\sin(2n-2)x}{2n-2}+\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}\frac{\sin(2n-4)x}{2n-4}+\cdots$$
$$+\frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\frac{\sin 2x}{2}+\frac{(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}x+\text{konst.}$$

Ersetzt man x durch $x+\frac{1}{2}\pi$, so ergeben sich Formeln für

$$\int\sin^{2n-1}x\,dx \quad \text{und} \quad \int\sin^{2n}x\,dx.$$

457. Berechnung von $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$. Dies Integral läßt sich, falls m und n rationale Zahlen sind, mittels der in Nr. 452 angegebenen Substitution $t=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ auf eine solche Form bringen, wo der Integrand eine algebraische Funktion wird. Insbesondere ist diese Funktion rational, wenn m und n ganze Zahlen sind.

Wir können auch die Substitution $\sin x=\sqrt{t}$ machen, wodurch sich

(1) $$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{1}{2}\int t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt$$

ergibt. Wenn wir $t=1-z^2$, d. h. $\cos x=z$ setzen, so kommt:

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=-\int(1-z^2)^{\frac{m-1}{2}}z^n\,dz,$$

und diese Umformung wird man bequem benutzen können, wenn $\frac{1}{2}(m-1)$ eine ganze Zahl, d. h. m eine ungerade Zahl und n ra-

tional ist. Denn wenn dann $n = p : q$ ist, wo p und q ganze Zahlen bedeuten, so setzt man nach Nr. 434 die Größe $\sqrt[q]{z}$ gleich einer neuen Veränderlichen.

Wenn wir dagegen in (1) die Substitution $t = z^2$ machen, also $\sin x = z$ setzen, so kommt:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dz,$$

also eine analoge Form. Sie gestattet, das Integral zu berechnen, falls n eine ungerade Zahl und m rational ist.

Setzen wir endlich $t = z^2 : (1 + z^2)$ in (1) ein, so ergibt sich:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \frac{z^m\, dz}{(1 + z^2)^{\frac{m+n+2}{2}}},$$

und diese Form gestattet die Berechnung des Integrals, falls $m + n$ eine gerade Zahl und m rational ist.

In jedem dieser drei Fälle läßt sich das Integral weiterhin durch teilweise Integration vereinfachen, ehe man die allgemeinen Methoden für die Integration rationaler Funktionen anwendet.

458. Berechnung von $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ für ganze Zahlen m und n. Statt der vorher auseinandergesetzten Methode kann man aber auch von vornherein die teilweise Integration zweckmäßig anwenden, sobald m und n ganze Zahlen bedeuten. Denn es ist

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}\right) dx,$$

so daß teilweise Integration liefert:

$$(1) \qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx.$$

Im letzten Integrale ersetzen wir einen Faktor $\sin^2 x$ durch $1 - \cos^2 x$, wodurch dies Integral in

$$\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx - \int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

übergeht, so daß in (1) rechts zum Schlusse wieder das in (1) linksstehende Integral erscheint. Bringen wir es auf die linke Seite, so erhalten wir:

$$(2)\qquad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx.$$

Ersetzen wir x durch $\frac{1}{2}\pi - x$ und also dx durch $-dx$ und vertauschen wir außerdem m mit n, so folgt:

$$(3)\qquad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx.$$

Ersetzen wir ferner n in (2) durch $n+2$ und m in (3) durch $m+2$ und bringen wir alsdann jedesmal das rechtsstehende Integral auf die linke Seite, so erhalten wir die beiden Formeln:

$$(4)\qquad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x \cos^{n+2} x\,dx,$$

$$(5)\qquad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^n x\,dx.$$

Dies sind *Rekursionsformeln*, die zur sukzessiven Vereinfachung der Integrale dienen. Die Formeln (2) und (3) sind anzuwenden, falls n bzw. m eine *positive* ganze Zahl ist, die Formeln (4) und (5), falls n bzw. m eine *negative* ganze Zahl ist. Die Formeln (2) und (3) sind unbrauchbar, wenn $m+n=0$ ist, aber die Formel (2) ist, wenn $m+n=0$ ist, durch die aus (1) folgende Formel zu ersetzen:

$$(6)\qquad \int \operatorname{tg}^m x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{m+1} x}{m+1} - \int \operatorname{tg}^{m+2} x\,dx,$$

die als Rekursionsformel dient, wenn m eine *negative* ganze Zahl ist. Wenn wir hierin m statt $m+2$ schreiben und das

[458

Integral rechts auf die linke Seite bringen, so erhalten wir die Rekursionsformel:

$$(7)\qquad \int \operatorname{tg}^m x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\,dx,$$

die anzuwenden ist, falls m eine *positive* ganze Zahl ist.

Die Formel (4) ist unbrauchbar, wenn $n = -1$ ist, die Formel (5), wenn $m = -1$ ist. Aber es ist zu bemerken, daß wiederholte Anwendung dieser Formeln die Integrale, in denen n bzw. m eine negative ganze Zahl bedeutet, auf die besonderen Integrale

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos x}\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{\cos^n x}{\sin x}\,dx$$

zurückführen, sobald n bzw. m eine ungerade Zahl ist. Auf das erste dieser beiden Integrale wenden wir, wenn m eine *positive* Zahl ist, die Formel (3) für $n = -1$ an, so daß es sich weiter reduziert, und wenn m eine *negative* ganze Zahl ist, die Formel (5) für $n = -1$. Ebenso wenden wir auf das zweite, wenn n eine *positive* ganze Zahl ist, die Formel (2) für $m = -1$ an, und wenn n eine *negative* ganze Zahl ist, die Formel (4) für $m = -1$.

Man erkennt also, daß das Integral

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

worin m und n positive oder negative ganze Zahlen sind, durch wiederholte Anwendung der Rekursionsformeln zurückgeführt werden kann auf solche Integrale von derselben Form, in denen m und n die Werte -1, 0 oder 1 haben. Es sind dies die Integrale

$$\int dx = x + \text{konst.},$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + \text{konst.}, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + \text{konst.}$$

$$\int \sin x \cos x\,dx = \tfrac{1}{4}\int \sin 2x\,d(2x) = -\tfrac{1}{4}\cos 2x + \text{konst.}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cos^2 x + \text{konst.} = \tfrac{1}{2}\sin^2 x + \text{konst.}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x + \text{konst.}, \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} (\tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{4}\pi) + \text{konst.},$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln \cos x + \text{konst.},$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln \sin x + \text{konst.},$$

wie sich nach Nr. 452 ergibt, sowie das Integral:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

In diesem machen wir die Substitution $x = \frac{1}{2} t$ und erhalten:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} t + \text{konst.} = \ln \operatorname{tg} x + \text{konst.}$$

Wir können also auf diesem Wege jedes Integral

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

in dem m und n positive oder negative ganze Zahlen sind, berechnen.

459. Die Integrale $\int \sin^m x\, dx$ und $\int \cos^m x\, dx$ für ganze positive Zahlen m. Die Formel (3) der vorigen Nummer gibt im Falle $n = 0$:

$$\int \sin^m x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x\, dx.$$

Ist m eine ganze positive Zahl, so wollen wir die Fälle unterscheiden, in denen m ungerade oder gerade ist. Ist m ungerade, gleich $2k - 1$, so kommt:

$$(1) \quad \int \sin^{2k-1} x\, dx = -\frac{1}{2k-1} \sin^{2k-2} x \cos x + \frac{2k-2}{2k-1} \int \sin^{2k-3} x\, dx;$$

ist m dagegen gleich $2k$, so kommt:

$$(2) \quad \int \sin^{2k} x\, dx = -\frac{1}{2k} \sin^{2k-1} x \cos x + \frac{2k-1}{2k} \int \sin^{2k-2} x\, dx.$$

Jede dieser Formeln ist eine Rekursionsformel.

Wenn wir in der ersten k nacheinander durch $k-1$, $k-2$, ... 2 ersetzen, so erhalten wir insgesamt $k-1$ Gleichungen, die wir bzw. mit

$$1,\quad \frac{2k-2}{2k-1},\quad \frac{(2k-2)(2k-4)}{(2k-1)(2k-3)},\quad \ldots \quad \frac{(2k-2)(2k-4)\cdots 4}{(2k-1)(2k-3)\cdots 5}$$

multiplizieren und alsdann addieren. So finden wir:

$$(3)\qquad \int \sin^{2k-1} x\, dx =$$

$$-\frac{\cos x}{2k-1}\left[\sin^{2k-2} x + \frac{2k-2}{2k-3}\sin^{2k-4} x + \frac{(2k-2)(2k-4)}{(2k-3)(2k-5)}\sin^{2k-6} x + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{(2k-2)(2k-4)\cdots 4}{(2k-3)(2k-5)\cdots 3}\sin^2 x + \frac{(2k-2)(2k-4)\cdots 4\cdot 2}{(2k-3)(2k-5)\cdots 3\cdot 1}\right] + \text{konst.}$$

Die Gleichung (2) dagegen liefert, entsprechend behandelt:

$$(4)\qquad \int \sin^{2k} x\, dx =$$

$$-\frac{\cos x}{2k}\left[\sin^{2k-1} x + \frac{2k-1}{2k-2}\sin^{2k-3} x + \frac{(2k-1)(2k-3)}{(2k-2)(2k-4)}\sin^{2k-5} x + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\sin x\right] + \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\cdot x + \text{konst.}$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen $\frac{1}{2}\pi - x$ erhält man entsprechende Formeln für die Integrale der ganzen positiven Potenzen des Kosinus. Wir erinnern daran, daß wir diese Integrale in Nr. 456 in anderer Weise dargestellt haben, nämlich als Summen, die nach goniometrischen Funktionen der Vielfachen des Winkels fortschritten, während jetzt die Summen nach Potenzen goniometrischer Funktionen fortschreiten.

460. Das Integral $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$. Da dies Integral öfters vorkommt, behandeln wir es als letztes Beispiel nach der in Nr. 452 angegebenen Methode, indem wir $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x =$ setzen, wodurch hervorgeht:

$$(1)\qquad \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \int \frac{2\,dt}{(c-b)t^2 + 2at + (c+b)}.$$

Nach § 1 ergeben sich verschiedene Behandlungsweisen je nach der Beschaffenheit der im Nenner des Integranden stehenden ganzen Funktion zweiten Grades.

Hat diese ganze Funktion zwei reelle verschiedene Nullstellen t_1 und t_2, so wird das Integral gleich

$$\frac{1}{c-b}\int\frac{2\,dt}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{2}{(c-b)(t_1-t_2)}\left[\int\frac{dt}{t-t_1} - \int\frac{dt}{t-t_2}\right]$$
$$= \frac{2}{(c-b)(t_1-t_2)}\ln\frac{t-t_1}{t-t_2}$$
$$= \frac{2}{(c-b)(t_1-t_2)}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-t_1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-t_2} + \text{konst.}$$

Es sind hierbei t_1 und t_2 die Werte

$$\left.\begin{matrix}t_1\\t_2\end{matrix}\right\} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c-b},$$

so daß sich also für $c^2 < a^2 + b^2$ ergibt:

$$(2)\quad \int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\ln\frac{a-\sqrt{a^2+b^2-c^2}-(b-c)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{a+\sqrt{a^2+b^2-c^2}-(b-c)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x} + \text{konst.}$$

Wenn zweitens die in (1) auftretende quadratische Funktion konjugiert komplexe Nullstellen $h \pm ik$ hat, so wenden wir auf das in (1) rechts stehende Integral die Formel (11) von Nr. 433 an, indem wir

$$P = 0,\quad Q = \frac{2}{c-b},\quad p = \frac{2a}{c-b},\quad q = \frac{c+b}{c-b}$$

setzen, wobei

$$h = -\tfrac{1}{2}p = -\frac{a}{c-b},\quad k = \sqrt{q-h^2} = \frac{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{c-b}$$

ist, also für die in der angegebenen Formel (11) auftretende Größe t oder $(x-h):k$, d. h. also jetzt für $(t-h):k$ der Wert

$$\frac{t-h}{k} = \frac{(c-b)t+a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} = \frac{(c-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}$$

zu setzen ist. Demnach ist für $c^2 > a^2 + b^2$:

$$(3)\quad \int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c} = \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{(c-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} + \text{konst.}$$

Hat endlich die in (1) auftretende quadratische Funktion zwei gleiche Nullstellen t_1, so wird das in (1) rechtsstehende Integral gleich

$$\frac{2}{c-b}\int\frac{dt}{(t-t_1)^2} = -\frac{2}{(c-b)(t-t_1)} + \text{konst.}$$

[460

Es ist dann $c^2 = a^2 + b^2$ und $t_1 = a : (b - c)$. Demnach ergibt sich im Falle $c^2 = a^2 + b^2$:

$$(4) \qquad \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{-2}{a + (c - b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} x} + \text{konst.}$$

Es kann ferner sein, daß sich die quadratische Funktion in (1) auf eine lineare reduziert, nämlich wenn $b = c$ ist. Alsdann wird das Integral (1) gleich

$$\frac{1}{a} \ln (at + b) + \text{konst.},$$

so daß sich ergibt:

$$(5) \qquad \int \frac{dx}{a \sin x + b(\cos x + 1)} = \frac{1}{a} \ln \left(a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x + b\right) + \text{konst.}$$

Ist außerdem $a = 0$, so wird die quadratische Funktion eine Konstante, und es kommt:

$$(6) \qquad \int \frac{dx}{\cos x + 1} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x + \text{konst.}$$

Hiermit sind alle Möglichkeiten erledigt.

461. Bemerkung über die Logarithmen, die sich beim Integrieren ergeben. Indem wir hier die Vorführung von Beispielen beenden, in denen die Integrale ausgewertet werden können, erscheint es rätlich, noch einmal auf eine Bemerkung von Nr. 402 zurückzukommen, wo wir betonten, daß die Formel:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + \text{konst.}$$

unvollständig ist, falls man sich auf den Bereich der reellen Zahlen beschränkt, da ja auch:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + \text{konst.}$$

richtig ist. Die zweite Formel geht allerdings aus der ersten hervor, wenn die darin auftretende additive Konstante durch $\ln(-1) +$ konst. ersetzt wird. Aber $\ln(-1)$ ist imaginär.

Bei den Anwendungen aller derjenigen Integralformeln, in denen sich auch logarithmische Funktionen ergeben, muß man also beachten, daß die Numeri dieser Logarithmen auch stets

mit -1 *multipliziert werden dürfen.* So z. B. ist die Formel (2) der vorigen Nummer eigentlich noch zu ergänzen durch diese:

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2} - a + (b-c)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2+b^2-c^2} + a - (b-c)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x} + \text{konst.}$$

Man wird bemerken, daß sich jene Formel (2) in diese ergänzende Formel nicht etwa einfach dadurch verwandeln läßt, daß man der Wurzel das entgegengesetzte Zeichen gibt, vielmehr nur dadurch, daß man zur additiven Konstante die *imaginäre* Konstante $\ln(-1)$ hinzufügt.

Beachtet man diesen Umstand nicht, so kann man leicht bei Anwendungen der Integralformeln ganz wesentliche Fälle übersehen.

462. Über sonstige elementar auswertbare Integrale. Außer den vorgeführten Integralen lassen sich noch manche andere mittels der elementaren Funktionen ausdrücken. Bei ihnen erkennt man häufig sofort, welche Substitutionen sich als zweckmäßig erweisen, oder ob die teilweise Integration zum Ziele führt. Z. B. wird man, um das Integral

$$\int e^{k \operatorname{arc} \sin x} dx$$

auszuwerten, sofort die Substitution $x = \sin t$ machen, wodurch das Integral auf das in Nr. 454 unter (3) berechnete zurückkommt. Andererseits liegt bei dem Integrale

$$\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{(1+x)^2} dx,$$

da $1:(1+x)^2$ der Differentialquotient von $-1:(1+x)$ ist, die Anwendung der teilweisen Integration nahe, wodurch der Integrand des noch auszuwertenden Integrals rational wird.

Allerdings gibt es viele Fälle, bei denen der einzuschlagende Weg nicht so deutlich erkennbar ist, vielmehr Kunstgriffe zum Ziele führen. Jedoch, was eigentliche Methoden betrifft, so bieten solche Integrale nichts lehrreiches, so daß wir von ihrer Behandlung füglich hier absehen können.

Auf das Verfahren, Integrale durch Entwicklung in unendliche Reihen zu berechnen, kommen wir später zurück. In Nr. 446 haben wir übrigens schon zwei derartige Beispiele vorgeführt.

Drittes Kapitel.

Theorie der bestimmten Integrale.

§ 1. Grenzwerte bestimmter Integrale.

463. Das Ziel der folgenden Betrachtungen. Wenn $f(x)$ eine im Intervalle von A bis B stetige Funktion von x bedeutet und x_0 und X irgend zwei Werte innerhalb dieses Intervalles sind, so ist das Integral

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

nach Satz 6, Nr. 410, eine stetige und differenzierbare Funktion der oberen Grenze X. Da ferner nach Satz 8, Nr. 412 das von X bis x_0 erstreckte Integral

$$\int_{X}^{x_0} f(x)\,dx$$

den entgegengesetzten Wert hat, so ist das Integral (1) auch eine stetige und differenzierbare Funktion der unteren Grenze x_0.

Wir können also sagen, daß das Integral (1) eine stetige und differenzierbare Funktion der oberen oder unteren Grenze ist, je nachdem man die obere oder untere Grenze als veränderlich auffaßt, und zwar ist der Variabilitätsbereich derselbe wie der Variabilitätsbereich des Integranden $f(x)$.

Alle Integralformeln des zweiten Kapitels gelten zunächst nur unter der Voraussetzung, daß man die Veränderliche auf einen solchen Bereich beschränkt hat, innerhalb dessen der jeweilige Integrand stetig ist.

Bei den grundlegenden Untersuchungen in § 2 des 1. Kapitels haben wir ferner das Intervall von x_0 bis X stets als ein *endliches* Intervall vorausgesetzt.

Es ist hiernach klar, daß wir nunmehr *zweierlei* zu erwägen haben, nämlich *erstens, ob wir imstande sind, das Intervall bis ins Unendliche auszudehnen, und zweitens, ob wir imstande sind, das Intervall auch über Stellen hinweg auszudehnen, wo der Integrand $f(x)$ unstetig wird.* Die Erörterung dieser beiden Fragen ist der Gegenstand des gegenwärtigen Paragraphen.

464. Grenzwert eines Integrals mit der oberen Grenze $+\infty$. Wir nehmen an, daß die Funktion $f(x)$ für *jedes* endliche $x \geqq x_0$ stetig sei. Alsdann ist das Integral

$$J = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

nach Satz 6, Nr. 410, für *jedes* endliche $X \geqq x_0$ eine stetige und differenzierbare Funktion von X. Nach der in Nr. 18 gegebenen Definition des Grenzwertes folgt nun:

Das Integral J hat für $\lim X = +\infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwert S, wenn es stets, wie klein auch eine vorgegebene positive Zahl σ sein mag, eine positive Zahl n derart gibt, daß der Wert des Integrals J für jedes $X \geqq n$ von S um weniger als σ abweicht:

$$(1) \qquad \left| \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx - S \right| < \sigma.$$

Ist dies der Fall, so sagen wir, daß das Integral für $\lim X = +\infty$ *konvergent* sei. Andernfalls heißt es *divergent*. Ist es konvergent, so benutzen wir statt der umständlichen Schreibweise

$$\lim_{X=+\infty} \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = S$$

die einfachere:

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx = S.$$

Es ist vielleicht nicht überflüssig, nochmals daran zu erinnern, daß wir nach Nr. 19 unter Zahlen oder Buchstaben stets *endliche* Größen verstehen. Wenn wir also in der obigen Definition gesagt haben, daß $X \geqq n$ gewählt werden soll, so bedeutet dies, daß für X jede beliebige *endliche* Zahl $\geqq n$ genommen werden soll.

Daß wir ein Integral J mit bestimmtem endlichen Grenzwerte S *konvergent* nennen, hat seinen Grund darin, daß jedes Integral nach Nr. 410 als Grenzwert einer Summe, d. h. also als eine Summe von unendlich vielen Gliedern aufzufassen ist, so daß wir wie bei den unendlichen Reihen (vgl. Nr. 101) von Konvergenz oder Divergenz sprechen können. Eigentlich sind auch die Untersuchungen in § 2 des 1. Kapitels Konvergenzbetrachtungen.

1. Beispiel: Da e^{-x} für jedes x stetig ist, so ist

$$J = \int_{x_0}^{X} e^{-x} dx = e^{-x_0} - e^{-X}$$

eine stetige Funktion von X für jeden Wert von X. Für $\lim X = +\infty$ ist $\lim e^{-X} = 0$, also $\lim J = e^{-x_0}$. Daher ist J konvergent für $X = +\infty$ und hat den Grenzwert $S = e^{-x_0}$, so daß wir schreiben:

$$\int_{x_0}^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-x_0}.$$

2. Beispiel: Da $1 : (1 + x^2)$ für jedes x stetig ist, so ist für jedes X:

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} X - \operatorname{arc\,tg} x_0,$$

wenn die beiden Arkus in demselben Intervalle von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ angenommen werden. Für $\lim X = +\infty$ ist $\lim \operatorname{arc\,tg} X = \frac{1}{2}\pi$, d. h. es ist:

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tg} x_0.$$

3. Beispiel: Es seien K und k ebenso wie x_0 und X *positive* Zahlen. Alsdann ist:

$$\int_{x_0}^{X} \frac{K}{x^k} dx = \frac{K}{1-k}\left(\frac{1}{X^{k-1}} - \frac{1}{x_0^{\,k-1}}\right),$$

sobald $k \neq 1$ ist, dagegen für $k = 1$:

$$\int_{x_0}^{X} \frac{K}{x} dx = K \ln \frac{X}{x_0}.$$

Hieraus folgt im Falle $k > 1$:

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{K}{x^k} dx = \frac{K}{(k-1)x_0^{\,k-1}},$$

dagegen im Falle $0 < k \leqq 1$:

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{K}{x^k} dx = +\infty.$$

4. Beispiel: Für jedes X ist:

$$\int_{x_0}^{X} e^x dx = e^X - e^{x_0},$$

woraus folgt:

$$\int_{x_0}^{+\infty} e^x dx = +\infty.$$

5. Beispiel: Für jedes X ist:

$$\int_{0}^{X} \cos x \, dx = \sin X.$$

Nun hat aber $\sin X$ für $\lim X = +\infty$ *keinen* bestimmten endlichen Grenzwert, also hat auch

$$\int_{0}^{+\infty} \cos x \, dx$$

keinen bestimmten endlichen Wert.

465. Kennzeichen der Konvergenz eines Integrals mit der oberen Grenze $+\infty$. In den Beispielen war die Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz des Integrals leicht, weil wir das Integral für endliche Werte der oberen Grenze X jedesmal auszuwerten imstande waren. Ist dies jedoch bei einem vorgelegten Integrale nicht möglich, so können wir die in voriger Nummer gegebene Definition der Konvergenz nicht anwenden, weil in ihr der Grenzwert S selbst auftritt, der ja von vornherein nicht bekannt ist. Wir sehen uns also genötigt, die Definition der Konvergenz so umzuformen, daß sie frei wird von dem noch unbekannten Grenzwerte S.

Eine ähnliche Aufgabe haben wir bei den unendlichen Reihen erledigt, indem wir die in Nr. 101 gegebene Definition ihrer Konvergenz, in der die noch zu berechnende Summe S der Reihe auftrat, in Nr. 102 so umformten, daß sie von S frei wurde. Wir werden nun auch ganz entsprechend wie damals in Nr. 102 vorgehen:

Wenn das Integral J für $\lim X = +\infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwert S hat, so muß es nach Nr. 464 zu jeder beliebig kleinen vorgegebenen positiven Zahl σ eine positive Zahl n derart geben, daß für jede obere Grenze, die größer oder gleich n ist, der Wert des Integrals von S um weniger als σ abweicht Wählen wir also $m > n$, so muß

$$\left|\int_{x_0}^{m} f(x)\,dx - S\right| < \sigma$$

sein, und dasselbe muß für $m = n$ gelten:

$$\left|\int_{x_0}^{n} f(x)\,dx - S\right| < \sigma.$$

Nach Satz 2 in Nr. 4 ist nun:

$$\left|\int_{x_0}^{m} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{n} f(x)\,dx\right| = \left|\left[\int_{x_0}^{m} f(x)\,dx - S\right] - \left[\int_{x_0}^{n} f(x)\,dx - S\right]\right|$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{m} f(x)\,dx - S\right| + \left|\int_{x_0}^{n} f(x)\,dx - S\right|.$$

Die links zwischen den Strichen stehende Differenz ist nach Satz 9, Nr. 412, gleich dem von n bis m erstreckten Integrale, während jeder der beiden Summanden rechts nach dem Vorhergehenden kleiner als σ ist. Demnach folgt, wenn $2\sigma = \tau$ gesetzt wird:

$$(1) \qquad \left|\int_n^m f(x)\,dx\right| < \tau \qquad \text{für jedes } m > n.$$

Dies Ergebnis ist der Formel (1) in Nr. 102 analog. Wie damals wollen wir auch jetzt *die Betrachtung umkehren*, also nicht mehr voraussetzen, daß das Integral J für $\lim X = +\infty$ konvergiere, sondern annehmen: Zu jeder beliebig kleinen vorgegebenen positiven Zahl τ gebe es einen positiven Wert n derart, daß für jedes $m > n$ die Ungleichung (1) besteht. Wir wollen alsdann beweisen, daß das Integral J für $\lim X = +\infty$ konvergiert.

Wie in Nr. 102 bezeichne

$$\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \cdots > \tau_i > \cdots$$

irgend eine solche unbegrenzte Folge von abnehmenden positiven Zahlen, die nach Null strebt (wie z. B. $1, 1/2, 1/3 \ldots$). Es seien ferner $n_1, n_2, n_3, \ldots n_i \ldots$ solche zu diesen positiven Zahlen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \tau_i \ldots$ gehörige positive Werte von n, für die nach Voraussetzung die Ungleichung (1) gilt, so daß allgemein:

$$-\tau_i < \int_{n_i}^m f(x)\,dx < \tau_i \qquad \text{für } m > n_i$$

ist. Addieren wir hier überall das von x_0 bis n_i erstreckte Integral, so ergibt sich nach Satz 9 von Nr. 412:

$$\int_{x_0}^{n_i} f(x)\,dx - \tau_i < \int_{x_0}^m f(x)\,dx < \int_{x_0}^{n_i} f(x)\,dx + \tau_i \qquad \text{für } m > n_i.$$

Solche Ungleichungen gehen für $i = 1, 2, 3, \ldots$ in beliebiger Anzahl hervor. Sie sind genau so gebaut wie die Ungleichungen (3) in Nr. 102, ja sogar dieselben, wenn wir die Bezeichnungen:

$$S_{n_i} = \int_{x_0}^{n_i} f(x)\,dx, \qquad S_m = \int_{x_0}^m f(x)\,dx$$

einführen. Also folgt gerade so wie dort, daß $\lim S_m$ für $\lim m = +\infty$ einen bestimmten endlichen Wert S hat. Somit geht der folgende Satz hervor, der dem Satze 2 von Nr. 102 entspricht:

Satz 1: Ist $f(x)$ eine für $x \geqq x_0$ überall stetige Funktion von x, so konvergiert das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

dann und nur dann, wenn es stets, sobald eine beliebig kleine positive Zahl τ vorgeschrieben wird, eine positive Zahl n derart gibt, daß für jedes $m > n$ ist:

$$\left|\int_n^m f(x)\,dx\right| < \tau.$$

Vgl. Satz 20, Nr. 419, für Integrale mit endlichem Intervalle.

466. Hilfsmittel zur Feststellung der Konvergenz oder Divergenz eines Integrals mit der oberen Grenze $+\infty$. Die Analogie mit den unendlichen Reihen läßt sich weiter verfolgen. Wie in Nr. 105 bemerken wir, daß das soeben gewonnene notwendige und hinreichende Merkmal der Konvergenz meistens nicht direkt anwendbar ist, da man den absoluten Betrag des Wertes des von n bis m erstreckten Integrals nur in seltenen Fällen abzuschätzen vermag. Vielmehr wird man andere Integrale, deren Konvergenz oder Divergenz schon bekannt ist, zur Vergleichung heranziehen auf Grund eines Satzes, der das Analogon zum Satze 10 in Nr. 105 ist und so lautet:

Satz 2: Wenn zwei Integrale

$$\int_a^{+\infty} u(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_b^{+\infty} v(x)\,dx$$

vorliegen und $u(x)$ für jedes $x \geqq a$, $v(x)$ für jedes $x \geqq b$ stetig ist, so ist das erste Integral konvergent, sobald das zweite konvergiert und es eine positive Zahl α derart gibt, daß für jedes $x \geqq \alpha$ sowohl $v(x) \geqq 0$ als auch $|u(x)| \leqq v(x)$ ist. — Dagegen

ist das erste Integral divergent und zwar gleich $\begin{Bmatrix}+\infty\\-\infty\end{Bmatrix}$, *sobald das zweite nach* $+\infty$ *divergiert und es eine positive Zahl* α *derart gibt, daß für jedes* $x \geqq \alpha$ *sowohl* $v(x) \geqq 0$ *als auch* $u(x)$ $\begin{Bmatrix}\textit{positiv}\\\textit{negativ}\end{Bmatrix}$ *und überdies* $|u(x)| \geqq v(x)$ *ist.*

Indem wir zum Beweise zunächst die Voraussetzungen des ersten Teiles dieses Satzes machen, entnehmen wir aus Satz 1, Nr. 465, daß es, wie klein auch eine vorgegebene positive Zahl τ sein mag, eine positive Zahl n derart gibt, daß für jedes $m > n$

$$\int_n^m v(x)\,dx < \tau$$

ist. Hier sind nämlich die Zeichen für den absoluten Betrag nicht nötig, da wir $n > \alpha$ annehmen können und $v(x)$ dann nach Voraussetzung positiv ist, mithin auch das Integral (nach Satz 12, Nr. 412). Aus Satz 16, Nr. 414, und Satz 14, Nr. 413, folgt nun sofort:

$$\left|\int_n^m u(x)\,dx\right| \leqq \int_n^m |u(x)|\,dx \leqq \int_n^m v(x)\,dx < \tau,$$

womit die Konvergenz des ersten Integrals nach Satz 1, Nr. 465, bewiesen ist.

Dem Beweise des zweiten Teiles unseres Satzes schicken wir die Bemerkung voraus, daß wir uns nur um die von der *unteren Grenze* α an bis $+\infty$ erstreckten Integrale zu kümmern brauchen, da ja nach Satz 9, Nr. 412, sobald $a < \alpha$, $b < \alpha$ und $X > \alpha$ ist, auch

$$\int_a^X u\,dx = \int_a^\alpha u\,dx + \int_\alpha^X u\,dx, \quad \int_b^X v\,dx = \int_b^\alpha v\,dx + \int_\alpha^X v\,dx$$

ist und die von a bis α bzw. von b bis α erstreckten Integrale beim Grenzübergange zu $\lim X = +\infty$ unverändert bleiben. Nach den Voraussetzungen des zweiten Teiles unseres Satzes 2 ist $u(x)$ für $x \geqq \alpha$ stets positiv oder stets negativ. Weil nun

$$\int_\alpha^X u(x)\,dx = -\int_\alpha^X -u(x)\,dx$$

ist, so brauchen wir den Beweis nur für die erste Annahme, nämlich für $u(x) > 0$, zu führen, so daß nach den Voraussetzungen des Satzes $u(x) \geqq v(x)$ für $x \geqq \alpha$ ist. Nach Satz 14, Nr. 413, ist also für $X > \alpha$:

$$\int_{\alpha}^{X} u(x)\,dx \geqq \int_{\alpha}^{X} v(x)\,dx.$$

Beim Grenzübergange zu $\lim X = +\infty$ wird das zweite Integral gleich $+\infty$, demnach auch das erste. Hiermit ist der Beweis beendet.

Nach Satz 2 stellen wir die Konvergenz oder Divergenz eines Integrals durch Vergleichung mit einem anderen Integrale fest. Indem wir dies zweite Integral, das über $v(x)$ erstreckte, in bestimmter Weise wählen, werden wir speziellere Sätze gewinnen.

Wir wollen insbesondere

$$v(x) = \frac{K}{x^k}$$

setzen. Hierbei sollen K und k positive und insbesondere von Null verschiedene Konstanten sein, so daß $v(x)$ für $x > 0$ stetig und positiv ist. Nach dem 3. Beispiele in Nr. 464 ist alsdann das zweite in Satz 2 auftretende Vergleichungsintegral für $k > 1$ konvergent, während es für $k \leqq 1$ den Grenzwert $+\infty$ hat. Wenn wir also in dem Satze $v(x)$ den angegebenen Wert erteilen und $u(x)$ nunmehr wie gebräuchlich mit $f(x)$ bezeichnen, so geht sofort der Satz hervor:

Satz 3: Ist $f(x)$ für jedes $x \geqq x_0$ stetig, so konvergiert das Integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

sobald es zwei positive Zahlen α und K und eine Zahl $k > 1$ derart gibt, daß $|x^k f(x)| \leqq K$ für jedes $x \geqq \alpha$ ist. — Es hat dagegen den Grenzwert $\begin{Bmatrix} +\infty \\ -\infty \end{Bmatrix}$, sobald es zwei positive Zahlen α und K und eine positive Zahl $k \leqq 1$ derart gibt, daß für jedes $x \geqq \alpha$ erstens $f(x)$ $\begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ und zweitens $|x^k f(x)| \geqq K$ ist.

Dieser Satz ist ein Analogon zum Satze 11 oder 12 in Nr. 105 über unendliche Reihen. Wie wir jenen Sätzen in Satz 13 und 14 ebenda noch speziellere Formen gaben, können wir es jetzt auch mit dem Satze 3 tun. Wir wollen nämlich jetzt insbesondere annehmen, *daß $f(x)$ für lim $x = +\infty$ mit $1 : x$ in einer bestimmten Ordnung verschwinde*, vgl. Nr. 127. Die Ordnungszahl sei k, d. h. es habe $|x^k f(x)|$ für lim $x = +\infty$ einen bestimmten endlichen positiven und *von Null verschiedenen Grenzwert A.* Dies bedeutet: Ist eine beliebig kleine positive Zahl τ vorgegeben, so gibt es eine positive Zahl α derart, daß $|x^k f(x)|$ für jedes $x \geqq \alpha$ zwischen $A - \tau$ und $A + \tau$ liegt. Ist nun $k > 1$, so wählen wir $K = A + \tau$, ist $k \leqq 1$, so wählen wir $K = A - \tau$ und wenden den letzten Satz an. So kommt:

Satz 4: Ist $f(x)$ für jedes $x \geqq x_0$ stetig, so konvergiert das Integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

sobald $f(x)$ für lim $x = +\infty$ in höherer als erster Ordnung mit $1 : x$ verschwindet. — Es hat dagegen den Grenzwert $\begin{Bmatrix} +\infty \\ -\infty \end{Bmatrix}$, sobald $f(x)$ für lim $x = +\infty$ in niederer als erster oder gerade in erster Ordnung mit $1 : x$ verschwindet und $f(x)$ von einem gewissen Werte α an für jedes $x \geqq \alpha$ beständig $\begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ ist.

Wenn übrigens $f(x)$ für lim $x = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ hat, so erkennt man sofort aus Satz 1, Nr. 465, die Divergenz des Integrals. Dasselbe gilt, wenn $f(x)$ für lim $x = +\infty$ einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert hat. Also fügen wir hinzu:

Satz 5: Ist $f(x)$ für jedes $x \geqq x_0$ stetig, so ist das Integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

gewiß nicht konvergent, wenn $f(x)$ für lim $x = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ oder einen endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert hat.

[466

467. Integrale, deren Grenzen irgendwie nach Unendlich streben. Wir wollen jetzt annehmen, daß $f(x)$ für jedes $x \leqq x_0$ stetig sei, und $X < x_0$ wählen. Alsdann soll untersucht werden, ob das Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

für $\lim X = -\infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat. Wir machen die Substitution $x = -t$, $dx = -dt$ und finden:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = -\int_{-x_0}^{-X} f(-t)\,dt.$$

Also ist der fragliche Grenzwert durch die Formel

$$\int_{x_0}^{-\infty} f(x)\,dx = -\int_{-x_0}^{+\infty} f(-t)\,dt$$

zu definieren und dadurch auf den bisher betrachteten Grenzwert eines Integrals mit der oberen Grenze $+\infty$ zurückgeführt. Da der Wert des rechts stehenden Integrals unabhängig von der Bezeichnung der Veränderlichen des Integranden ist, so folgt:

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{-\infty} f(x)\,dx = -\int_{-x_0}^{+\infty} f(-x)\,dx.$$

Soll die *untere* Grenze eines Integrals nach $+\infty$ oder $-\infty$ streben, so läßt sich die Untersuchung leicht auf die bisher betrachteten Fälle zurückführen. Nach Satz 8, Nr. 412, ist ja

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = -\int_{X}^{x_0} f(x)\,dx,$$

woraus sofort beim Grenzübergange zu $\lim x_0 = \pm\infty$ folgt:

$$(2) \qquad \int_{\pm\infty}^{X} f(x)\,dx = -\int_{X}^{\pm\infty} f(x)\,dx.$$

Schließlich ist es denkbar, daß beide Integralgrenzen nach Unendlich streben, z. B. die obere Grenze X nach $+\infty$ und die untere Grenze x_0 nach $-\infty$. Hier verfahren wir so: Es sei a

irgend ein zwischen x_0 und X gelegener Wert. Dann ist nach Satz 9, Nr. 412:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{X} f(x)dx.$$

Beim Grenzübergange folgt also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx. \tag{3}$$

Hierdurch ist der gesuchte Grenzwert auf solche zurückgeführt, die wir schon vorher betrachtet haben.

Wir sagen in allen soeben besprochenen Fällen, daß das fragliche Integral *konvergiert* oder *divergiert*, sobald der Grenzwert bestimmt und endlich ist oder nicht. Im Falle (3) ist noch zu bemerken: Das links stehende Integral heißt nur dann konvergent, wenn *jedes* der beiden rechts stehenden Integrale konvergiert.

Es ist auch leicht einzusehen, daß die Definition (3) des Grenzwertes von dem gewählten Zwischenwerte a unabhängig ist. Denn wenn b irgend ein anderer Zwischenwert ist, so folgern wir aus Satz 9, Nr. 412:

$$\int_{x_0}^{a} f(x)dx = \int_{x_0}^{b} f(x)dx - \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{a}^{X} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{X} f(x)dx,$$

woraus sich für $\lim x_0 = -\infty$, $\lim X = +\infty$ ergibt:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx.$$

Addieren wir beide Formeln, so kommt:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx.$$

[467

Dies aber besagt, daß der Zwischenwert a durch einen anderen Zwischenwert b ersetzbar ist. Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß wir natürlich bei der Betrachtung des Grenzwertes (3) vorausgesetzt haben, daß $f(x)$ für *alle* Werte von x stetig sei, ebenso wie wir bei der Betrachtung des Grenzwertes (2) stillschweigend annahmen, daß $f(x)$ für jedes $x \geqq X$ bzw. $x \leqq X$ stetig sei, je nachdem in (2) die untere Grenze $+\infty$ oder $-\infty$ sein soll.

Unser Ergebnis ist:

Satz 6: Die Definition in Nr. 464 und die Sätze 1—5 von Nr. 465 und Nr. 466 lassen sich sinngemäß auf solche Integrale übertragen, deren Grenzen irgendwie nach Unendlich streben, indem sich jedes solche Integral auf Integrale mit der oberen Grenze $+\infty$ *zurückführen läßt.*

Wenn die Funktion $f(x)$ insbesondere eine sogenannte *gerade Funktion* ist, d. h. eine Funktion, der dieselbe Eigenschaft $f(x) = f(-x)$ wie jeder geraden Potenz $x^2, x^4, \ldots$ zukommt, so folgt aus (2) für $X = 0$ und wegen (1) für $x_0 = 0$:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{-\infty} f(x)\,dx = +\int\limits_{0}^{+\infty} f(-x)\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

so daß aus (3) bei der Annahme $a = 0$ hervorgeht der

Satz 7: Ist $f(x)$ *eine gerade Funktion von* x *und ist das über* $f(x)$ *von* 0 *bis* $+\infty$ *erstreckte Integral konvergent, so ist:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

468. Beispiele.

1. Beispiel: Es ist e^{-x^2} eine gerade Funktion. Für $k > 1$ und $\lim x = +\infty$ ist nach dem 4. Beispiele in Nr. 131 der Grenzwert von $x^k e^{-x^2}$ gleich Null. Nach Satz 7 und nach Satz 3 in Nr. 466 ist daher das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

konvergent.

2. Beispiel: Ist $f(x)$ für jedes x stetig und $|f(x)|$ stets kleiner als eine gewisse positive Zahl a, so hat auch $x^k f(x) e^{-x^2}$ für $\lim x = +\infty$ und für $\lim x = -\infty$ den Grenzwert Null. Daher sind *alle* Integrale über $f(x)e^{-x^2}$ konvergent, z. B. die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, e^{-x^2} dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \, e^{-x^2} dx,$$

von denen das erste wegen $\sin(-x) = -\sin x$ nach Formel (3) von Nr. 467 (für $a = 0$) gleich Null und das zweite wegen $\cos(-x) = \cos x$ nach Satz 7 das Doppelte des Integrals von 0 bis $+\infty$ ist.

3. Beispiel: Aus dem 2. Beispiele in Nr. 464 folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

4. Beispiel: Sind die beiden ganzen rationalen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ relativ prim (vgl. Nr. 379) und ist x_0 größer als die größte reelle Nullstelle von $f(x)$, so ist die gebrochene Funktion $F(x):f(x)$ für $x \geqq x_0$ stetig. Sie hat für $\lim x = +\infty$ einen Grenzwert $\pm\infty$, wenn der Zähler von höherem Grade als der Nenner ist, dagegen einen von Null verschiedenen endlichen Grenzwert, wenn der Zähler von demselben Grade wie der Nenner ist, und den Grenzwert Null, wenn der Zähler von niederem Grade als der Nenner ist. Nach Satz 4 und 5 von Nr. 466 ist also das Integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{F(x)}{f(x)} dx$$

nur dann konvergent, wenn der Grad des Zählers $F(x)$ um mindestens *zwei* Einheiten kleiner als der des Nenners $f(x)$ ist. Bedeutet x_0 andererseits eine Zahl kleiner als die kleinste reelle Nullstelle von $f(x)$, so ist $F(x):f(x)$ für jedes $x \leqq x_0$ stetig, und es folgt ebenso, daß

$$\int_{x_0}^{-\infty} \frac{F(x)}{f(x)} dx$$

dann und nur dann konvergiert, wenn der Grad von $F(x)$ um mindestens *zwei* Einheiten kleiner als der von $f(x)$ ist.

Hat $f(x)$ nur imaginäre Nullstellen, so schließen wir, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$$

ebenfalls unter denselben Umständen konvergiert. Ein spezieller Fall hiervon wurde im 3. Beispiele behandelt.

469. Integrale, bei denen die Konvergenzmerkmale versagen. Daß die Konvergenzmerkmale in den Sätzen von Nr. 466 nicht stets ausreichen, erläutern wir an den beiden Beispielen:

$$(1) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx.$$

Beim ersten ist anzumerken, daß $\sin x : x$ auch für $x = 0$ stetig ist und nach Nr. 26 den Wert Eins hat. Die Integranden wechseln, wie groß auch x gewählt sein mag, immer noch bei weiterem Wachsen von x das Vorzeichen. Daß die Integrale konvergieren, beweisen wir daher auf anderem Wege: Ist zunächst die obere Integralgrenze endlich, gleich $X > 0$ gewählt, so gibt es eine ganze positive Zahl n derart, daß X zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$ liegt, und ebenso eine ganze positive Zahl m derart, daß X zwischen $\sqrt{m\pi}$ und $\sqrt{(m+1)\pi}$ liegt, wobei die Wurzeln natürlich positiv sein sollen. Daher ist:

$$(2) \begin{cases} \displaystyle\int_0^X \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{n\pi}^{X} \frac{\sin x}{x}\,dx, \\ \displaystyle\int_0^X \sin(x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,dx + \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)\,dx + \cdots + \int_{\sqrt{(m-1)\pi}}^{\sqrt{m\pi}} \sin(x^2)\,dx + \int_{\sqrt{m\pi}}^{X} \sin(x^2)\,dx. \end{cases}$$

Nach Satz 7, Nr. 411, zeigt schon die graphische Darstellung in Fig. 12 und 13, daß die Summanden rechts abwechselnd positiv und negativ sind und ihre absoluten Beträge beständig abnehmen. Um dies auch rechnerisch zu beweisen, machen

wir in den $(k+1)^{\text{ten}}$ Summanden die Substitution $x = \pi + t$ bzw. $x = \sqrt{\pi + t^2}$ und erhalten:

$$\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t}{\pi + t}\, dt,$$

$$\int\limits_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin(x^2)\, dx = -\int\limits_{\sqrt{(k-1)\pi}}^{\sqrt{k\pi}} \sin(t^2) \frac{t}{\sqrt{\pi + t^2}}\, dt.$$

Fig. 12.

Alle Wurzeln sind positiv. Da $t : (\pi + t)$ und $t : \sqrt{\pi + t^2}$ positiv sind, so lehrt der Mittelwertsatz 22, Nr. 420, daß es einen

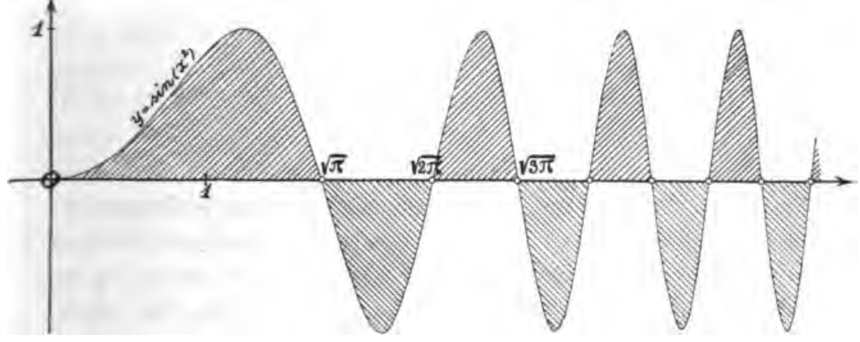


Fig. 13.

Wert t_1 im Intervalle von $(k-1)\pi$ bis $k\pi$ und einen Wert t_2 im Intervalle von $\sqrt{(k-1)\pi}$ bis $\sqrt{k\pi}$ derart gibt, daß

$$\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\frac{t_1}{\pi + t_1} \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

$$\int\limits_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin(x^2)\, dx = -\frac{t_2}{\sqrt{\pi + t_2^2}} \int\limits_{\sqrt{(k-1)\pi}}^{\sqrt{k\pi}} \sin(t^2)\, dt$$

ist. Die Integrale rechts sind nun die k^{ten} Summanden der Entwicklungen (2), denn wir dürfen in ihnen t mit x bezeichnen.

[469

Weil $t_1 : (\pi + t_1)$ und $t_2 : \sqrt{\pi + t_2^2}$ kleiner als Eins sind, nehmen also in der Tat die absoluten Beträge der Glieder der Entwicklungen (2) beständig ab, während die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

Die Substitution $x = (n-1)\pi + t$ bzw. $x = \sqrt{(m-1)\pi + t^2}$ im n^{ten} bzw. m^{ten} Summanden der Entwicklungen (2) ergibt ferner:

$$\int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = (-1)^{n-1} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{(n-1)\pi + t}\, dt,$$

$$\int\limits_{\sqrt{(m-1)\pi}}^{\sqrt{m\pi}} \sin(x^2)\, dx = (-1)^{m-1} \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2) \cdot \frac{t}{\sqrt{(m-1)\pi + t^2}}\, dt.$$

Da $\sin t$ und $\sin(t^2)$ im Intervalle von 0 bis π positiv und höchstens gleich Eins sind, so sind mithin die absoluten Beträge dieses n^{ten} bzw. m^{ten} Summanden der Entwicklungen (2) nach Satz 14, Nr. 413, nicht größer als

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{(n-1)\pi + t} = \ln \frac{n}{n-1} \quad \text{bzw.} \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \frac{t\,dt}{\sqrt{(m-1)\pi + t^2}} = \sqrt{m\pi} - \sqrt{(m-1)\pi},$$

und diese Werte streben für $\lim n = +\infty$ bzw. $\lim m = +\infty$ nach Null. Die ersten n bezw. m Summanden der Entwicklungen (2) sind also abwechselnd positiv und negativ, ihre absoluten Beträge nehmen beständig ab, und für $\lim n = +\infty$ bzw. $\lim m = +\infty$ haben sie die Grenzwerte Null. Nach Satz 9, Nr. 104, bilden sie daher für $\lim n = +\infty$ bzw. $\lim m = +\infty$ *konvergente* unendliche Reihen. Die letzten Glieder der Entwicklungen (2) sind, da X zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$ bzw. zwischen $\sqrt{m\pi}$ und $\sqrt{(m+1)\pi}$ liegt, Bruchteile ebensolcher nach Null strebender Summanden. Folglich ergeben sich für $\lim X = +\infty$ die konvergenten unendlichen Reihen:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \cdots + \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \cdots,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\, dx + \int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)\, dx + \cdots + \int\limits_{\sqrt{(m-1)\pi}}^{\sqrt{m\pi}} \sin(x^2)\, dx + \cdots.$$

470. Grenzwert eines Integrals, dessen Integrand an der oberen Grenze unstetig ist. Wir gehen jetzt zu dem zweiten in Nr. 463 angekündigten Probleme über. Es sei nämlich $f(x)$ eine solche Funktion von x, die für alle Werte von x in einem *endlichen* Intervalle $x_0 \leqq x < X$ stetig ist, *jedoch für* $x = X$ *unstetig wird.* Bedeutet x_1 eine Zahl im Intervalle, die *kleiner* als X ist, so ist das Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

nach Satz 6, Nr. 410, wohldefiniert. Es fragt sich, ob es für $\lim x_1 = X$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat. Nach Nr. 18 ist zu definieren:



Fig. 14.

Das Integral J hat für $\lim x_1 = X$ einen bestimmten endlichen Grenzwert S, wenn es stets, wie klein auch eine vorgegebene positive Zahl σ sein mag, einen Wert n im Intervalle $x_0 \leqq n < X$ derart gibt, daß für jede obere Grenze m im Intervalle $n \leqq m < X$ der Wert des von x_0 bis m erstreckten Integrals von S um weniger als σ abweicht:

$$(1) \qquad \left| \int_{x_0}^{m} f(x)\,dx - S \right| < \sigma.$$

Ist dies der Fall, so sagt man, daß das von x_0 bis X erstreckte Integral *konvergiert*, und bezeichnet es mit

$$S = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Andernfalls heißt es *divergent.* Zur Verdeutlichung der Lage der Werte x_0, n, m, X fügen wir die Fig. 14 hinzu.

Ist das Integral konvergent, so muß (1) auch für $m = n$ gelten, so daß auch

$$\left| \int_{x_0}^{n} f(x)\,dx - S \right| < \sigma$$

ist. Hieraus und aus (1) folgt wie in Nr. 465, wenn $2\sigma = \tau$ gesetzt wird:

$$(2) \qquad \left|\int_n^m f(x)\,dx\right| < \tau.$$

Wie in Nr. 465 kehren wir jetzt die Betrachtung um. Wir setzen also nicht mehr voraus, daß das von x_0 bis X erstreckte Integral konvergiere, sondern daß es zu jeder beliebig kleinen vorgegebenen positiven Zahl τ eine Zahl n im Intervalle $x_0 \leqq n < X$ derart gebe, daß für jedes m im Intervalle $n < m < X$ die Ungleichung (2) erfüllt ist. Es soll also darin wohlbemerkt $m < X$ und nicht gleich X sein.

Bedeutet $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ wie in Nr. 465 eine abnehmende und nach Null strebende Folge von positiven Zahlen, die wir in (2) nacheinander für τ wählen, und sind $n_1, n_2, n_3, \ldots$ die zugehörigen Werte von n, so ist allgemein:

$$-\tau_i < \int_{n_i}^m f(x)\,dx < \tau_i \qquad \text{für } n_i < m < X.$$

Addieren wir hier überall das von x_0 bis n_i erstreckte Integral, so kommt:

$$\int_{x_0}^{n_i} f(x)\,dx - \tau_i < \int_{x_0}^m f(x)\,dx < \int_{x_0}^{n_i} f(x)\,dx + \tau_i \qquad \text{für } n_i < m < X.$$

Solche Ungleichungen gehen für $i = 1, 2, 3, \ldots$ in beliebiger Anzahl hervor. Sie werden genau dieselben Ungleichungen wie die Ungleichungen (3) von Nr. 102, wenn wir die Bezeichnungen

$$S_{n_i} = \int_{x_0}^{n_i} f(x)\,dx, \quad S_m = \int_{x_0}^m f(x)\,dx$$

einführen. Also folgt wie dort, daß $\lim S_m$ für $\lim m = X$ einen bestimmten endlichen Wert S hat. Daher gilt der

Satz 8: Ist die Funktion $f(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x < X$ überall stetig, dagegen unstetig für $x = X$, so konvergiert das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^X f(x)\,dx$$

dann und nur dann, wenn es stets, sobald eine beliebig kleine positive Zahl τ *vorgeschrieben wird, eine Zahl* n *im Intervalle* $x_0 \leqq n < X$ *derart gibt, daß für jedes* m *im Intervalle* $n < m < X$ *die Ungleichung gilt:*

$$\left|\int_n^m f(x)\,dx\right| < \tau.$$

Ist $f(x)$ auch für $x = X$ stetig, so ist dieser Satz bekanntlich auch richtig, siehe Satz 20 in Nr. 419.

471. Hilfsmittel zur Feststellung der Konvergenz oder Divergenz eines Integrals, dessen Integrand an der oberen Grenze unstetig ist. Die Bemerkungen, mit denen Nr. 466 eingeleitet wurde, können wir auch hier machen. Als Hilfsmittel, das in sehr vielen Fällen zur Entscheidung führt, dient der

Satz 9: Wenn zwei Integrale

$$\int_a^X u(x)\,dx \quad \textit{und} \quad \int_b^X v(x)\,dx$$

vorliegen, dabei $u(x)$ *im Intervalle* $a \leqq x < X$ *und* $v(x)$ *im Intervalle* $b \leqq x < X$ *stetig ist, während* $u(x)$ *für* $x = X$ *unstetig wird, so ist das erste Integral konvergent, sobald das zweite konvergiert und es eine Zahl* $\alpha < X$, *die beiden Intervallen angehört, derart gibt, daß für jedes* x *im Intervalle* $\alpha \leqq x < X$ *sowohl* $v(x) \geqq 0$ *als auch* $|u(x)| \leqq v(x)$ *ist. — Dagegen ist das erste Integral divergent und zwar gleich* $\begin{Bmatrix} +\infty \\ -\infty \end{Bmatrix}$, *sobald das zweite nach* $+\infty$ *divergiert und es eine Zahl* $\alpha < X$, *die beiden Intervallen angehört, derart gibt, daß für jedes* x *im Intervalle* $\alpha \leqq x < X$ *sowohl* $v(x) \geqq 0$ *als auch* $u(x)$ $\begin{Bmatrix} \textit{positiv} \\ \textit{negativ} \end{Bmatrix}$ *und überdies* $|u(x)| \geqq v(x)$ *ist.*

Der Beweis wird ganz ebenso geführt wie der des Satzes 2 in Nr. 466. Der einzige Unterschied ist der, daß statt der Worte: jedes $m > n$ jetzt die Worte: jedes m im Intervalle $n < m < X$ zu setzen sind, wie ja überhaupt jetzt X an die Stelle von $+\infty$ tritt.

Als das in unserem Satze 9 auftretende zweite Integral, das Vergleichungsintegral, wählen wir nun das von

$$v(x) = \frac{K}{(X-x)^k},$$

wobei K und k positive und von Null verschiedene Konstanten bedeuten, so daß $v(x)$ für jedes $x < X$ positiv ist, also ein in Satz 9 aufgestelltes Erfordernis von $v(x)$ von vornherein erfüllt ist. Sind x_0 und $x_1 < X$ gewählt, so ist jetzt, falls $k \neq 1$ ist:

$$\int_{x_0}^{x_1} v(x)\,dx = K\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{(X-x)^k} = \frac{K}{1-k}\left[(X-x_0)^{1-k} - (X-x_1)^{1-k}\right],$$

dagegen, falls $k = 1$ ist:

$$\int_{x_0}^{x_1} v(x)\,dx = K \ln \frac{X-x_0}{X-x_1}.$$

Beim Grenzübergange zu $\lim x_1 = X$ erkennt man hieraus: Im Falle $k \geqq 1$ wird

$$\int_{x_0}^{X} v(x)\,dx = +\infty;$$

ist dagegen $k < 1$ (aber positiv), so ist das Integral

$$\int_{x_0}^{X} v(x)\,dx = \frac{K}{1-k}(X-x_0)^{1-k},$$

also konvergent. Wenn wir außerdem im letzten Satze $u(x)$ mit $f(x)$ bezeichnen, so gewinnen wir den spezielleren Satz:

Satz 10: Ist $f(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x < X$ stetig, aber für $x = X$ unstetig, so konvergiert das Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

sobald es eine Zahl α im Intervalle $x_0 \leqq \alpha < X$, eine positive Zahl K und eine positive Zahl $k < 1$ derart gibt, daß $|(X-x)^k f(x)| \leqq K$ für jedes x im Intervalle $\alpha \leqq x < X$ ist. — Es hat dagegen den Grenzwert $\begin{Bmatrix} +\infty \\ -\infty \end{Bmatrix}$, sobald es eine Zahl α im Intervalle $x_0 \leqq \alpha < X$, eine positive Zahl K und eine Zahl $k \geqq 1$

derart gibt, daß für jedes x im Intervalle $\alpha \leqq x < X$ erstens $f(x)$ $\begin{Bmatrix} positiv \\ negativ \end{Bmatrix}$ und zweitens $|(X-x)^k f(x)| \geqq K$ ist.

Auch dieser Satz läßt sich wie Satz 3 von Nr. 466 weiter spezialisieren, nämlich wenn $f(x)$ für $\lim x = X$ mit $1:(X-x)$ in der k^{ten} Ordnung unendlich groß wird. Alsdann hat $|(X-x)^k f(x)|$ für $\lim x = X$ einen bestimmten endlichen positiven und von *Null verschiedenen* Grenzwert A. Dies bedeutet: Ist eine beliebig kleine positive Zahl τ vorgegeben, so gibt es eine Zahl α im Intervalle $x_0 \leqq \alpha < X$ derart, daß $|(X-x)^k f(x)|$ für jedes x im Intervalle $\alpha \leqq x < X$ zwischen $A-\tau$ und $A+\tau$ liegt. Ist nun $k<1$, so wählen wir für K die Zahl $A+\tau$, ist $k \geqq 1$, so wählen wir für K die Zahl $A-\tau$ und wenden den letzten Satz an. So kommt

Satz 11: Ist $f(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x < X$ stetig, aber für $x = X$ unstetig, so konvergiert das Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

sobald $f(x)$ für $\lim x = X$ in niederer als erster Ordnung mit $1:(X-x)$ unendlich groß wird. — Es hat dagegen den Grenzwert $\begin{Bmatrix} +\infty \\ -\infty \end{Bmatrix}$, sobald $f(x)$ für $\lim x = X$ in höherer als erster oder gerade in erster Ordnung mit $1:(X-x)$ unendlich groß wird und $f(x)$ von einem gewissen Wert $\alpha < X$ an für jedes x im Intervalle $\alpha \leqq x < X$ beständig $\begin{Bmatrix} positiv \\ negativ \end{Bmatrix}$ ist.

472. Beispiele.

1. Beispiel: Der Integrand sei $1:\sqrt{1-x^2}$. Er ist unstetig für $x=1$. Aber das Produkt aus ihm und $\sqrt{1-x}$ ist für $x=1$ gleich einer von Null verschiedenen Zahl. Der Integrand wird also für $\lim x = 1$ mit $1:(1-x)$ in der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich. Das von 0 bis 1 erstreckte Integral ist daher nach Satz 11 konvergent. In der Tat ist ja, wenn $0 < X < 1$ gewählt und die Wurzel positiv angenommen wird:

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } X,$$

wobei der Arkus zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Für $\lim X = 1$ folgt hieraus:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\pi.$$

2. Beispiel: Bei dem *elliptischen Integrale erster Gattung* (vgl. Nr. 445):

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wobei k^2 einen positiven echten Bruch bezeichnet und die Wurzel positiv ist, ist der Integrand ebenfalls für $x = 1$ unstetig. Aber er wird wegen

$$\sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}$$

für $\lim x = 1$ in der Ordnung $\frac{1}{2}$ mit $1:(1-x)$ unendlich. Also ist das Integral nach Satz 11 konvergent.

3. Beispiel: Sind $F(x)$ und $f(x)$ relativ prime ganze rationale Funktionen, so ist $F(x):f(x)$ nur für die reellen Nullstellen des Nenners $f(x)$ unstetig. Es sei a eine solche Nullstelle. Nehmen wir an, daß x_0 und X beide kleiner als a, aber größer als die nächst geringere Nullstelle von $f(x)$ sind, so ist das Integral

$$\int_{x_0}^{X} \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$$

wohldefiniert. Es sei nun a eine m-fache Nullstelle von $f(x)$. Alsdann wird $F(x):f(x)$ für $\lim x = a$ in m^{ter} Ordnung mit $1:(a-x)$ unendlich. Nach Satz 11 ist daher das Integral

$$\int_{x_0}^{a} \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$$

divergent.

4. Beispiel: Behalten wir die Bezeichnungen des letzten Beispiels bei und betrachten wir das Integral

$$\int_{x_0}^{X} \frac{F(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$$

für lim $X = a$. Der Integrand wird für lim $x = a$ in der Ordnung $\frac{1}{2}m$ mit $1:(a-x)$ unendlich. Nach Satz 11 konvergiert also das Integral

$$\int_{x_0}^{a} \frac{F(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$$

nur dann, wenn a eine *einfache* Nullstelle von $f(x)$ ist.

473. Integrale von Funktionen, die irgendwo im Intervalle unstetig sind. Wir hatten in Nr. 470, 471 angenommen, daß die obere Grenze X größer als die untere Grenze x_0 des Integrals sei und daß der Integrand $f(x)$ für $x = X$ unstetig werde.

Wir wollen jetzt *zunächst* die erstere Annahme fallen lassen, also $x_0 > X$ annehmen. Wählen wir m im Intervalle $X < m < x_0$ und machen wir die Substitution $x = -t$, $dx = -dt$, so ist

$$\int_{x_0}^{m} f(x)\,dx = -\int_{-x_0}^{-m} f(-t)\,dt,$$

woraus folgt:

$$(1)\qquad \lim_{m=X} \int_{x_0}^{m} f(x)\,dx = -\lim_{m=X} \int_{-x_0}^{-m} f(-t)\,dt.$$

Der links stehende Grenzwert eines Integrals, dessen Integrand an der oberen Grenze unstetig ist und dessen obere Grenze *kleiner* als die untere ist, wird hierdurch auf einen Grenzwert von der bisher betrachteten Art zurückgeführt, da ja $-X > -x_0$ ist. Ist dieser Grenzwert konvergent, so heißt das betrachtete Integral konvergent.

1. Beispiel: Nach dem ersten Beispiele der vorigen Nummer ist:

$$\int_{0}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\tfrac{1}{2}\pi,$$

falls die Wurzel positiv ist.

Zweitens wollen wir jetzt annehmen, $f(x)$ sei an der *unteren* Grenze x_0 des Integrals unstetig, sonst aber im ganzen

Intervalle bis zur oberen Grenze X stetig. Wählen wir vorerst m *innerhalb* des Intervalles, so ist nach Satz 8, Nr. 412:

$$\int_m^X f(x)\,dx = -\int_X^m f(x)\,dx,$$

daher

$$(2) \qquad \lim_{m=x_0} \int_m^X f(x)\,dx = -\lim_{m=x_0} \int_X^m f(x)\,dx.$$

Der gesuchte Grenzwert ist hierdurch auf den Grenzwert eines solchen Integrals zurückgeführt, dessen Integrand an der *oberen* Grenze unstetig ist, also auf einen der schon besprochenen Grenzwerte. Sobald dieser Grenzwert bestimmt und endlich ist, heißt das betrachtete Integral konvergent. Nach Satz 10 von Nr. 471 ist also das von x_0 bis X erstreckte Integral z. B. dann konvergent, wenn es eine positive Zahl $k < 1$ derart gibt, daß $|(x - x_0)^k f(x)|$ für alle hinreichend nahe bei x_0 gelegenen und dem Intervalle angehörenden Werte von x nicht größer als eine gewisse endliche Größe K ist.

2. Beispiel: Hiernach ist das Integral

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx,$$

worin $0 < \alpha < 1$ sei, konvergent, obgleich der Integrand $f(x) = \ln x : x^\alpha$ für $x = 0$ den Grenzwert $-\infty$ hat. Denn wenn k eine Zahl zwischen α und 1 bezeichnet, so ist nach Satz 27, Nr. 130:

$$\lim_{x=0} x^k f(x) = \lim_{x=0} \frac{\ln x}{x^{\alpha-k}} = \frac{1}{\alpha - k} \lim_{x=0} x^{k-\alpha} = 0,$$

weil $k - \alpha > 0$ ist, und dies bedeutet, daß $|x^k f(x)|$ für hinreichend kleines positives x kleiner als eine beliebig klein gewählte positive Zahl K ist.

Wir wollen nun *drittens* den Fall betrachten, daß der Integrand $f(x)$ im ganzen Intervalle von x_0 bis X stetig sei, *abgesehen von einer Stelle x_1 im Innern des Intervalles.* Wir können dabei etwa $x_0 < X$ annehmen, da der andere Fall

$x_0 > X$ nach Satz 8, Nr. 412, sofort auf diesen Fall reduziert werden kann. Wählen wir nun zwei beliebig kleine positive Zahlen σ und τ, so ist die Summe:

$$\int_{x_0}^{x_1-\sigma} f(x)\,dx + \int_{x_1+\tau}^{X} f(x)\,dx$$

wohldefiniert, da jedes einzelne Integral über ein Intervall erstreckt ist, in dem der Integrand $f(x)$ stetig ist.

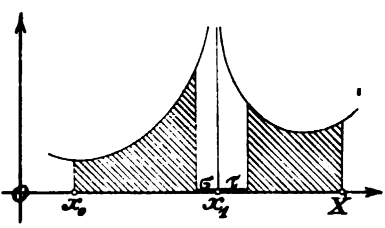


Fig. 15.

Wir schließen eben die Unstetigkeitsstelle x_1 durch kleine Intervalle von den Längen σ und τ vorläufig aus, siehe Fig. 15. Nur wenn die *beiden* Integrale für $\lim \sigma = 0$ und $\lim \tau = 0$ bestimmte endliche Grenzwerte haben, sagen wir, daß das Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

konvergiert und die Summe jener beiden Grenzwerte ist:

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{\sigma=0} \int_{x_0}^{x_1-\sigma} f(x)\,dx + \lim_{\tau=0} \int_{x_1+\tau}^{X} f(x)\,dx.$$

Die beiden rechts stehenden Grenzwerte gehören zu den schon vorher betrachteten; der erste nämlich bedeutet ein Integral, dessen Integrand an der *oberen* Grenze x_1 unstetig ist, und der zweite ein Integral, dessen Integrand an der *unteren* Grenze x_1 unstetig ist.

3. Beispiel: Es liege das Integral über $dx : \sqrt[3]{x^2}$ von $x = -1$ bis $x = +1$ vor. Der Integrand ist für $x = 0$ unstetig, so daß wir die Zerlegung vornehmen:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Das erste Integral rechts läßt sich sofort durch die Substitution $x = -t$, $dx = -dt$ auf das zweite zurückführen, so daß kommt:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

[473

Das Integral rechts ist aber konvergent, denn es ist, wenn $0 < m < 1$ gewählt wird:

$$\int_m^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3(1 - \sqrt[3]{m}),$$

woraus für $\lim m = 0$ der Grenzwert 3 hervorgeht. Folglich ist

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 6.$$

Nach dem Vorhergehenden dürfte es nun auch ohne weiteres klar sein, wie wir vorgehen, *wenn der Integrand* $f(x)$ *an mehreren Stellen im Integrationsintervalle unstetig ist,* und es mag genügen, nur noch den Fall zu betrachten, daß $f(x)$ an der unteren Grenze x_0, an einer Stelle x_1 innerhalb des Intervalles und an der oberen Grenze X unstetig wird, wobei wir wieder $x_0 < X$ annehmen wollen. Wir verstehen unter σ, τ, σ' und τ' vier beliebig kleine positive Zahlen und betrachten zunächst die Summe:

$$\int_{x_0+\tau}^{x_1-\sigma} f(x)dx + \int_{x_1+\tau'}^{X-\sigma'} f(x)dx.$$

Die beiden Integrale erstrecken sich auf Intervalle, in denen der Integrand stetig ist, da wir die Unstetigkeitsstellen x_0, x_1, X durch Intervalle von den Längen τ, $\sigma + \tau'$ und σ' ausgeschlossen haben, siehe Fig. 16. Es sei nun a ein beliebiger Wert zwischen x_0 und x_1 und b ein beliebiger Wert zwischen x_1 und X. Alsdann läßt sich jedes der beiden Integrale nach Satz 9, Nr. 412, in eine Summe zerlegen, so daß sich die viergliedrige Summe ergibt:

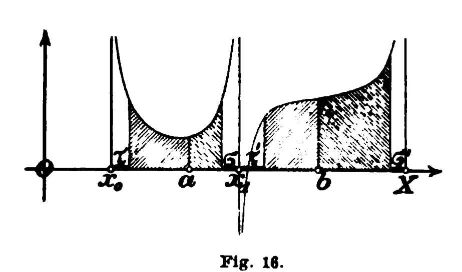


Fig. 16.

$$\int_{x_0+\tau}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{x_1-\sigma} f(x)dx + \int_{x_1+\tau'}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{X-\sigma'} f(x)dx.$$

Machen wir jetzt alle vier Grenzübergänge, indem wir σ, τ, σ', τ' nach Null abnehmen lassen, so sind *alle vier Grenzübergänge durchaus unabhängig voneinander*, indem sich jedes der Integrale über ein Intervall erstreckt, innerhalb dessen der Integrand $f(x)$ jedesmal überall stetig ist, *abgesehen von nur einer Grenze des Intervalles.* Die vier Grenzwerte sind solche von der Art, wie wir sie schon vorher betrachtet haben. Nur wenn *alle vier* Grenzwerte bestimmt und endlich sind, sagen wir, daß das von x_0 bis X erstreckte Integral konvergiert, und bezeichnen als seinen Wert die Summe der vier einzelnen Grenzwerte.

Daß diese Summe alsdann von der Wahl der Zwischenwerte a und b durchaus unabhängig ist, läßt sich nach Satz 9, Nr. 412, ebenso beweisen, wie es in Nr. 467 bei einer analogen Einschaltung eines Zwischenwertes geschah.

Ebenso wie in dem soeben betrachteten Falle verfahren wir allgemein, indem wir zwischen den Unstetigkeitsstellen beliebige Werte einschalten und das Integral in eine Summe von einzelnen Integralen zerlegen, von denen jedes einzelne sich auf ein Intervall bezieht, innerhalb dessen der Integrand überall stetig ist, abgesehen jedesmal von nur einer Grenze des Intervalles. *Dabei ist es jedoch wesentlich, daß die Anzahl aller Unstetigkeitsstellen des Integranden endlich ist.* Sonst nämlich wäre das Gesamtintegral als eine Summe von unendlich vielen einzelnen Integralen zu definieren, und es stände noch der Beweis dafür aus, daß diese unendliche Reihe wirklich konvergiert.

Unsere Betrachtungen zeigen, daß wir immer wieder auf die in Nr. 470 und 471 untersuchten Grenzwerte zurückkommen. Wir sagen daher:

Satz 12: Die Definition in Nr. 470 und die Sätze 8—11 von Nr. 470 und 471 lassen sich sinngemäß auf solche Integrale übertragen, deren Integranden an einer endlichen Anzahl von Stellen im Integrationsintervalle unstetig werden.

4. Beispiel: Wir verallgemeinern das 3. Beispiel, indem wir das Integral

$$\int_{-a}^{b} \frac{dx}{x^n}$$

[473

betrachten, wobei a und b positiv sein sollen und n eine positive rationale Zahl, etwa $n = p:q$ sei, so daß p und q ganze positive Zahlen ohne gemeinsamen Teiler bedeuten. Wenn wir noch annehmen, daß q *ungerade* sei, so hat x^n für jedes positive und negative x einen bestimmten Wert. Der Integrand ist unstetig nur für $x = 0$. Wir zerlegen:

$$\int_{-a}^{b} \frac{dx}{x^n} = \lim_{\sigma=0} \int_{-a}^{-\sigma} \frac{dx}{x^n} + \lim_{\tau=0} \int_{\tau}^{b} \frac{dx}{x^n},$$

wobei σ und τ positiv sein sollen. Es ist einzeln für $n \neq 1$:

$$\int_{-a}^{-\sigma} \frac{dx}{x^n} = \frac{(-\sigma)^{1-n} - (-a)^{1-n}}{1-n}, \quad \int_{\tau}^{b} \frac{dx}{x^n} = \frac{b^{1-n} - \tau^{1-n}}{1-n}.$$

Wenn erstens n kleiner als Eins ist, haben beide Integrale für $\lim \sigma = 0$ und $\lim \tau = 0$ bestimmte endliche Grenzwerte, und es kommt:

$$\int_{-a}^{b} \frac{dx}{x^n} = \frac{b^{1-n} - (-a)^{1-n}}{1-n}.$$

Wenn zweitens n größer als Eins ist, wird der Grenzwert von

$$(-\sigma)^{1-n} = \sqrt[q]{-\sigma^{q-p}}$$

gleich $+\infty$, falls $q-p$ gerade ist, und gleich $-\infty$, falls $q-p$ ungerade ist, während der Grenzwert von τ^{1-n} gleich $+\infty$ ist. Sobald $q-p$ gerade ist, strebt also das erste Integral nach $-\infty$ und das zweite nach $+\infty$, so daß das Gesamtintegral keinen bestimmten Grenzwert hat; sobald $q-p$ ungerade ist, streben beide Einzelintegrale nach $+\infty$, dasselbe gilt daher vom Gesamtintegral. *Wenn drittens n gleich Eins ist,* so haben wir die Formeln:

$$\int_{-a}^{-\sigma} \frac{dx}{x} = \ln \frac{\sigma}{a}, \quad \int_{\tau}^{b} \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{\tau},$$

so daß das erste Integral den Grenzwert $-\infty$, das zweite den Grenzwert $+\infty$ hat, das Gesamtintegral also keinem bestimmten Grenzwerte zustrebt.

473]

5. *Beispiel:* Es seien $F(x)$ und $f(x)$ relativ prime ganze rationale Funktionen von x, so daß $F(x):f(x)$ folglich für jede reelle Nullstelle von $f(x)$ unstetig ist. Enthält das Intervall von x_0 bis X insgesamt m verschiedene, so zerlegen wir das Integral

$$\int_{x_0}^{X} \frac{F(x)}{f(x)}\, dx$$

in Einzelintegrale, von denen sich ein jedes auf ein solches Intervall bezieht, das nur an einer seiner beiden Grenzen eine der m Nullstellen aufweist. Nach dem 3. Beispiele in Nr. 472 sind aber diese einzelnen Integrale sämtlich divergent; dasselbe gilt also auch vom Gesamtintegral. Dagegen ist das Integral

$$\int_{x_0}^{X} \frac{F(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx$$

nach dem 4. Beispiele in Nr. 472 dann und nur dann konvergent, wenn alle im Intervalle von x_0 bis X enthaltenen Nullstellen von $f(x)$ einfach sind.

474. Integrale mit endlosem Intervalle und Unstetigkeitsstellen des Integranden. Schließlich haben wir noch die beiden Betrachtungsreihen, die mit Nr. 464 und Nr. 470 begannen, miteinander zu vereinigen. Denn es kann der Fall vorliegen, daß ein Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$$

zu berechnen ist, von dem eine oder beide Grenzen $+\infty$ oder $-\infty$ werden sollen und bei dem der Integrand $f(x)$ mehrere Unstetigkeitsstellen hat. Liegen alle Unstetigkeitsstellen von $f(x)$ im Intervalle von a bis $b > a$, so können wir die Zerlegung in

$$\int_{x_0}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{b} f(x)\, dx + \int_{b}^{X} f(x)\, dx$$

anwenden. Beim Grenzübergange zu $\lim x_0 = -\infty$ oder

$\lim X = +\infty$ liegen alsdann drei Integrale vor, von denen das erste und letzte zu den in Nr. 464 bis Nr. 469 betrachteten gehört, das mittlere dagegen zu den in Nr. 470 bis Nr. 473 betrachteten. Wir sagen, daß das Gesamtintegral dann und nur dann konvergiert, wenn die drei Einzelintegrale konvergieren und bezeichnen alsdann die Summe der Werte der drei Einzelintegrale als den Wert des Gesamtintegrals. Es leuchtet wieder leicht ein, daß dieser Wert von der Wahl der Stellen a und b, zwischen denen alle Unstetigkeitsstellen von $f(x)$ gelegen sind, unabhängig ist.

Zum Schlusse noch eine Bemerkung allgemeiner Art:

Für die *regulären* Integrale, d. h. für solche mit endlichem Intervalle und mit überall stetigem Integranden, haben wir in den vorhergehenden Kapiteln eine Reihe von Sätzen aufgestellt. Es fragt sich nun, ob diese Sätze auch für Grenzwerte von Integralen gelten. Es würde aber zu weit führen, wollten wir diese Frage in allen einzelnen Fällen klären. Daher mag die allgemeine Bemerkung genügen, daß man zur Entscheidung hierüber zunächst jene Sätze auf *reguläre* Integrale anwendet und dann ihre Intervalle durch Grenzübergang soweit ausdehnt, daß sie entweder Unstetigkeitsstellen des Integranden enthalten oder sich ins Unendliche erstrecken. Man hat dann jedesmal festzustellen, in wie weit dabei die in den Formeln vorkommenden Ausdrücke zu bestimmten endlichen Grenzwerten streben. Z. B. die Sätze 8—10 in Nr. 412 über die Vertauschung der Grenzen eines Integrals und über die Zerlegung eines Integrals in eine Summe von Integralen durch Zerteilung seines Intervalles gelten auch für Grenzwerte von Integralen, *falls alle vorkommenden Integrale konvergent bleiben.* Man wird nämlich bemerken, daß die Grenzwerte in Nr. 467 und Nr. 473 unter Aufrechterhaltung dieser Sätze definiert worden sind. Daß unter denselben Umständen auch Satz 13 von Nr. 413 über die Integration einer Summe von Funktionen und Satz 15 in Nr. 414 über die Multiplikation eines Integrals mit einer Konstanten gilt, ist unmittelbar klar.

475. Integrale von Funktionen mit Sprungstellen. Ein besonders einfacher, aber wichtiger Fall ist der, wo

der Integrand $f(x)$ eines Integrals nur solche Unstetigkeitsstellen hat, an denen er von einem *endlichen* Werte zu einem anderen *endlichen* Werte übergeht. Eine solche Stelle soll eine *Sprungstelle* der Funktion $f(x)$ heißen. Im Intervalle von x_0 bis X mögen die Sprungstellen $x_1, x_2, \dots x_n$ liegen, während $f(x)$ sonst überall im Intervalle stetig sein soll. Siehe Fig. 17. Nach Nr. 473 ist alsdann, wenn wir $x_0 < X$ annehmen:

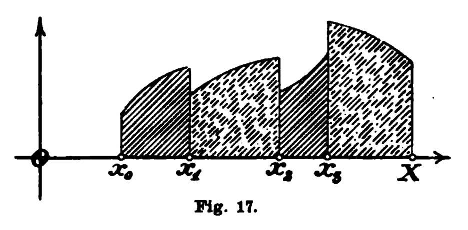


Fig. 17.

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{x_1-\sigma_1} f(x)\,dx + \lim \int_{x_1+\tau_1}^{x_2-\sigma_2} f(x)\,dx + \cdots + \lim \int_{x_n+\tau_n}^{X} f(x)\,dx,$$

wobei $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ und $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n$ positive Zahlen bedeuten, die nach Null streben. Hieraus folgt:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_n}^{X} f(x)\,dx,$$

vorausgesetzt, daß für $f(x)$ an der Stelle x_i im Integrale

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

derjenige Wert gewonnen wird, den $f(x)$ mit bis x_i *wachsendem* x erreicht, dagegen im Integrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

derjenige Wert, den $f(x)$ mit bis x_i *abnehmendem* x erreicht.

Satz 13: Ist $f(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ überall stetig, abgesehen von einer endlichen Anzahl von Stellen, an denen $f(x)$ jedesmal von einem endlichen Werte zu einem andern endlichen Werte springt, so ist das über das ganze Intervall erstreckte Integral von $f(x)$ konvergent.

[475

Es ist hier wohl zu beachten, daß zwar das Integral

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

falls die obere Grenze x im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ beliebig gewählt wird, stetig ist, jedoch nicht überall eine bestimmte Ableitung $f(x)$ hat. Denn an der Unstetigkeitsstelle x_i z. B. hat $F(x)$ zwei Ableitungen, indem die Grenzwerte

$$\lim_{h=0} \frac{F(x_i - h) - F(x_i)}{-h}, \quad \lim_{h=0} \frac{F(x_i + h) - F(x_i)}{h}$$

für *positives* h gleich den beiden Werten sind, die $f(x)$ mit bis x_i wachsendem und mit bis x_i abnehmendem x erreicht. Man erkennt dies sofort, wenn man den in Nr. 410 für die Formel (5) daselbst gegebenen Beweis unter der Voraussetzung verfolgt, daß $f(x_i - h)$ und $f(x_i + h)$ für positives h und $\lim h = 0$ zwei verschiedene Werte erreichen. Vgl. auch Fig. 17, S. 43 des 1. Bandes.

476. Hauptwert eines bestimmten Integrals und singuläre bestimmte Integrale. Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ nur an einer einzigen Stelle x_1 unstetig wird, so daß nach Nr. 473 die Definition gilt:

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{\sigma=0} \int_{x_0}^{x_1-\sigma} f(x)\,dx + \lim_{\tau=0} \int_{x_1+\tau}^{X} f(x)\,dx,$$

in der σ und τ *positiv* sind, so kann es vorkommen, daß der eine Grenzwert $+\infty$ und der andere $-\infty$ ist (wie im 4. Beispiele, Nr. 473), daß aber die Summe beider Grenzwerte einen bestimmten endlichen Wert hat, falls man noch die Bedingung stellt, daß stets $\sigma = \tau$ sein soll. Allerdings ist dann das Intervall (1) dennoch nicht als konvergent zu bezeichnen, da zur Konvergenz nötig ist, daß jeder der beiden Grenzwerte rechts für sich endlich und bestimmt sei. Immerhin hat aber doch der Grenzwert

$$\lim_{\sigma=0} \left[\int_{x_0}^{x_1-\sigma} f(x)\,dx + \int_{x_1+\sigma}^{X} f(x)\,dx \right]$$

eine gewisse Bedeutung, und man nennt ihn nach *Cauchy* den *Hauptwert* des Integrals.

Nehmen wir an, daß die beiden in (1) rechts stehenden Integrale unabhängig voneinander konvergieren, daß also das Integral (1) konvergent sei. Alsdann muß der in (1) angegebene Grenzwert auch dann hervorgehen, wenn man σ und τ so nach Null streben läßt, daß ihr Verhältnis $\sigma:\tau$ stets einen von Null verschiedenen bestimmten Wert behält. Diese Wirkung wird erzielt, wenn man unter λ und μ zwei positive Zahlen versteht, $\sigma = \lambda\varepsilon$, $\tau = \mu\varepsilon$ setzt und darauf die positive Zahl ε nach Null streben läßt. Alsdann ist der Grenzwert gleich

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{x_0}^{x_1-\lambda\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\mu\varepsilon}^{X} f(x)\,dx\right].$$

Derselbe Wert muß alsdann bei der besonderen Annahme $\lambda = \mu = 1$ hervorgehen:

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx\right].$$

Die Differenz dieser beiden Grenzwerte muß folglich gleich Null sein. Daher ergibt sich nach Satz 9, Nr. 412:

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{x_1-\lambda\varepsilon}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_1+\mu\varepsilon} f(x)\,dx\right] = 0.$$

Das erste Integral erstreckt sich über ein Intervall von der Länge $(\lambda - 1)\varepsilon$, das zweite über ein Intervall von der Länge $(\mu - 1)\varepsilon$; das erste Intervall liegt vor der kritischen Stelle x_1, das zweite folgt auf die kritische Stelle.

Hieraus können wir nun den mitunter nützlichen, wenn auch negativen Satz ableiten:

Satz 14: Ist $f(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ überall stetig, abgesehen von der Stelle x_1 im Innern des Intervalles, und gibt es zwei positive Zahlen λ und μ derart, daß der Grenzwert von

$$\int_{x_1-\lambda\varepsilon}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_1+\mu\varepsilon} f(x)\,dx$$

für nach Null strebendes positives ε *nicht verschwindet, so ist das über* $f(x)$ *von* x_0 *bis* X *erstreckte Integral divergent.*

Die Grenzwerte der beiden im Satze 14 auftretenden Integrale heißen nach *Cauchy* zur Stelle x_1 gehörige *singuläre bestimmte Integrale.*

Beispiel: Es ist

$$\int\limits_{-\lambda\varepsilon}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} = -\ln\lambda, \quad \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon\mu}\frac{dx}{x} = \ln\mu,$$

so daß der in Satz 14 erwähnte Grenzwert gleich $\ln(\mu:\lambda)$ ist. Da er nicht gleich Null ist, so ist das Integral

$$\int\limits_{-a}^{b}\frac{dx}{x}$$

für $a > 0$ und $b > 0$ divergent. Dies erkannten wir schon im 4. Beispiele, Nr. 473.

§ 2. Berechnung bestimmter Integrale aus unbestimmten.

477. Zusammenstellung einiger bestimmter Integrale. Der nächstliegende Weg zur Berechnung eines bestimmten Integrals ist nach Nr. 411 der folgende: Man berechnet zunächst das zugehörige unbestimmte Integral und bildet alsdann die Differenz seiner Werte für die obere und untere Grenze des bestimmten Integrals. Dabei können sich Schwierigkeiten ergeben, wenn der Integrand Unstetigkeiten hat oder wenn das Integrationsintervall endlos ist. Alsdann muß man die im vorigen Paragraphen entwickelten Theorien anwenden.

Wir wollen hier zunächst eine Reihe von bestimmten Integralen zusammenstellen, deren Berechnung leicht ist. Nach den Formeln (1), (5) und (4) von Nr. 402 ist:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ (für } n \neq -1), \quad \int e^{-ax}dx = \frac{-e^{-ax}}{a} + C \text{ (für } a \neq 0),$$

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C (\text{für } a \neq 0), \quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C (\text{für } a \neq 0).$$

Die beiden letzten Integrale gehen nämlich durch die Substitution $x = at$ in die Integrale (5) und (4) von Nr. 402,

multipliziert mit a bzw. 1, über. Aus diesen Formeln folgt nun ohne weiteres:

$$(1)\quad \begin{cases} \int\limits_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \text{ (für } n > -1), & \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \text{ (für } a > 0), \\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \text{ (für } a > 0), & \int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\pi, \end{cases}$$

wobei die im letzten Integrale auftretende Wurzel positiv sein soll.

Aus (3) und (4) in Nr. 454 folgt:

$$(2)\quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2} \text{ (für } a > 0).$$

Die Formeln (3) und (4) von Nr. 459 liefern die Werte der dort angegebenen Integrale, falls die Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ sind. Ehe wir sie notieren, bemerken wir noch, daß diese Integrale in andere erwähnenswerte Integrale übergehen, wenn $\frac{1}{2}\pi - x$ bzw. $\sin x$ als neue Veränderliche eingeführt wird. Es ergibt sich:

$$(3)\quad \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2k-1} x\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2k-1} x\, dx = \int\limits_0^1 \frac{t^{2k-1}\, dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)},$$

$$(4)\quad \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2k} x\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2k} x\, dx = \int\limits_0^1 \frac{t^{2k}\, dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Dabei bedeutet k eine ganze positive Zahl, und die Quadratwurzel ist positiv.

Aus (2) in Nr. 458 ergibt sich, wenn m und n ganze positive Zahlen sind und $n > 1$ ist:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{m+n} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx.$$

Dies ist eine *Rekursionsformel.* Ersetzen wir in ihr n nach und nach durch $n-2$, $n-4$, $\cdots$, so kommt eine Reihe von Gleichungen, die wir bzw. mit

$$\frac{n-1}{m+n}, \quad \frac{n-3}{m+n-2}, \quad \cdots$$

multiplizieren und dann zur angegebenen Gleichung addieren. Je nachdem n ungerade oder gerade, also von der Form $2k+1$ oder $2k$ ist, gehen dadurch die Formeln hervor:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos^{2k+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}{(m+3)(m+5)\cdots(m+2k+1)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos^{2k} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{(m+2)(m+4)\cdots(m+2k)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x\,dx.$$

Es ist nun aber:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos x\,dx = \left[\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{m+1},$$

so daß die erste Formel für ganzes positives m und k liefert:

(5) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos^{2k+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}{(m+1)(m+3)\cdots(m+2k+1)},$$

während die zweite wegen (3) und (4), je nachdem $m = 2l+1$ oder $m = 2l$ ist, für ganzes positives l und k ergibt:

(6) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2l+1} x \cos^{2k} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdots 2l\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-1)}{1\cdot 3\cdots(2l+2k+1)},$$

(7) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2l} x \cos^{2k} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2l-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2l+2k)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

478. Das Integral $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx$. In den folgenden Nummern betrachten wir einige wichtige, zuerst von *Euler* untersuchte bestimmte Integrale. Das Integral

(1) $$u = \int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx,$$

in dem die Konstante p ein positiver echter Bruch sein soll, ist konvergent, da der Integrand im Intervalle überall stetig ist, ebenso an der Grenze $x = 1$ (nach Nr. 129), während er an der

Grenze $x = 0$ mit $1 : x$ in derjenigen Ordnung unendlich groß wird, die durch die größere der beiden Zahlen p und $1 - p$ angegeben wird (vgl. Satz 11, Nr. 471, und Satz 12, Nr. 473).

Mittels der Substitution $x = 1 : t$ geht dasselbe Integral, doch multipliziert mit -1, hervor, und seine Grenzen sind $+\infty$ und 1. Vertauschung der Grenzen gibt nach Satz 8, Nr. 412, wenn wir t wieder mit x bezeichnen, was ja geschehen darf:

$$(2) \qquad u = \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1 - x} dx.$$

Addition von (1) und (2) liefert:

$$(3) \qquad u = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1 - x} dx.$$

Wir wollen das Integral in dieser Gestalt *zunächst unter der besonderen Annahme auswerten, daß p die Form* $(2m + 1) : 2n$ *habe*, wo m und n ganze positive Zahlen bedeuten und $m < n$ sein soll. Es ist dann, wenn wir $x = z^{2n}$ setzen:

$$u = \int_0^{+\infty} n \frac{z^{2m} - z^{2n-2m-2}}{1 - z^{2n}} dz,$$

daher nach Satz 7, Nr. 467:

$$(4) \qquad u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2} \frac{z^{2m} - z^{2n-2m-2}}{1 - z^{2n}} dz.$$

Da der Integrand rational ist, wenden wir die Partialbruchzerlegung an. Die Nullstellen z_k des Nenners sind die $2n^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln, die wir nach Nr. 358 in der Form

$$z_k = \cos \omega_k + i \sin \omega_k$$

annehmen können, sobald

$$\omega_k = \pm \frac{k}{n} \pi \quad (k = 1, 2, \cdots n - 1)$$

gesetzt wird. Von den Nullstellen $z = \pm 1$ ist abzusehen, da sie auch Nullstellen des Zählers sind. Alle Nullstellen sind

einfach. Also benutzen wir die in Nr. 385 gegebene Partialbruchzerlegung. Der zur Nullstelle z_k gehörige Partialbruch ist

$$-\frac{n}{2}\frac{z_k^{2m}-z_k^{2n-2m-2}}{2nz_k^{2n-1}(z-z_k)} \text{ oder } -\frac{1}{4}\frac{z_k^{2m+1}-z_k^{-2m-1}}{z-z_k},$$

weil $z_k^{2n}=1$ ist. Um aber zu einer reellen Partialbruchzerlegung zu kommen, werden wir diesen Bruch mit demjenigen Bruche vereinigen, der zur konjugiert komplexen Nullstelle gehört, also zu $\cos\omega_k - i\sin\omega_k$. Nach der Moivreschen Formel in Nr. 358 ist die Summe beider Brüche:

$$-\frac{i}{2}\frac{\sin(2m+1)\omega_k}{z-\cos\omega_k - i\sin\omega_k}+\frac{i}{2}\frac{\sin(2m+1)\omega_k}{z-\cos\omega_k+i\sin\omega_k}=\frac{\sin\omega_k\sin(2m+1)\omega_k}{(z-\cos\omega_k)^2+\sin^2\omega_k},$$

so daß sich ergibt:

$$u=\sum_1^{n-1}{}^k\sin(2m+1)\omega_k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega_k}{(z-\cos\omega_k)^2+\sin^2\omega_k}\,dz.$$

Wird zunächst nur von $-Z$ bis $+Z$ integriert, wobei Z endlich sei, so hat das hier auftretende Integral den Wert:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{Z-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}+\operatorname{arc\,tg}\frac{Z+\cos\omega_k}{\sin\omega_k},$$

wobei die Arkus auf das Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ zu beschränken sind. Diese Summe hat für $\lim Z=+\infty$ den Wert π. Also ist:

$$u=\pi\sum_1^{n-1}{}^k\sin(2m+1)\omega_k=\pi\sum_1^{n-1}{}^k\sin\frac{(2m+1)k\pi}{n}.$$

Setzen wir für den Augenblick $(2m+1)\pi:2n=\alpha$, so wird

$$u=\pi S,\text{ wobei } S=\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\cdots+\sin 2(n-1)\alpha$$

ist. Nun aber haben wir:

$$2S\sin\alpha=(\cos\alpha-\cos 3\alpha)+(\cos 3\alpha-\cos 5\alpha)+\cdots$$
$$+[\cos(2n-3)\alpha-\cos(2n-1)\alpha]=\cos\alpha-\cos(2n-1)\alpha.$$

Wegen der Bedeutung von α ist jedoch $(2n-1)\alpha$ gleich $(2m+1)\pi-\alpha$, also $\cos(2n-1)\alpha$ gleich $-\cos\alpha$, so daß $S=\operatorname{ctg}\alpha$ wird. Folglich ergibt sich, wenn wir den Wert von

α wieder einsetzen und auch $(2m+1):2n$ wieder mit p bezeichnen:

$$(5)\qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = \pi \operatorname{ctg} p\pi,$$

sobald p irgend ein positiver echter Bruch von der Form $(2m+1):2n$ ist.

Wir wollen jetzt zeigen, daß diese Formel auch dann richtig ist, wenn p eine *beliebige* Zahl im Intervalle $0<p<1$ bedeutet. Zu diesem Zwecke gehen wir davon aus, daß wir jede solche Zahl p zwischen zwei Zahlen p_1 und p_2 von der Form $(2m+1):2n$ einschließen können und zwar beliebig eng, da alle Zahlen von der Form $(2m+1):2n$ *überall dicht* liegen (vgl. Nr. 1 und 2). Wir haben nun:

$$p_1 < p < p_2.$$

Ist x zwischen 0 und 1 gelegen, so nimmt x^p von 1 bis x ab, wenn p von 0 bis 1 wächst. Also ist

$$x^{p_1} > x^p > x^{p_2}, \quad x^{1-p_1} < x^{1-p} < x^{1-p_2},$$

folglich

$$\frac{x^{p_1-1}-x^{-p_1}}{1-x} > \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x} > \frac{x^{p_2-1}-x^{-p_2}}{1-x}.$$

Für $x=1$ haben die Brüche nach Nr. 129 die Werte $1-2p_1$, $1-2p$, $1-2p_2$, die in derselben Rangordnung stehen. Wenn nun σ eine beliebig kleine positive Zahl ist, so folgt nach dem Satze 14, Nr. 413:

$$\int_\sigma^1 \frac{x^{p_1-1}-x^{-p_1}}{1-x}\,dx > \int_\sigma^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx > \int_\sigma^1 \frac{x^{p_2-1}-x^{-p_2}}{1-x}\,dx.$$

Für $\lim \sigma = 0$ hat das erste Integral nach (5) den Wert $\pi \operatorname{ctg} p_1\pi$ und das letzte den Wert $\pi \operatorname{ctg} p_2\pi$, weil die Formel (5) für p_1 und p_2 gilt. Das mittlere Integral ist, wie wir sahen, ebenfalls konvergent für $\lim \sigma = 0$. Also folgt:

$$\pi \operatorname{ctg} p_1\pi > \int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx > \pi \operatorname{ctg} p_2\pi.$$

Da p_1 und p_2 die Zahl p beliebig eng einschließen, so folgern wir, *daß die Formel (5) für jedes p im Intervalle* $0<p<1$ gilt.

[478

479. Das Integral $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\,dx$. Dies Integral unterscheidet sich von dem in voriger Nummer betrachteten nur durch die geänderten Vorzeichen und läßt sich, wenn p zwischen 0 und 1 liegt, in entsprechender Weise auswerten. Ehe wir dies tun, machen wir darauf aufmerksam, daß es sich auf eine wichtige andere Form bringen läßt. Denn es ist

$$(1)\qquad \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int\limits_0^1 \frac{x^{-p}}{1+x}\,dx.$$

Machen wir im letzten Integrale die Substitution $x = 1 : z$, so kommt:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{-p}}{1+x}\,dx = -\int\limits_{+\infty}^1 \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \int\limits_1^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz.$$

Schreiben wir hierin x statt z, so folgt also aus (1):

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx,$$

d. h.:

$$(2)\qquad \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx.$$

Daß das Integral rechts konvergiert, folgt daraus, daß der Integrand für $x = 0$ mit $1 : x$ in der Ordnung $1 - p$ unendlich wird und für $x = +\infty$ mit $1 : x$ in der Ordnung $2 - p$ verschwindet. (Vgl. Nr. 473 und Satz 4, Nr. 466.)

Wir behandeln das Integral in der in (2) rechtsstehenden Form analog wie das der vorigen Nummer, indem wir zunächst wieder annehmen, daß p die Form $(2m + 1) : 2n$ habe, wo m und n ganze positive Zahlen bedeuten und $m < n$ sein soll. Vermöge der Substitution $x = z^{2n}$ ergibt sich dann mit Hilfe von Satz 7, Nr. 467:

$$(3)\qquad \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{n z^{2m}\,dz}{1+z^{2n}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{n z^{2m}\,dz}{1+z^{2n}}.$$

Der Integrand des letzten Integrals ist rational, und es sind die Nullstellen z_k seines Nenners sämtlich einfach, so daß sich die Partialbruchzerlegung in Nr. 385 anwenden läßt. Zur Nullstelle z_k gehört der Partialbruch

$$\frac{n z_k^{2m}}{2n z_k^{2n-1}(z - z_k)} \text{ oder } -\frac{z_k^{2m+1}}{2(z - z_k)},$$

weil $z_k^{2n} = -1$ ist. Ferner hat z_k den absoluten Betrag Eins und ist daher in der Form $\cos\omega_k + i\sin\omega_k$ darstellbar, so daß nach der Moivreschen Formel von Nr. 358

$$\cos 2n\omega_k + i\sin 2n\omega_k = -1, \text{ d.h. } \cos 2n\omega_k = -1, \ \sin 2n\omega_k = 0$$

ist. Wenn wir also

$$\omega_k = \frac{2k+1}{2n}\pi \quad (k = 0, 1, 2, \cdots n-1)$$

setzen, so liegen alle $2n$ Nullstellen des Nenners in den Formen:

$$\cos\omega_k + i\sin\omega_k \quad \text{und} \quad \cos(-\omega_k) + i\sin(-\omega_k)$$

vor. Die Summe der beiden zu diesen konjugiert komplexen Nullstellen gehörigen Partialbrüche ist nach der Moivreschen Formel gleich

$$\frac{\cos 2m\omega_k - \cos(2m+1)\omega_k \cdot z}{(z - \cos\omega_k)^2 + \sin^2\omega_k}.$$

Wir formen den Zähler ein wenig um und erhalten dann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n z^{2m} dz}{1 + z^{2n}} = \sum_0^{n-1}{}_k \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-\cos(2m+1)\omega_k \cdot (z - \cos\omega_k) + \sin(2m+1)\omega_k \cdot \sin\omega_k}{(z - \cos\omega_k)^2 + \sin^2\omega_k}\, dz.$$

Das rechts stehende Integral werten wir zunächst zwischen endlichen Grenzen $-Z$ und $+Z$ aus und zwar am bequemsten, indem wir davon Gebrauch machen, daß die in Nr. 432 angegebene Funktion (10) die dort unter (6) stehende Ableitung hat. Wenn wir in jenen Formeln h und k durch $\cos\omega_k$ und $\sin\omega_k$, $2M_{m-1}$ und $2N_{m-1}$ durch $-\cos(2m+1)\omega_k$ und $-\sin(2m+1)\omega_k$ ersetzen, so finden wir also, daß das von $-Z$ bis $+Z$ erstreckte Integral den Wert

$$-\frac{1}{2}\cos(2m+1)\omega_k \cdot \ln\frac{(Z - \cos\omega_k)^2 + \sin^2\omega_k}{(Z + \cos\omega_k)^2 + \sin^2\omega_k}$$
$$+ \sin(2m+1)\omega_k \cdot \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{Z - \cos\omega_k}{\sin\omega_k} + \operatorname{arc\,tg}\frac{Z + \cos\omega_k}{\sin\omega_k}\right]$$

[479

hat, in dem die beiden Arkus zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen, so daß sie beim Grenzübergange für $\lim Z = +\infty$ beide zu $\frac{1}{2}\pi$ werden, wobei der Numerus des Logarithmus gleich Eins wird. Folglich kommt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n z^{2m} dz}{1+z^{2n}} = \pi \sum_{0}^{n-1}{}_k \sin(2m+1)\omega_k .$$

Dasselbe Verfahren wie in voriger Nummer lehrt, daß

$$\sum_{0}^{n-1}{}_k \sin(2m+1)\omega_k = \frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

ist. Wenn wir schließlich $(2m+1):2n$ wieder mit p bezeichnen, so folgt aus (3), daß

$$(4) \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

ist, sobald p einen positiven echten Bruch bedeutet, der die Form $(2m+1):2n$ hat. Unter derselben Voraussetzung ist also nach (2):

$$(5) \qquad \int_{0}^{1} \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Um nun zu zeigen, daß die Formel (4) auch dann gilt, wenn p irgend einen Wert im Intervalle $0 < p < 1$ hat, genügt es, dasselbe für die Formel (5) nachzuweisen. Dies läßt sich jedoch wegen der geänderten Vorzeichen nicht so leicht bewerkstelligen wie in voriger Nummer der Beweis der Formel (5). Wir schließen vielmehr so: Wäre die Formel (5) richtig, so würde aus ihr und aus der Formel (5) der vorigen Nummer durch Addition folgen:

$$\int_{0}^{1} \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} + \pi \operatorname{ctg} p\pi$$

oder, wenn wir beide Integrale vereinigen, die Integranden auf einen gemeinsamen Nenner bringen und die Hälfte nehmen:

$$(6) \qquad \int_{0}^{1} \frac{x^{p-1}-x^{1-p}}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi \operatorname{ctg}\frac{p\pi}{2}.$$

Es genügt demnach, die Richtigkeit dieser Formel für $0 < p < 1$ zu beweisen. Dabei machen wir davon Gebrauch, daß sie sicher nach dem Vorhergehenden richtig ist, falls p die Form $(2m+1):2n$ hat, wobei $m < n$ ist.

Wie in voriger Nummer schließen wir p beliebig dicht durch zwei Zahlen p_1 und p_2 von dieser besonderen Form ein, so daß

$$0 < p_1 < p < p_2 < 1$$

ist. Weil x zwischen 0 und 1 liegt, so folgt für $0 < x < 1$:

$$\frac{x^{p_1-1}-x^{1-p_1}}{1-x^2} > \frac{x^{p-1}-x^{1-p}}{1-x^2} > \frac{x^{p_2-1}-x^{1-p_2}}{1-x^2}.$$

Analog wie in voriger Nummer schließen wir hieraus:

$$\tfrac{1}{2}\pi \operatorname{ctg}\frac{p_1\pi}{2} > \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{1-p}}{1-x^2}\,dx > \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{ctg}\frac{p_2\pi}{2}$$

und weiter, daß die Ergebnisse (6) und (5) für jede Zahl p im Intervalle $0 < p < 1$ richtig sind.

480. Partialbruchzerlegung von tg x und ctg x. Die Formel (5) der vorletzten Nummer führt zu interessanten Entwicklungen von tg x und ctg x in unendliche Reihen von Partialbrüchen. Es ist nämlich:

$$\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x} = x^{p-1} - x^{-p} + \frac{x^p - x^{1-p}}{1-x},$$

$$\frac{x^p - x^{1-p}}{1-x} = x^p - x^{1-p} + \frac{x^{p+1}-x^{2-p}}{1-x}$$

usw., daher ergibt sich aus n derartigen Formeln:

$$(1)\qquad \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x} = \sum_0^{n-1}{}_m\,(x^{m+p-1}-x^{m-p}) + \frac{x^{n+p-1}-x^{n-p}}{1-x}.$$

Mithin ist:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = \sum_0^{n-1}{}_m \int\limits_0^1 (x^{m+p-1}-x^{m-p})\,dx + \int\limits_0^1 \frac{x^{n+p-1}-x^{n-p}}{1-x}\,dx.$$

Weil $p-1$ und $-p$ größer als -1 sind, gibt die Anwendung der ersten Formel (1) in Nr. 477:

$$(2)\qquad \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = \sum_0^{n-1}{}_m \left(\frac{1}{m+p} - \frac{1}{m+1-p}\right) + R_n,$$

wobei der *Rest* R_n die Bedeutung hat:

$$R_n = \int_0^1 \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p}}{1-x}\, dx.$$

Der im Reste R_n auftretende Integrand ist, falls $n > 2$ gewählt wird, auch für $x = 1$ stetig. Wir können ihn nach dem Mittelwertsatze 22 in Nr. 420 umformen, indem wir

$$u = x^n, \quad v = \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}$$

setzen und bedenken, daß v überall im Intervalle $0 < x < 1$ einerlei Vorzeichen hat. Sind σ und τ beliebig kleine positive Zahlen, so ist danach:

$$\int_\tau^{1-\sigma} \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p}}{1-x}\, dx = x_1^n \int_\tau^{1-\sigma} \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\, dx,$$

wobei x_1 im Intervalle $0 < x_1 < 1$ liegt. Hieraus folgt beim Grenzübergange zu $\lim \sigma = 0$ und $\lim \tau = 0$ nach (5) in Nr. 478:

$$R_n = x_1^n\, \pi \operatorname{ctg} p\pi.$$

Mithin ist $\lim R_n = 0$ für $\lim n = +\infty$, so daß aus (2) für $\lim n = +\infty$ eine konvergente unendliche Reihe hervorgeht. Da die linke Seite von (2) gleich $\pi \operatorname{ctg} p\pi$ ist, so haben wir also:

$$(3)\quad \pi \operatorname{ctg} p\pi = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{1-p}\right) + \left(\frac{1}{1+p} - \frac{1}{2-p}\right) + \left(\frac{1}{2+p} - \frac{1}{3-p}\right) + \cdots.$$

Fassen wir jedes zweite Glied in einer Klammer mit jedem ersten der folgenden Klammer zusammen, so finden wir die übersichtlichere Formel:

$$(4)\qquad \pi \operatorname{ctg} p\pi = \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1+p}\right) - \left(\frac{1}{2-p} - \frac{1}{2+p}\right) - \cdots.$$

Wenn wir hierin $p\pi = x$ und in (3) $p\pi = \frac{1}{2}\pi - x$ setzen, so kommt:

$$(5)\qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) - \cdots,$$

$$(6)\qquad \operatorname{tg} x = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\pi - x} - \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + x}\right) + \left(\frac{1}{\frac{3}{2}\pi - x} - \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + x}\right) + \cdots.$$

Weil $0 < p < 1$ war, so gelten diese Formeln zunächst nur für $0 < x < \pi$ bzw. für $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$. Aber man sieht, daß sich die Reihen, sobald x durch $x + \pi$ ersetzt wird, nur insofern ändern, als *endlich* benachbarte Glieder vertauscht werden, und weil $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$ und $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ ist, so gelten die Formeln (5) und (6) für *jeden* Wert von x, abgesehen von solchen Werten, für die einer der Partialbrüche den Nenner Null bekommt.

Da $\csc x$ gleich der halben Summe von $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ und $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x$ ist, so folgt aus beiden Reihen durch gliedweise Addition:

$$(7)\quad \csc x = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) + \cdots$$

mit abwechselnden Vorzeichen und hieraus, indem wir x durch $\frac{1}{2}\pi - x$ ersetzen:

$$(8)\quad \sec x = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\pi - x} + \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{\frac{3}{2}\pi - x} + \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + x}\right) + \cdots$$

mit ebenfalls abwechselnden Vorzeichen. Allerdings ist die gliedweise Addition der Formeln (5) und (6) nicht ohne weiteres gestattet, doch dies Bedenken wird dadurch gehoben, daß wir die Reihen (7) und (8) aus der Formel (5) von Nr. 479 direkt ebenso hätten finden können, wie die Reihen (5) und (6) aus der Formel (5) von Nr. 478 soeben abgeleitet wurden.

481. Die Formel von Wallis. Ist

$$u_m = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x\, dx,$$

so folgt, weil $\sin^m x$ mit wachsendem positiven m abnimmt, nach Satz 14, Nr. 413:

$$u_{2k+1} < u_{2k} < u_{2k-1}.$$

In (3) und (4), Nr. 477, sind nun die Werte von u_m für $m = 2k - 1$ und $m = 2k$ ermittelt, wobei k eine ganze positive Zahl bedeutet. Daraus folgt:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdots 2k}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)} < \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2k} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k-2)}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}$$

oder

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k-1}.$$

Der Quotient aus dem links und rechts stehenden Produkte ist $2k:(2k+1)$, nähert sich also mit wachsendem k der Eins. Die beiden Produkte, von denen das eine kleiner und das andere größer als $\frac{1}{2}\pi$ ist, müssen sich daher umsomehr der Zahl $\frac{1}{2}\pi$ nähern, je größer k gewählt wird. Folglich ist $\frac{1}{2}\pi$ der Grenzwert jedes der beiden Produkte für $\lim k = +\infty$, d. h. $\frac{1}{2}\pi$ ist als Produkt von unendlich vielen Faktoren darstellbar:

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdots$$

Diese merkwürdige Formel wurde von *Wallis* noch vor der Erfindung der Differentialrechnung aufgestellt.

§ 3. Die Methode der Substitution bei bestimmten Integralen.

482. Über die Transformation konvergenter Integrale. Wir kommen hier noch einmal auf die Substitutionsmethode von Nr. 417 zurück, die wir im vorhergehenden Paragraphen gelegentlich angewandt haben und die überhaupt bei der Berechnung von bestimmten Integralen von großem Werte ist. Es erscheint angebracht, hier einige auf diese Methode bezügliche Einzelheiten genauer zu erörtern.

Machen wir zu diesem Zwecke folgende sehr bestimmte Voraussetzungen:

Es soll t eine Funktion von x in dem Variabilitätsbereiche von x_0 bis X sein. Für $x = x_0$ sei $t = t_0$ und für $x = X$ sei $t = T$. Es soll ferner x eine Funktion von t in dem Variabilitätsbereiche von t_0 bis T sein. Nach der Definition der Funktion in Nr. 6 bedeutet dies: Zu jedem x im Bereiche von x_0 bis X soll *ein* Wert von t im Bereiche von t_0 bis T gehören, und *umgekehrt*. Wir setzen ferner voraus, daß diese beiden zueinander inversen Funktionen:

(1) $$t = \Phi(x), \quad x = \varphi(t)$$

überall im Variabilitätsbereiche von x_0 bis X bzw. von t_0 bis T stetige Ableitungen haben, also auch selbst stetig seien (nach Satz 1, Nr. 27).

Ist nun $f(x)$ eine im Intervalle von x_0 bis X stetige Funktion von x, so liefert die Anwendung der Substitution $x = \varphi(t)$:

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Der neue Integrand $f(\varphi)\varphi'$ ist nach Satz 8, Nr. 22, und nach Satz 15, Nr. 23, eine *stetige* Funktion von t im Intervalle von t_0 bis T.

Umgekehrt: Ist $F(t)$ eine stetige Funktion von t im Intervalle von t_0 bis T, so liefert die Anwendung der *inversen* Substitution $t = \Phi(x)$:

$$(3) \qquad \int_{t_0}^{T} F(t)\,dt = \int_{x_0}^{X} F[\Phi(x)]\,\Phi'(x)\,dx,$$

und der neue Integrand $F(\Phi)\Phi'$ ist eine stetige Funktion von x im Intervalle von x_0 bis X.

Ist n irgendwie im Intervalle von x_0 bis X gewählt und m irgendwie im Intervalle von n bis X, so gehört zu $x = n$ ein Wert $t = \nu$ im Intervalle von t_0 bis T und zu $x = m$ ein Wert μ von t im Intervalle von ν bis T. Alsdann ist:

$$(4) \qquad \int_{n}^{m} f(x)\,dx = \int_{\nu}^{\mu} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Wir können nun die Substitution (1) auch auf Grenzwerte von Integralen anwenden. Z. B. mag $f(x)$ im Intervalle von x_0 bis X überall stetig sein, abgesehen von der Stelle $x = X$. Ist alsdann das Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

konvergent, so ist der Integrand $f(\varphi)\varphi'$ des neuen, in t ausgedrückten Integrals (2) für jedes t im Intervalle von t_0 bis T stetig, abgesehen von der Stelle $t = T$, so daß noch bewiesen werden muß, daß das neue Integral ebenfalls konvergiert. Dies aber folgt sofort aus Satz 8, Nr. 470, und aus der Formel (4).

[482

Denn nach diesem Satze muß es eine Zahl n derart im Intervalle von x_0 bis X geben, daß die linke Seite von (4) absolut genommen kleiner als eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl τ ist, wie auch m im Intervalle von n bis X gewählt sein mag, abgesehen von $m = X$ selbst. Dasselbe gilt daher von der rechten Seite von (4), so daß aus demselben Satze 8, Nr. 470, die Konvergenz des neuen Integrals folgt.

Mittels der Formel (4) beweisen wir ganz ebenso: Wenn $X = +\infty$ ist und das ursprüngliche Integral konvergiert, so konvergiert auch das neue.

Es beruht dies darauf, daß alsdann der Satz 1, Nr. 465, für das ursprüngliche Integral gilt, woraus nach (4) sofort folgt: Ist T endlich, so gilt für das neue Integral der Satz 8, Nr. 470.

Es ist hierbei zu bemerken: Wenn $x = +\infty$ ist und $f(x)$ für jedes $x \geq x_0$ stetig ist, so wissen wir vom Integranden des neuen Integrals, das von t_0 bis T erstreckt ist, daß es für jedes t von t_0 bis T stetig ist, abgesehen von der Stelle $t = T$, wo die Stetigkeit fraglich ist; und deshalb ist es nötig, den Konvergenzbeweis für das neue Integral auch dann zu führen, wenn T endlich bleibt.

Die in Nr. 467, 473 und 474 gegebenen Entwicklungen zeigen nun unmittelbar, daß überhaupt *stets* die Konvergenz des einen Integrals die des anderen nach sich zieht. Wir können also die Substitutionsmethode in der folgenden strengen Fassung ausdrücken:

Satz 15: Ist $x = \varphi(t)$ eine Substitution, die so beschaffen ist, daß zu jedem Werte von x im Intervalle von x_0 bis X gerade ein Wert von t im Intervalle von t_0 bis T gehört, daß ferner umgekehrt vermöge der inversen Substitution $t = \Phi(x)$ zu jedem t im Intervalle von t_0 bis T gerade ein Wert von x im Intervalle von x_0 bis X gehört und überdies $\varphi(t)$ für jedes endliche t im Intervalle von t_0 bis T und $\Phi(x)$ für jedes endliche x im Intervalle von x_0 bis X eine stetige Ableitung hat, so geht das Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

vermöge der Substitution $x = \varphi(t)$ *in das Integral*

$$\int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

und das Integral

$$\int_{t_0}^{T} F(t)\,dt$$

vermöge der inversen Substitution $t = \Phi(x)$ *in das Integral*

$$\int_{x_0}^{X} F[\Phi(x)]\,\Phi'(x)\,dx$$

über. Ist alsdann eines der Integrale konvergent, so ist auch stets das transformierte Integral konvergent. Dabei können die Grenzen der Integrale endlich oder unendlich sein.

Wir dürfen also die Substitutionsmethode auf konvergente Integrale stets ohne weiteres anwenden. Ja selbst, wenn wir noch nicht wissen, ob ein vorgelegtes Integral konvergiert, dürfen wir die Substitution machen. Denn wenn sich dann herausstellt, daß das neue Integral konvergiert oder divergiert, so gilt dasselbe von dem ursprünglichen Integrale.

483. Lineare Substitutionen. Sind wieder x_0 und X die Grenzen des ursprünglichen Integrals, und soll dies Integral vermöge einer Substitution $x = \varphi(t)$ in ein Integral mit den *vorgeschriebenen* Grenzen t_0 und T übergehen, so ist es leicht, insbesondere eine *lineare Substitution:*

$$x = a + bt$$

ausfindig zu machen, die das verlangte leistet. Denn man hat die Konstanten a und b so zu wählen, daß $b \neq 0$ und

$$x_0 = a + bt_0, \quad X = a + bT$$

ist. Daher hat die Substitution die Form:

(1) $$x = x_0 + \frac{X - x_0}{T - t_0}(t - t_0).$$

Die inverse Substitution ist:

(2) $$t = t_0 + \frac{T - t_0}{X - x_0}(x - x_0).$$

Hierbei wurde vorausgesetzt, daß x_0, X und t_0, T sämtlich endlich seien.

Sind x_0, X und t_0 endlich, während $T = \infty$ sein soll, so ist es leicht, eine *linear gebrochene* Substitution

(3) $$x = \frac{a + bt}{a' + b't}$$

herzustellen, die das verlangte leistet. Denn man hat die Konstanten a, b, a', b' so zu wählen, daß erstens die rechte Seite nicht frei von t wird, d. h. daß $ab' - a'b \neq 0$ ist, und daß zweitens

$$x_0 = \frac{a + bt_0}{a' + b't_0}, \quad X = \frac{b}{b'}$$

wird. Ist $t_0 \neq 0$, so können wir z. B. $a' = 0$, $b' = 1$ annehmen, wodurch sich aus (3) ergibt:

(4) $$x = X - (X - x_0)\frac{t_0}{t} \quad \text{und} \quad t = t_0 \frac{X - x_0}{X - x}.$$

Ist dagegen $t_0 = 0$, so leistet die Substitution:

(5) $$x = \frac{x_0 + Xt}{1 + t} \quad \text{und} \quad t = -\frac{x_0 - x}{X - x}$$

das gewünschte.

In analoger Weise können wir verfahren, wenn irgend eine der vier Grenzen x_0, X, t_0, T gleich $+\infty$ oder gleich $-\infty$ ist, ja auch, wenn eine der Grenzen x_0, X gleich $+\infty$ oder $-\infty$ und zugleich eine der beiden Grenzen t_0 und T gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist. Denn wenn z. B. $X = +\infty$, $T = +\infty$ sein soll, so leistet die lineare Substitution:

(6) $$x = x_0 + t - t_0 \quad \text{und} \quad t = t_0 + x - x_0$$

das verlangte.

Hieraus und aus Satz 15 der vorigen Nummer folgt:

Satz 16: Liegt ein konvergentes Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

vor, von dessen Grenzen wenigstens eine endlich ist, so gibt es stets eine lineare oder linear gebrochene Substitution

$$x = a + bt \quad \textit{oder} \quad x = \frac{a + bt}{a' + b't}$$

derart, daß das Integral vermöge ihrer in ein konvergentes Integral

$$\int_{t_0}^{T} F(t)\,dt$$

übergeht, dessen Grenzen irgend zwei vorgeschriebene verschiedene Werte haben, von denen wenigstens einer endlich ist.

Besonders häufig wendet man eine linear gebrochene Substitution an, um ein von 0 bis $+\infty$ erstrecktes Integral in ein von 0 bis 1 erstrecktes Integral zu verwandeln. Es liege also das Integral

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \tag{7}$$

vor. Dabei sei $f(x)$ für jedes $x \geqq 0$ stetig. Das Integral ist nach Satz 4 in Nr. 466 insbesondere dann konvergent, wenn

$$\lim_{x=+\infty} |\, x^k f(x)\,| = K \tag{8}$$

einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Wert hat und $k > 1$ ist. Vermöge der linear gebrochenen Substitution:

$$x = \frac{t}{1-t}, \quad \text{d. h.} \quad t = \frac{x}{1+x}, \quad dx = \frac{dt}{(1-t)^2} \tag{9}$$

geht das Integral (7) über in:

$$\int_0^1 f\left(\frac{t}{1-t}\right) \frac{dt}{(1-t)^2}.$$

Bezeichnen wir es mit

$$\int_0^1 F(t)\,dt, \quad \text{so daß} \quad F(t) = f\left(\frac{t}{1-t}\right) \cdot \frac{1}{(1-t)^2}$$

ist, so wissen wir nach den gemachten Voraussetzungen, daß $F(t)$ im Intervalle $0 \leqq t < 1$ stetig ist, während es dahin gestellt bleibt, ob $F(t)$ auch für $t = 1$ stetig oder unstetig wird. Die Substitution (9) verwandelt nun die Bedingung (8) in:

$$\lim_{t=1} \left| \frac{t^k}{(1-t)^k} f\left(\frac{t}{1-t}\right) \right| = K$$

oder, da $t^k = 1$ für $t = 1$ ist, in:

$$\lim_{t=1} | (1-t)^{2-k} F(t) | = K.$$

Ist nun $k < 2$, also zwischen 1 und 2 gelegen, so heißt dies, daß $F(t)$ für $t = 1$ mit $1:(1-t)$ in niederer als erster Ordnung unendlich groß wird. Ist dagegen $k \geqq 2$, so bleibt $F(t)$ für $t = 1$ endlich. Wir können also, obgleich es nach Satz 15 der vorigen Nummer schon feststeht, von neuem die Konvergenz des in t ausgedrückten Integrals nachweisen: Im Falle $k < 2$ folgt sie nämlich aus Satz 11 in Nr. 471, und im Falle $k \geqq 2$ ist $F(t)$ auch für $t = 1$ stetig. Diesen letzteren Umstand kann man gelegentlich verwerten, weshalb wir ihn so formulieren:

Satz 17: Ist das Integral

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

konvergent und verschwindet $f(x)$ *für* $\lim x = +\infty$ *mit* $1:x$ *in* k^{ter} *Ordnung, wobei* $k > 1$ *ist, so geht das Integral vermöge der linearen Substitution*

$$x = \frac{t}{1-t}$$

in ein konvergentes Integral

$$\int_0^1 F(t)\,dt$$

über, dessen Integrand für $t = 1$ *stetig bleibt, falls* $k \geqq 2$ *ist.*

484. Verschiedene Substitutionen in verschiedenen Teilen des Integrationsintervalles. Da ein Integral nach Satz 9 und 10 von Nr. 412 in eine Summe von Integralen zerlegt werden kann, von denen jedes einem Teile des Gesamtintervalles zugehört, so kann man für verschiedene Teile des Intervalles verschiedene Substitutionen anwenden. Daß dies zuweilen nützlich ist, erläutern wir an dem Beispiele

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}},$$

worin die obere Grenze X positiv sei. Setzen wir

(1) $$x^3 + \frac{1}{x^3} = \frac{2}{t\sqrt{t}}$$

und nehmen wir hierbei $\sqrt{t}$ positiv an, so ist

(2) $$x = \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{1-t^3}}}{\sqrt{t}}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{1-t^3}}}{2t\sqrt{t}\sqrt{1-t^3}}, \quad \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{dt}{2\sqrt[3]{2}\sqrt{t}\sqrt{1-t^3}},$$

so daß das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}},$$

also *elliptisch* wird (vgl. Nr. 440). Wenn nun $\sqrt{1-t^3} > 0$ angenommen wird, so erreicht x, falls t bis Null abnimmt, nach Nr. 129 den Wert Null. Wächst t von 0 bis 1, so gilt dasselbe von x. Dagegen für $t > 1$ gibt die erste Formel (2) imaginäre Werte von x. Also ist die Substitution nur für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ zu gebrauchen. Für das übrigbleibende Intervallstück $1 \leqq x \leqq X$ wählen wir dieselbe Substitution, aber mit abgeändertem Vorzeichen von $\sqrt{1-t^3}$:

(3) $$x = \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{1-t^3}}}{\sqrt{t}}, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{1-t^3}}}{2t\sqrt{t}\sqrt{1-t^3}}, \quad \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = -\frac{dt}{2\sqrt[3]{2}\sqrt{t}\sqrt{1-t^3}}.$$

Denn jetzt hat x, falls t bis Null abnimmt, den Grenzwert $+\infty$. Wächst t von 0 bis 1, so nimmt x von $+\infty$ bis 1 beständig ab. Der Grenze $x = X$ des alten Integrals entspricht nach (1) die obere Grenze für t:

$$T = \frac{\sqrt[3]{4}\,X^2}{\sqrt[3]{1+X^6}^2},$$

die zwischen 0 und 1 liegt und für $X = 1$ ebenfalls gleich Eins ist.

Ist also $X < 1$, so brauchen wir nur die Substitution (2), und es kommt:

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}.$$

Ist dagegen $X > 1$, so zerlegen wir das Integral in das von

0 bis 1 und das von 1 bis X erstreckte und wenden für das zweite die Substitution (3) an, so daß kommt:

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int_1^T \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} + \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\left(\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} - \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}.$$

In jedem Falle also ist das Integral auf elliptische Integrale zurückzuführen.

485. Verwandlung willkürlicher oberer Grenzen in bestimmte. Wir erwähnen noch eine eigenartige Umformung von bestimmten Integralen, die gelegentlich von Wert ist. Liegt das Integral

$$\int_0^X f(x)\,dx$$

vor, dessen obere Grenze X willkürlich sei, während die untere Grenze gleich Null ist, so gibt die Substitution $x = Xt$, $dx = X dt$:

$$\int_0^X f(x)\,dx = \int_0^1 f(Xt)\,X\,dt = X\int_0^1 f(Xt)\,dt.$$

Das neue Integral hat also die beiden völlig *festen* Grenzen 0 und 1, während das ursprüngliche Integral eine *willkürliche* obere Grenze X hatte.

So kommt z. B.:

$$\int_0^X x^n e^{-x} dx = X^{n+1}\int_0^1 t^n e^{-Xt} dt.$$

Im Integrale rechts spielt X die Rolle einer willkürlichen Konstanten.

Ferner ist ebenso:

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = X\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-X^2t^2)(1-k^2X^2t^2)}}.$$

Hierdurch wird das *elliptische Normalintegral erster Gattung* (vgl. Nr. 445), bei dem die obere Grenze X willkürlich ist, durch ein elliptisches Integral zwischen den beiden festen Grenzen 0 und 1 ausgedrückt.

§ 4. Differentiation und Integration der Integrale nach einem Parameter.

486. Vorbemerkungen. Wir wollen annehmen, daß eine Funktion f von x noch von einer willkürlichen Konstanten α, einem sogenannten *Parameter* (vgl. Nr. 93), abhänge, weshalb wir sie mit $f(x,\alpha)$ bezeichnen. Ein zwischen bestimmten Grenzen x_0 und X genommenes Integral von $f(x,\alpha)$ wird alsdann einen von α abhängigen Wert haben, also eine Funktion F von α sein:

(1) $$\int_{x_0}^X f(x,\alpha)\,dx = F(\alpha).$$

Wir werden zeigen, daß man diese Formel unter gewissen Voraussetzungen in der Art *nach dem Parameter α differenzieren* darf, daß man links die Differentiation unter dem Integralzeichen ausführt, so daß folgt:

(2) $$\int_{x_0}^X \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx = F'(\alpha).$$

Ist diese Art der Differentiation erlaubt, so ergibt sich daraus eine wichtige Methode zur Gewinnung der Werte gewisser bestimmter Integrale. So z. B. haben wir in Nr. 477 gesehen, daß für $\alpha > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}$$

ist. Wenn wir hier links unter dem Integralzeichen nach α

differenzieren, was, wie wir sehen werden, erlaubt ist, so folgt sofort:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha^2},$$

also eine neue Integralformel.

Wir wollen ferner zeigen, daß man unter gewissen Voraussetzungen die Formel (1) in der Art *nach α integrieren* darf, daß man links die Integration unter dem auf x bezüglichen Integralzeichen ausführt. Und hieraus fließt alsdann ebenfalls eine Methode zur Gewinnung der Werte mancher Integrale.

Ehe wir die hiermit skizzierten Betrachtungen in Angriff nehmen, schicken wir noch einige Bemerkungen voraus:

Wenn die obere Grenze X des Integrales (1) nicht fest gewählt, sondern veränderlich gelassen wird, so ist der Wert des Integrals nicht nur von α, sondern auch von der Veränderlichen X abhängig, so daß wir alsdann statt (1) die Formel ansetzen:

(3) $$\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)dx = F(X, \alpha).$$

Wir haben es in den folgenden Betrachtungen also mit zwei Funktionen von je zwei Veränderlichen zu tun, nämlich mit $f(x, \alpha)$ und $F(X, \alpha)$. Von der Funktion $f(x, \alpha)$ werden wir voraussetzen, daß sie eine *stetige* Funktion von x und α innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches sei. Nach Satz 7, Nr. 22, bedeutet dies: Ist σ eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl, so gibt es zu jedem Wertepaare x, α innerhalb des Variabilitätsbereiches eine positive Zahl h derart, daß der absolute Betrag des Zuwachses von f, nämlich

(4) $$|\Delta f| = |f(x + \Delta x,\ \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)| < \sigma$$

ist, sobald die absoluten Beträge der Zunahmen Δx und $\Delta\alpha$ von x und α beide kleiner als h sind. Für verschiedene Wertepaare x, α innerhalb des Variabilitätsbereiches kann diese zu σ gehörige Zahl h verschieden groß ausfallen. Wählen wir nun unter allen Werten von h den kleinsten, so folgt, daß an *jeder* Stelle x, α des Variabilitätsbereiches die Bedingung (4) erfüllt ist für $|\Delta x| < h$ und $|\Delta\alpha| < h$. Dies meint man, wenn man

sagt, *daß die stetige Funktion $f(x,\alpha)$ von x und α innerhalb des Variabilitätsbereiches gleichmäßig stetig ist.* (Vgl. Nr. 364 und Nr. 425). Das Wort *gleichmäßig* bezieht sich darauf, daß bei vorgegebener beliebig kleiner positiver Zahl σ an *allen* Stellen des Variabilitätsbereiches für *denselben* Zahlenwert h jene Bedingung erfüllt ist.

487. Das Integral als Funktion der oberen Grenze und eines Parameters. Es sei $f(x,\alpha)$ eine stetige Funktion von x und α innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches, der z. B. durch zwei für x und α vorgeschriebene Intervalle festgelegt sei. Sind x_0 und X dem für x erlaubten Intervalle entnommen und gehört α dem für α erlaubten Intervalle an, so ist das Integral

$$F(X,\alpha)=\int_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx \tag{1}$$

mit veränderlich gelassener oberer Grenze eine Funktion von X und α in demselben Variabilitätsbereiche, in dem $f(x,\alpha)$ als Funktion von x und α stetig ist. Nach Satz 6 in Nr. 410 ist F eine stetige Funktion von X. Wir wollen nun aber zeigen, daß F eine stetige Funktion von X und α ist. Es genügt dabei nicht, nur noch den Nachweis zu führen, daß F eine stetige Funktion von α ist, vielmehr müssen wir den Zuwachs ΔF ins Auge fassen, den F erfährt, wenn sowohl X um Δx als auch α um $\Delta\alpha$ wächst. Er ist:

$$\begin{aligned}\Delta F &= \int_{x_0}^{X+\Delta X} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx\\ &= \int_{x_0}^{X} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx + \int_{X}^{X+\Delta X} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx\\ &= \int_{x_0}^{X} [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx + \int_{X}^{X+\Delta X} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx,\end{aligned}$$

so daß nach Satz 2 in Nr. 4

$$|\Delta F| \leq \left|\int_{x_0}^{X} [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx\right| + \left|\int_{X}^{X+\Delta X} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx\right| \tag{2}$$

wird. Ist nun σ eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl und ist h die für den ganzen Variabilitätsbereich von $f(x, \alpha)$ gültige zugehörige positive Zahl, für die überall im Bereiche die Formel (4) der vorigen Nummer gilt, so ist, sobald $|\Delta\alpha| < h$ gewählt wird, insbesondere auch:

$$|f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)| < \sigma.$$

Hieraus folgt nach Satz 16, Nr. 414, und Satz 14, Nr. 413:

$$(3) \quad \left| \int_{x_0}^{X} [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)] dx \right| < \left| \int_{x_0}^{X} \sigma dx \right| = \sigma |X - x_0|.$$

Nach Satz 20, Nr. 419, gibt es ferner zu der gewählten Zahl σ eine positive Zahl k derart, daß unter der Voraussetzung $|\Delta X| < k$ auch

$$\left| \int_{X}^{X+\Delta X} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx \right| < \sigma$$

ist. Die Zahl k kann dabei für verschiedene Werte von X verschieden ausfallen. Wenn wir nun h kleiner als die kleinste aller dieser Zahlen k annehmen, so bestehen die beiden letzten Ungleichungen überall im Variabilitätsbereiche für $|\Delta X| < h$ und $|\Delta\alpha| < h$, so daß nach (2)

$$|\Delta F| < \sigma(|X - x_0| + 1)$$

ist. Sobald $X - x_0$ endlich ist, können wir aber, falls eine beliebig kleine positive Zahl τ vorgeschrieben wird,

$$\sigma = \frac{\tau}{|X - x_0| + 1}$$

annehmen, so daß $|\Delta F| < \tau$ wird unter den Annahmen $|\Delta F| < h$ und $|\Delta\alpha| < h$. Dies aber bedeutet nach Satz 7, Nr. 22, daß $F(X, \alpha)$ eine stetige Funktion von X und α ist.

Satz 18: Ist $f(x, \alpha)$ eine stetige Funktion von x und α innerhalb eines Variabilitätsbereiches für x und α, so ist auch das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha) dx$$

eine stetige Funktion von X und α innerhalb desselben Bereiches, sobald das endliche Integrationsintervall von x_0 bis X und α dem Bereiche angehören.

488. Differentiation des Integrals nach einem Parameter. Wir behalten die Bezeichnungen der vorigen Nummer bei und wollen zu den dort gemachten Voraussetzungen nunmehr noch die hinzufügen, *daß $f(x,\alpha)$ eine stetige partielle Ableitung $f_\alpha(x,\alpha)$ nach α innerhalb des Variabilitätsbereiches habe.* Alsdann wollen wir zeigen, daß die stetige Funktion

$$F(X,\alpha)=\int_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx$$

von X und α eine partielle Ableitung nach α hat. Daß nämlich F eine partielle Ableitung nach X hat, wissen wir schon, da ja nach der Definition des Integrals $F_X(X,\alpha)$ gleich $f(X,\alpha)$ ist.

Um die Ableitung von F nach α zu gewinnen, halten wir X fest und lassen α um $\Delta\alpha$ wachsen. Dann erfährt F den Zuwachs

$$(1)\quad \Delta F=\int_{x_0}^{X} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx=\int_{x_0}^{X}[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx.$$

Nach dem Mittelwertsatze 3, Nr. 28, gibt es unter den gemachten Voraussetzungen einen positiven echten Bruch θ, für den

$$(2)\qquad f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)=\Delta\alpha\cdot f_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)$$

ist; dabei kann θ für verschiedene Werte von x verschieden ausfallen. Mithin folgt aus (1):

$$\frac{\Delta F}{\Delta\alpha}=\int_{x_0}^{X} f_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)\,dx.$$

Ist σ eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl, so gibt es wegen der Stetigkeit von $f_\alpha(x,\alpha)$ eine positive Zahl h derart, daß für $|\Delta\alpha|<h$ auch

$$|f_\alpha(x,\alpha+\Delta\alpha)-f_\alpha(x,\alpha)|<\sigma$$

ist. Da dann auch $|\theta\Delta\alpha|<h$ ist, so ist um so mehr

$$f_\alpha(x,\alpha)-\sigma<f_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)<f_\alpha(x,\alpha)+\sigma.$$

Da die in der Mitte stehende Funktion nach (2) hinsichtlich α stetig ist und dasselbe nach Voraussetzung von $f_\alpha(x, \alpha)$ gilt, so können wir alle drei Glieder der Ungleichung integrieren. Nach Satz 14, Nr. 413, ergibt sich dadurch, daß

$$\frac{\Delta F}{\Delta \alpha} = \int_{x_0}^{X} f_\alpha(x, \alpha + \theta \Delta \alpha)\, dx$$

zwischen

$$\int_{x_0}^{X} f_\alpha(x, \alpha)\, dx - \sigma(X - x_0) \quad \text{und} \quad \int_{x_0}^{X} f_\alpha(x, \alpha)\, dx + \sigma(X - x_0)$$

liegt. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{X} f_\alpha(x, \alpha)\, dx, \tag{3}$$

vorausgesetzt, daß $X - x_0$ endlich ist, da nur unter dieser Voraussetzung $\sigma(X - x_0)$ den Grenzwert Null hat.

Satz 19: Ist $f(x, \alpha)$ eine stetige Funktion von x und α innerhalb eines Variabilitätsbereiches für x und α und hat sie daselbst eine stetige partielle Ableitung $f_\alpha(x, \alpha)$ nach α, so hat das Integral

$$F(X, \alpha) = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx$$

die partielle Ableitung nach α:

$$F_\alpha(X, \alpha) = \int_{x_0}^{X} f_\alpha(x, \alpha)\, dx,$$

falls das Intervall von x_0 bis X endlich ist und dem Variabilitätsbereiche angehört.

Die Formel des Satzes läßt sich auch so schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx$$

und besagt also, daß die Zeichen

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \quad \text{und} \quad \int_{x_0}^{X} \ldots dx$$

unter den gemachten Voraussetzungen *vertauschbar* sind. Oder auch: *Die Differentiation des Integrals nach dem Parameter α darf unterhalb des Integralzeichens am Integranden ausgeführt werden.*

Beispiel: Da

$$\int_0^X \frac{dx}{1+\alpha^2 x^2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arc\,tg} \alpha X$$

ist, wenn der Arkus zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gewählt wird, so ergibt sich hieraus durch Differentiation nach α, indem wir links unterhalb des Integralzeichens nach α differenzieren:

$$-\int_0^X \frac{2\alpha x^2 dx}{(1+\alpha^2 x^2)^2} = -\frac{1}{\alpha^2} \operatorname{arc\,tg} \alpha X + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{X}{1+\alpha^2 X^2},$$

also z. B. für $\alpha = 1$:

$$\int_0^X \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} X - \frac{1}{2} \frac{X}{1+X^2},$$

eine Formel, die wir natürlich auch durch direkte Integration hätten finden können.

489. Integration des Integrals nach einem Parameter. Wir machen wieder dieselben Annahmen wie in der vorletzten Nummer. Dagegen brauchen wir jetzt *nicht* die Voraussetzung der vorigen Nummer, daß $f(x, \alpha)$ eine stetige partielle Ableitung nach α habe.

Wir können nun das Integral

$$\int_{x_0}^X f(x, \alpha)\, dx,$$

wenn wir unter X ebenso wie unter x_0 eine bestimmte Zahl verstehen, als eine Funktion von α betrachten und, da diese Funktion nach Satz 18, Nr. 487, stetig ist, auch hinsichtlich α *integrieren*, etwa von α_0 bis A. Dabei setzen wir voraus, daß *das Intervall von α_0 bis A* dem Variabilitätsbereiche angehöre. Wir finden so die Funktion:

(1) $$u = \int_{\alpha_0}^A \left[\int_{x_0}^X f(x, \alpha)\, dx \right] d\alpha.$$

Andererseits können wir die gegebene Funktion $f(x, \alpha)$, indem wir x darin die Rolle des Parameters spielen lassen und α als Veränderliche auffassen, hinsichtlich α von α_0 bis A integrieren. Das hervorgehende Integral:

$$\int_{\alpha_0}^{A} f(x, \alpha)\, d\alpha$$

ist eine Funktion von x, wenn wir uns α_0 und A bestimmt gegeben denken. Da diese Funktion nach dem zitierten Satze stetig ist, so hat sie ein über x von x_0 bis X erstrecktes Integral:

$$(2) \qquad v = \int_{x_0}^{X} \left[\int_{\alpha_0}^{A} f(x, \alpha)\, d\alpha \right] dx.$$

Wir wollen nun beweisen, daß $u = v$ ist.

Zu diesem Zwecke betrachten wir X und A als veränderlich, *so daß u und v Funktionen von X und A sind.* Die in (1) auftretende eckige Klammer enthält eine Funktion von X und α, die eine Ableitung $f(X, \alpha)$ nach X hat. Indem diese Funktion hinsichtlich α integriert wird, spielt X die Rolle des Parameters und α die der Veränderlichen. Nach Satz 19 ergibt sich daher, daß außer

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial A} = \int_{x_0}^{X} f(x, A)\, dx$$

noch

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \int_{\alpha_0}^{A} \frac{\partial}{\partial X} \left[\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx \right] d\alpha$$

ist, da wir nach dem Parameter X unterhalb des auf α bezüglichen Integralzeichens differenzieren dürfen. Hieraus aber folgt:

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial X} = \int_{\alpha_0}^{A} f(X, \alpha)\, d\alpha.$$

Die Funktion u von X und A hat also die Ableitungen (3) und (4). Die Funktion v ist gerade so wie u gebaut, nur

haben X und A ihre Rolle vertauscht. Wir erkennen also ebenso, daß für v diejenigen beiden Gleichungen gelten, die aus (3) und (4) durch Vertauschen von u mit v, von A mit X, von α mit x und von α_0 mit x_0 hervorgehen:

$$\frac{\partial v}{\partial X} = \int_{\alpha_0}^{A} f(X, \alpha)\, d\alpha, \quad \frac{\partial v}{\partial A} = \int_{x_0}^{X} f(x, A)\, dx.$$

Aber hieraus und aus (3) und (4) folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \frac{\partial v}{\partial A} = \frac{\partial u}{\partial A}.$$

Nach Satz 10 von Nr. 74 ist daher *die Differenz* $u - v$ *konstant.*

Daß diese konstante Differenz gleich Null ist, erkennen wir daraus, daß sie insbesondere für $A = \alpha_0$ den Wert Null hat. In der Tat ist für $A = \alpha_0$ nach (1) augenscheinlich $u = 0$ und nach (2) auch $v = 0$, d. h. $u - v = 0$. Demnach ist bewiesen:

Satz 20: Ist $f(x, \alpha)$ eine stetige Funktion von x und α innerhalb eines Bereiches für x und α, dem die endlichen Intervalle von x_0 bis X und von α_0 bis A angehören, so ist

$$\int_{\alpha_0}^{A} \left[\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx \right] d\alpha = \int_{x_0}^{X} \left[\int_{\alpha_0}^{A} f(x, \alpha)\, d\alpha \right] dx.$$

In Worten: Soll das Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx$$

hinsichtlich α von α_0 bis A integriert werden, so darf diese Integration nach α unterhalb des auf x bezüglichen Integralzeichens auf den Integranden $f(x, \alpha)$ ausgeübt werden.

Unter der Voraussetzung der Stetigkeit von $f(x, \alpha)$ innerhalb der Integrationsintervalle sind also die Zeichen

$$\int_{x_0}^{X} \ldots dx \quad \text{und} \quad \int_{\alpha_0}^{A} \ldots d\alpha$$

vertauschbar.

[489

Beispiel: Zur Erläuterung diene das folgende einfache Beispiel. Nach der Methode der teilweisen Integration oder auch nach (1) in Nr. 454 ist

$$\int_0^X x \sin \alpha x \, dx = \frac{\sin \alpha X - \alpha X \cos \alpha X}{\alpha^2}.$$

Wir wollen über α von α_0 bis A integrieren und können dies links *unterhalb* des auf x bezüglichen Integralzeichens tun, also hier $\sin \alpha x$ nach α integrieren. Da $\int \sin \alpha x \, d\alpha$ gleich $-\cos \alpha x : x +$ konst. ist, so folgt:

$$\int_0^X (\cos \alpha_0 x - \cos A x) \, dx = \int_{\alpha_0}^A \frac{\sin \alpha X - \alpha X \cos \alpha X}{\alpha^2} \, d\alpha$$

oder:

$$\frac{\sin \alpha_0 X}{\alpha_0} - \frac{\sin A X}{A} = \int_{\alpha_0}^A \frac{\sin \alpha X - \alpha X \cos \alpha X}{\alpha^2} \, d\alpha.$$

Führen wir statt α_0, α, A die Bezeichnungen z_0, z, Z ein und setzen wir $X = 1$, so kommt, wenn wir beide Seiten der Gleichung vertauschen, die Integralformel:

$$\int_{z_0}^Z \frac{\sin z - z \cos z}{z^2} \, dz = \frac{\sin z_0}{z_0} - \frac{\sin Z}{Z}.$$

Daß in der Tat

$$\int \frac{\sin z - z \cos z}{z^2} \, dz = -\frac{\sin z}{z} + \text{konst.}$$

ist, läßt sich allerdings auch leicht direkt erkennen.

490. Ausdehnung der Ergebnisse auf Integrale mit endlosem Intervalle. Es sei wieder $f(x, \alpha)$ eine in einem Variabilitätsbereiche stetige Funktion von x und α. Der Bereich enthalte alle Werte $x \geqq x_0$, so daß das Integral

(1) $$J = \int_{x_0}^{+\infty} f(x, \alpha) \, dx$$

gebildet werden kann. Wir wollen annehmen, daß dies Integral für jeden erlaubten Wert von α *konvergiere.*

Da jetzt das Intervall endlos ist, können wir den Satz 18 von Nr. 487 nicht anwenden. Wir werden aber beweisen, daß J auch jetzt eine *stetige* Funktion von α ist, vorausgesetzt, daß α dem erlaubten Bereiche angehört. Zu diesem Zwecke lassen wir α innerhalb des Bereiches um $\Delta\alpha$ wachsen. Dann erfährt J die Zunahme

$$\Delta J = \int_{x_0}^{+\infty} f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx.$$

Da die beiden Integrale auf der rechten Seite nach Voraussetzung konvergieren, lassen sie sich nach Satz 9, Nr. 412, zusammenfassen (vgl. die Schlußbemerkungen in Nr. 474):

$$(2) \qquad \Delta J = \int_{x_0}^{+\infty} [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx.$$

Weil das rechts stehende Integral konvergiert, so gibt es, falls σ eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl ist, nach Nr. 464 eine positive Zahl n derart, daß für jedes $X \geqq n$

$$(3) \qquad -\sigma < \Delta J - \int_{x_0}^{X} [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx < \sigma$$

ist. Das hier auftretende Integral aber ist der Zuwachs, den

$$\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx$$

erfährt, wenn α um $\Delta\alpha$ zunimmt; und für dieses Integral gilt der Satz 18, Nr. 487, da hier die obere Grenze endlich ist. Also können wir $|\Delta\alpha|$ so klein wählen, daß der Zuwachs dieses Integrals absolut genommen kleiner als σ wird:

$$\left| \Delta \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx \right| < \sigma.$$

Nach (3) ist aber:

$$\Delta \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx - \sigma < \Delta J < \Delta \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx + \sigma.$$

Folglich liegt ΔJ zwischen -2σ und $+2\sigma$. Demnach erkennen wir, wenn wir noch $2\sigma = \tau$ setzen:

Ist τ eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl, so wird, falls $|\Delta\alpha|$ hinreichend klein ist, auch $|\Delta J|$ kleiner als τ. *Mithin ist J eine stetige Funktion von α.*

Das Integral (1) darf mithin hinsichtlich α von α_0 bis A integriert werden, falls das Intervall von α_0 bis A dem Bereiche angehört. Auf diesem Wege geht

$$(4) \qquad \int\limits_{\alpha_0}^{A} J\,d\alpha = \int\limits_{\alpha_0}^{A}\Big[\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\Big]\,d\alpha$$

hervor. Wir wollen nun beweisen, daß wir rechts die Reihenfolge der beiden Integrationen vertauschen können.

Da J ein konvergentes Integral ist, so gibt es, falls σ eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl bedeutet, nach Nr. 464 eine positive Zahl n derart, daß für jedes $X \geqq n$

$$\int\limits_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx - \sigma < J < \int\limits_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx + \sigma$$

ist. Alle drei Glieder dieser Ungleichung sind stetige Funktionen von α. Nach Satz 14, Nr. 413, ergibt sich daher bei der Integration nach α:

$$(5) \quad \int\limits_{\alpha_0}^{A}\Big[\int\limits_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx\Big]d\alpha - \sigma(A-\alpha_0) < \int\limits_{\alpha_0}^{A} J\,d\alpha < \int\limits_{\alpha_0}^{A}\Big[\int\limits_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx\Big]d\alpha + \sigma(A-\alpha_0),$$

wenn wir $A > \alpha_0$ annehmen. Wäre $A < \alpha_0$, so wäre $>$ durch $<$ zu ersetzen. Auf die links und rechts stehenden Doppelintegrale aber ist der Satz 20 der vorigen Nummer anwendbar, da die Intervalle endlich sind:

$$\int\limits_{x_0}^{X}\Big[\int\limits_{\alpha_0}^{A} f(x,\alpha)\,d\alpha\Big]dx - \sigma(A-\alpha_0) < \int\limits_{\alpha_0}^{A} J\,d\alpha < \int\limits_{x_0}^{X}\Big[\int\limits_{\alpha_0}^{A} f(x,\alpha)\,d\alpha\Big]dx + \sigma(A-\alpha_0).$$

Demnach kommt, wenn wir den Wert (4) einsetzen:

$$\Big|\int\limits_{\alpha_0}^{A}\Big[\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\Big]\,d\alpha - \int\limits_{x_0}^{X}\Big[\int\limits_{\alpha_0}^{A} f(x,\alpha)\,d\alpha\Big]\,dx\Big| < \sigma(A-\alpha_0).$$

Weil $A - \alpha_0$ endlich ist, so ist $\sigma(A - \alpha_0)$ eine beliebig klein zu wählende positive Zahl und X beliebig groß anzunehmen. Also geht für $\lim \sigma = 0$, d. h. für $\lim X = +\infty$ hervor:

$$\int_{x_0}^{A}\left[\int_{x_0}^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right]d\alpha = \int_{x_0}^{+\infty}\left[\int_{\alpha_0}^{A} f(x,\alpha)\,d\alpha\right]dx,$$

was zu beweisen war.

Satz 21: Ist $f(x,\alpha)$ eine stetige Funktion von x und α innerhalb eines Bereiches für x und α, dem alle Werte $x \geqq x_0$ angehören, und ist das Integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$$

innerhalb des Bereiches überall konvergent, so ist es eine stetige Funktion von α. Soll diese Funktion hinsichtlich α innerhalb des Bereiches integriert werden, so darf die Integration unterhalb des auf x bezüglichen Integralzeichens auf den Integranden $f(x,\alpha)$ ausgeübt werden.

Wir haben hiermit den Satz 20 der vorigen Nummer auf Integrale mit endlosen Intervallen ausgedehnt. Um nun auch den Satz 19 von Nr. 488, der sich auf die *Differentiation* nach dem Parameter α bezieht, auf das konvergente Integral J auszudehnen, machen wir wie damals noch die Annahme, daß $f(x,\alpha)$ überall im Bereiche eine stetige Ableitung nach α habe.

Nach (2) ist nun:

$$(6)\qquad \frac{\Delta J}{\Delta\alpha} = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx.$$

Hieraus folgt beim Grenzübergange zu $\lim \Delta\alpha = 0$, daß

$$(7)\qquad \frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_0}^{+\infty} f_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

ist, *vorausgesetzt, daß das rechts stehende Integral konvergiert.* Daher finden wir:

Satz 22: Ist $f(x,\alpha)$ eine stetige Funktion von x und α innerhalb eines Bereiches für x und α, dem alle Werte $x \geqq x_0$

angehören, hat ferner $f(x, \alpha)$ überall im Bereiche eine stetige partielle Ableitung $f_\alpha(x, \alpha)$ nach α und sind die beiden Integrale

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \quad \textit{und} \quad \int_{x_0}^{+\infty} f_\alpha(x, \alpha)\, dx$$

konvergent, so ist das erste Integral eine stetige Funktion von α, deren Ableitung das zweite Integral angibt, d. h. es ist:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

Es bedarf keiner weiteren Auseinandersetzungen, um klar zu machen, daß die Sätze 21 und 22 auch dann gelten, wenn von den Grenzen der auf x bezüglichen Integrale irgend eine gleich $+\infty$ oder $-\infty$ oder die eine gleich $+\infty$ und die andere gleich $-\infty$ ist. Vgl. Nr. 467. Natürlich sind dann auch immer für $f(x, \alpha)$ die auf das betreffende Intervall bezüglichen Annahmen zu machen.

491. Ausdehnung der Ergebnisse auf Integrale mit unstetigen Integranden. Es sei nunmehr $f(x, \alpha)$ eine für $x_0 \leqq x < X$ und $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq A$ stetige Funktion von x und α, *dagegen sei $f(x, \alpha)$ unstetig für $x = X$.* Jedoch soll das Integral

$$J = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha) dx \tag{1}$$

konvergent sein für alle Werte α des Bereiches.

Wegen der Unstetigkeit des Integranden für $x = X$ können wir den Satz 18 von Nr. 487 nicht anwenden. Wir können aber beweisen, daß J auch jetzt eine stetige Funktion von α ist, und zwar geschieht dies ganz analog wie in voriger Nummer. Denn es ist der Zuwachs von J, falls α um $\Delta\alpha$ zunimmt:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{X} [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx, \tag{2}$$

wobei das rechts stehende Integral konvergiert. Nach Nr. 470 gibt es, wie klein auch eine positive Zahl σ gewählt sein mag,

einen Wert n im Intervalle $x_0 \leqq n < X$ derart, daß für jedes m im Intervalle $n \leqq m < X$

(3) $$-\sigma < \Delta J - \int_{x_0}^{m} [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\,dx < \sigma$$

wird. Auf das Integral

$$\int_{x_0}^{m} f(x, \alpha)\,dx$$

ist der Satz 18, Nr. 487, anwendbar. Wir können also $|\Delta\alpha|$ so klein wählen, daß der Zuwachs, den das Integral erfährt, wenn α um $\Delta\alpha$ zunimmt, absolut genommen kleiner als σ wird. Dieser Zuwachs ist das in (3) stehende Integral. Also folgt ganz ebenso wie in voriger Nummer, daß $|\Delta J| < 2\sigma$ wird, womit bewiesen ist, *daß J eine stetige Funktion von α ist.*

Demnach darf J hinsichtlich α von α_0 bis A integriert werden, und genau ebenso wie in voriger Nummer ergibt sich, daß diese Integration unterhalb des auf x bezüglichen Integralzeichens ausgeübt werden darf. Denn die Formel (5) der vorigen Nummer gilt auch jetzt, sobald wir darin X durch m ersetzen.

Satz 23: Ist $f(x, \alpha)$ eine stetige Funktion von x und α innerhalb eines Bereiches für x und α, dem alle Werte von x_0 bis X, abgesehen von X selbst, angehören, während $f(x, \alpha)$ für $x = X$ unstetig ist, und ist überdies das Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\,dx$$

für alle Werte α des Bereiches konvergent, so ist es eine stetige Funktion von α. Soll diese Funktion innerhalb des Bereiches hinsichtlich α integriert werden, so darf die Integration unterhalb des auf x bezüglichen Integralzeichens auf den Integranden $f(x, \alpha)$ ausgeübt werden.

Ferner ergibt sich analog dem Satze 22 der vorigen Nummer:

Satz 24: Ist $f(x, \alpha)$ eine stetige Funktion von x und α innerhalb eines Bereiches für x und α, dem alle Werte von x_0 bis X, abgesehen von X selbst, angehören, während $f(x, \alpha)$ für

$x = X$ unstetig ist, hat ferner $f(x, \alpha)$ überall im Bereiche, abgesehen von $x = X$, eine stetige partielle Ableitung $f_\alpha(x, \alpha)$ nach α und sind die beiden Integrale

$$\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx \quad \textit{und} \quad \int_{x_0}^{X} f_\alpha(x, \alpha)\, dx$$

konvergent, so ist das erste Integral eine stetige Funktion von α, deren Ableitung das zweite Integral angibt, d. h. es ist:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

Es bedarf auch hier keiner weiteren Auseinandersetzung darüber, daß Sätze analog den Sätzen 23 und 24 auch dann gelten, wenn $f(x, \alpha)$ für mehrere Werte von x innerhalb des Integrationsintervalles von x_0 bis X unstetig wird. Vgl. Nr. 473. Auch ist es klar, wie man durch Zerlegung des Integrationsintervalles und Anwendung der vier Sätze 21 bis 24 auch den Fall erledigen kann, in dem erstens das Integrationsintervall für x endlos ist und zweitens im Intervalle Unstetigkeiten von $f(x, \alpha)$ vorkommen. Vgl. Nr. 474.

Bei der *Differentiation* eines konvergenten Integrals nach einem Parameter α ist, wie die Sätze 22 und 24 zeigen, immer noch festzustellen, ob dasjenige Integral, das bei der Differentiation des Integranden nach α hervorgeht, auch wirklich konvergiert, während bei der *Integration* nach α von vornherein feststeht, daß das hervorgehende Integral konvergent ist. Man erinnere sich daran, daß eine analoge Bemerkung bei der Differentiation und Integration einer gleichmäßig konvergenten unendlichen Reihe zu machen ist, vgl. Nr. 426 und 427.

§ 5. Anwendungen auf Beispiele.

492. Die Integrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha)^n}$ und $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{n-1}\, dx$.

Nach (1) in Nr. 477 ist:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \qquad (\text{für } \alpha > 0).$$

Dabei ist $\sqrt{\alpha}$ positiv. Da die rechten Seiten Ableitungen nach α haben, so sind diese Ableitungen nach Satz 22, Nr. 490, gleich denjenigen Integralen, die sich durch Differentiation nach α unterhalb der Integralzeichen ergeben. Daß nämlich die hervorgehenden Integrale konvergieren, erkennt man sofort nach Satz 4, Nr. 466. Wir können wiederholt nach α differenzieren. Tun wir dies $(n-1)$mal, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}
&(1) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha)^n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}^{2n-1}},\\
&(2) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}x^{n-1}dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{\alpha^n}.
\end{aligned}\right\}\ (\text{für } \alpha > 0).$$

Dabei ist n eine positive ganze Zahl und $\sqrt{\alpha}$ positiv. Aus (2) folgt für $\alpha = 1$:

$$(3) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx = (n-1)!$$

Die Integration des zweiten der beiden zu Anfang erwähnten Integrale hinsichtlich α gibt für $h > 0$ und $k > 0$ nach Satz 21, Nr. 490, da

$$\int_h^k e^{-\alpha x}d\alpha = \frac{e^{-hx}-e^{-kx}}{x}$$

ist:

$$(4) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-hx}-e^{-kx}}{x}dx = \ln\frac{k}{h} \qquad (\text{für } h > 0,\ k > 0).$$

Insbesondere folgt für $h = 1$:

$$(5) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-kx}}{x}dx = \ln k \qquad (\text{für } k > 0).$$

493. Das Integral $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-hx}-e^{-kx}}{x}\cos bx dx$ und verwandte Integrale. Das erste dieser Integrale ist im

Falle $b = 0$, $h > 0$, $k > 0$ schon soeben berechnet worden. Im übrigen gehen wir hier von den Formeln (2) von Nr. 477 aus:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos bx\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + b^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin bx\,dx = \frac{b}{\alpha^2 + b^2}$$

(für $\alpha > 0$).

Integrieren wir sie hinsichtlich α von $h > 0$ bis $k > 0$, so kommt, weil die Integration auf den linken Seiten unter den Integralzeichen ausgeführt werden darf:

$$(1)\quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-hx} - e^{-kx}}{x} \cos bx\,dx = \tfrac{1}{2} \ln \frac{k^2 + b^2}{h^2 + b^2},$$

$$(2)\quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-hx} - e^{-kx}}{x} \sin bx\,dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{b} - \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{b}$$

(für $h > 0, k > 0$).

Dabei sind die Arkus zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen.

Lassen wir h bis Null abnehmen, so erreicht die rechte Seite der Formel (2) den bestimmten endlichen Grenzwert $\operatorname{arc\,tg}(k:b)$. Erreicht dabei auch das links stehende Integral einen bestimmten endlichen Wert, so ist der Grenzübergang statthaft.

Aber es liegt noch eine Schwierigkeit vor: Beim Grenzübergange zu $\lim h = 0$ darf zunächst nicht ohne weiteres $\lim hx = 0$ gesetzt werden, da ja x bis $+\infty$ wachsen soll. Wir wissen also nur, daß hx positiv ist. Weil wir aber die Formel (2) so schreiben können:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{-kx}}{x} - \frac{1 - e^{-hx}}{x} \right) \sin bx\,dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{b} - \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{b}$$

und weil

$$\frac{1 - e^{-hx}}{x} = \frac{1 - e^{-hx}}{hx} \cdot h$$

ist und dieser Ausdruck für bis Null abnehmendes h stets den Grenzwert Null hat, ob nun $hx = 0$ oder endlich und positiv oder gleich $+\infty$ ist, so folgt beim Grenzübergange für $\lim h = 0$:

$$(3)\quad \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-kx}}{x} \sin bx\,dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{b} \qquad (\text{für } k > 0),$$

sobald noch bewiesen ist, daß das Integral konvergiert. Es genügt, das letztere für $b > 0$ zu zeigen. Wir machen die Substitution $bx = z$ und setzen die positive Konstante $k : b$ gleich m, so daß das Integral übergeht in:

$$\int_0^{+\infty} (1 - e^{-mz}) \frac{\sin z}{z} dz.$$

Der erste Faktor des Integranden ist stets positiv und nimmt von 0 bis 1 zu, wenn z von 0 bis $+\infty$ wächst. Nach dem dritten Mittelwertsatze 24 in Nr. 424 ist daher für $Z > 0$:

$$\int_0^Z (1 - e^{-mz}) \frac{\sin z}{z} dz = (1 - e^{-mZ}) \int_\zeta^Z \frac{\sin z}{z} dz,$$

wobei ζ im Intervalle von 0 bis Z liegt. Der erste Faktor rechts hat für $\lim Z = +\infty$ den Grenzwert Eins und der zweite nach Nr. 469 einen bestimmten endlichen Wert. Damit ist der Nachweis der Richtigkeit der Formel (3) beendet.

Wir wollen weiterhin k in (3) nach $+\infty$ streben lassen. Dabei liegt eine ähnliche Schwierigkeit vor wie vorher, jedoch nicht für die obere Grenze $x = +\infty$, sondern für die untere Grenze $x = 0$. Denn für $\lim x = 0$ und $\lim k = +\infty$ wird $\lim kx$ unbestimmt, so daß wir also nicht ohne weiteres für $\lim k = +\infty$ für kx den Wert $+\infty$ setzen dürfen, für den sich aus (3) ja ergeben würde:

$$(4) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \tfrac{1}{2}\pi \qquad (\text{für } b > 0),$$

eine Formel, in der die linke Seite nach Nr. 469 konvergiert. Vielmehr müssen wir noch folgendes feststellen: Ist σ eine beliebig kleine positive Zahl, so muß gezeigt werden, daß

$$(5) \qquad \int_0^\sigma \frac{1 - e^{-kx}}{x} \sin bx dx$$

für $\lim k = +\infty$ doch beliebig klein wird. Da $b > 0$ vorausgesetzt wurde, ist der Integrand dieses von 0 bis σ erstreckten

Integrals positiv. Nach Satz 14, Nr. 413, ist der folglich positive Wert dieses Integrals für *jedes* positive k nicht größer als

$$\int_0^\sigma \frac{\sin bx}{x}\,dx..$$

Nun ist ferner $\sin bx \leqq bx$ in dem Intervalle $0 \leqq x \leqq \sigma$, also das Integral (5) kleiner als

$$\int_0^\sigma b\,dx = b\sigma,$$

womit der Beweis erbracht ist. Daher ist die Formel (4) nunmehr ebenfalls exakt begründet. Insbesondere folgt für $b = 1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi, \tag{6}$$

womit der Wert des schon in Nr. 469 betrachteten Integrals gefunden ist.

Ersetzen wir b in (4) durch $a \pm b > 0$, so kommt:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(a-b)x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi \quad (\text{für } a > b > 0).$$

Hieraus folgt durch Addition und Subtraktion:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax \sin bx}{x}\,dx = 0 \quad (\text{für } a > b > 0).$$

Für $a = b > 0$ dagegen ist nach (4):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos ax}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Wir haben demnach gefunden:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\pi \text{ für } a > b > 0, \\ \tfrac{1}{4}\pi \text{ für } a = b > 0, \\ 0 \text{ für } b > a > 0. \end{cases} \tag{7}$$

494. Das Integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$. Wir benutzen wieder die Formel unter (2) in Nr. 477:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2} \qquad (\text{für } a > 0),$$

die wir mit $\cos b : b$ multiplizieren:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \sin bx \cos b}{b} dx = \frac{\cos b}{a^2+b^2} \qquad (\text{für } a > 0).$$

Wenn wir nun hinsichtlich b von 0 bis $B > 0$ integrieren, so darf dies nach Satz 21, Nr. 490, links unterhalb des auf x bezüglichen Integralzeichens geschehen. Der Integrand ist nämlich auch für $b = 0$ stetig. Es kommt:

$$(1) \qquad \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\left[\int\limits_0^{B} \frac{\sin bx \cos b}{b} db\right] dx = \int\limits_0^{B} \frac{\cos b}{a^2+b^2} db \qquad (\text{für } a > 0).$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß beide Seiten für $\lim B = +\infty$ bestimmte endliche Grenzwerte haben, so daß dieser Grenzübergang erlaubt ist.

Daß zunächst das rechts stehende Integral für $\lim B = +\infty$ konvergiert, folgt daraus, daß sein Integrand für $\lim b = +\infty$ mit $1 : b$ in der Ordnung 2 verschwindet. Links ergibt sich als Wert des Inhaltes der eckigen Klammer für $\lim B = +\infty$ nach (7) in voriger Nummer, wenn dort x durch b, a durch x und b durch 1 ersetzt wird, entweder $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{1}{4}\pi$ oder 0, nämlich je nachdem $x > 1$, $= 1$ oder < 1 ist. Das in (1) links stehende Integral hat also für $\lim B = +\infty$ die Form:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} u dx,$$

wo $u = 0$ für $x < 1$, gleich $\frac{1}{4}\pi$ für $x = 1$ und gleich $\frac{1}{2}\pi$ für $x > 1$ ist, also der Integrand an der Stelle $x = 1$ springt. Nach Nr. 475 zerlegen wir dies Integral in das von 0 bis 1

und das von 1 bis $+\infty$ erstreckte. Das erstere ist gleich Null, das letztere gleich

$$\int_1^{+\infty} e^{-ax}\tfrac{1}{2}\pi\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\left[-\frac{e^{-ax}}{a}\right]_1^{+\infty} = \tfrac{1}{2}\pi\frac{e^{-a}}{a},$$

da $a > 0$ ist. Somit geht aus (1) für $\lim B = +\infty$ hervor:

$$\tfrac{1}{2}\pi\frac{e^{-a}}{a} = \int_0^{+\infty}\frac{\cos b}{a^2+b^2}db \qquad \text{(für } a>0\text{)}.$$

Substituieren wir hierin x vermöge $b = ax$, $db = a\,dx$, so folgt:

$$\text{(2)} \qquad \int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx = \tfrac{1}{2}\pi e^{-a} \qquad \text{(für } a>0\text{)}.$$

495. Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ und verwandte Integrale. Nach dem ersten Beispiele in Nr. 468 ist das Integral

$$\text{(1)} \qquad A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

konvergent. Um seinen Wert A zu berechnen, substituieren wir $x = \alpha t$, $dx = \alpha\,dt$, wodurch sich ergibt:

$$A = 2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2}\alpha\,dt,$$

falls $\alpha > 0$ gewählt wird. Multiplizieren wir mit $e^{-\alpha^2}$, so kommt:

$$Ae^{-\alpha^2} = 2\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)\alpha^2}\alpha\,dt.$$

Nach Satz 21, Nr. 490, dürfen wir nun über α von 0 bis $\mathsf{A} > 0$ unterhalb des Integralzeichens integrieren:

$$\text{(2)} \qquad A\int_0^{\mathsf{A}} e^{-\alpha^2}d\alpha = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{\mathsf{A}} 2e^{-(1+t^2)\alpha^2}\alpha\,d\alpha\right]dt.$$

Es kommt aber vermöge der Substitution $\alpha^2 = z$:

$$(3)\qquad \int_0^{A} 2e^{-(1+t^2)\alpha^2}\alpha\, d\alpha = \int_0^{A^2} e^{-(1+t^2)z} dz = \left[-\frac{e^{-(1+t^2)z}}{1+t^2}\right]_{z=0}^{z=A^2}.$$

Für $z = 0$ dürfen wir nicht ohne weiteres $(1+t^2)z = 0$ annehmen, weil das Integrationsintervall für t in (2) bis $+\infty$ erstreckt ist. Aber analog wie in Nr. 493 bemerken wir, daß

$$\frac{1-e^{-(1+t^2)z}}{1+t^2} = \frac{1-e^{-(1+t^2)z}}{(1+t^2)z}\cdot z$$

für $\lim z = 0$ stets nach Null strebt, da ja z abnehmend in Null übergeht. Folglich ist:

$$\lim_{z=0} \frac{e^{-(1+t^2)z}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Also gibt (3):

$$\int_0^{A} 2e^{-(1+t^2)\alpha^2}\alpha\, d\alpha = \frac{1-e^{-(1+t^2)A^2}}{1+t^2}.$$

Setzen wir diesen Wert in (2) rechts ein, so kommt:

$$A\int_0^{A} e^{-\alpha^2} d\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-(1+t^2)A^2}}{1+t^2} dt.$$

Hierin wollen wir den Grenzübergang zu $\lim A = +\infty$ machen. Dabei wird das links stehende Integral nach (1) gleich $\frac{1}{2}A$, während der Zähler des Integranden rechts den Grenzwert Eins erreicht, also das Integral rechts den Grenzwert $\frac{1}{2}\pi$ nach (1) in Nr. 477. Folglich kommt:

$$\tfrac{1}{2}A^2 = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{d. h.} \quad A = \sqrt{\pi}.$$

Weil das Integral (1) offenbar positiv ist, haben wir also:

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} > 0.$$

Machen wir hier die Substitution $x = t\sqrt{\alpha}$, $dx = dt\sqrt{\alpha}$, indem wir $\alpha > 0$ und $\sqrt{\alpha} > 0$ wählen, so kommt:

$$(5)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} > 0 \qquad (\text{für } \alpha > 0).$$

[495

Differenzieren wir diese Formel wiederholt nach α, indem wir links die Differentiation unter dem Integralzeichen ausführen, so gehen lauter konvergente Integrale hervor. Dies Verfahren ist daher nach Satz 22, Nr. 490, gestattet und gibt nach n Differentiationen:

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} t^{2n} dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}} > 0 \quad (\text{für } \alpha > 0),$$

insbesondere für $\alpha = 1$:

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} > 0.$$

Ferner geht aus (4) vermöge der Substitution: $x = t + \alpha$, $dx = dt$ hervor:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 - 2\alpha t} dt = \sqrt{\pi} e^{\alpha^2} > 0,$$

ob nun α positiv oder negativ ist. Ersetzen wir α durch $-\alpha$ und nehmen wir die halbe Summe von beiden Integralen, so finden wir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{e^{2\alpha t} + e^{-2\alpha t}}{2} dt = \sqrt{\pi}\, e^{\alpha^2}.$$

Wird $t = mx$, $dt = m dx$ substituiert, $\alpha = \frac{1}{2} n : m$ gesetzt und $m > 0$ angenommen, so ergibt sich:

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 x^2} \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m}\, e^{\frac{1}{4}\left(\frac{n}{m}\right)^2} > 0.$$

Wäre es gestattet, die reelle Zahl n durch ia zu ersetzen, wo a reell sein soll, so würde hieraus nach (6) in Nr. 373 folgen:

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 x^2} \cos ax\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m}\, e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{a}{m}\right)^2} > 0.$$

Diese Formel gilt nun in der Tat; es ist nämlich das Integral

$$(10) \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 x^2} \cos ax\, dx,$$

wie man leicht sieht, konvergent. Die Differentiation nach a unter dem Integralzeichen liefert ein ebenfalls konvergentes Integral, so daß diese Differentiation nach Satz 22, Nr. 490 erlaubt ist. Es kommt:

$$\frac{dJ}{da} = -\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-m^2x^2} \sin ax\,dx = \frac{1}{2m^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{de^{-m^2x^2}}{dx} \sin ax\,dx$$

oder durch teilweise Integration:

$$\frac{dJ}{da} = \frac{1}{2m^2}\left[e^{-m^2x^2} \sin ax\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{a}{2m^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2x^2} \cos ax\,dx,$$

also nach (10):

$$\frac{dJ}{da} = -\frac{a}{2m^2} J.$$

Folglich haben wir:

$$\frac{d}{da}\left(\ln J + \frac{a^2}{4m^2}\right) = 0,$$

d. h. $\ln J + a^2 : 4m^2$ ist von a unabhängig und hat also denselben Wert wie für $a = 0$, d. h. nach (5) ist:

$$\ln J + \frac{a^2}{4m^2} = \ln \frac{\sqrt{\pi}}{m} \quad \text{oder} \quad J = \frac{\sqrt{\pi}}{m} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{a}{m}\right)^2}.$$

Dies aber besagt die Formel (9).

Viertes Kapitel.*)

Theorie der Eulerschen Integrale.

§ 1. Der Zusammenhang zwischen den Eulerschen Integralen.

496. Die Eulerschen Integrale erster und zweiter Gattung. Man versteht hierunter nach *Legendre* die beiden bestimmten Integrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad \text{und} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx,$$

die zuerst von *Euler* untersucht und seitdem von vielen anderen weiter erforscht worden sind. Da ihre Theorie von grundlegender Bedeutung ist, so soll sie uns in diesem Kapitel beschäftigen, das eine Ergänzung des vorigen bilden wird.

Das erste, von den beiden Parametern p und q abhängige Integral bezeichnet man mit $B(p, q)$, das zweite, das nur von einem Parameter p abhängt, mit $\Gamma(p)$ und nennt dies letztere die *Gammafunktion*:

$$(1) \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx.$$

Die Parameter p und q sollen positiv sein; die in den Integranden auftretenden Potenzen sind nach Nr. 5 ebenfalls positiv, so daß die Integrale *positive* Werte haben, wenn sie überhaupt konvergieren.

*) Dies Kapitel steht für sich und kann daher ohne Beeinträchtigung des Späteren überschlagen werden.

Dies aber tun sie in der Tat: Der Integrand von $B(p, q)$ kann nämlich nur an den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ unstetig sein, und zwar ist er es an der Grenze $x = 0$, wenn $p < 1$ ist, und an der Grenze $x = 1$, wenn $q < 1$ ist. Aber im Falle $q < 1$ wird $(1 - x)^{q-1}$ für $\lim x = 1$ von niederer Ordnung unendlich groß als $1 : (1 - x)$, so daß hier die Konvergenz nach Satz 11, Nr. 471, verbürgt ist. Im Falle $p < 1$ ferner wird x^{p-1} für $\lim x = 0$ von niederer Ordnung unendlich als $1 : x$, so daß hier dasselbe gilt, vgl. Satz 12, Nr. 473. Was nun $\Gamma(p)$ anbetrifft, so wird der Integrand an der unteren Grenze $x = 0$ nur für $p < 1$ unstetig, jedoch wieder in niederer Ordnung als $1 : x$. Es ist also nur noch die Konvergenz von $\Gamma(p)$ für die obere Grenze $x = +\infty$ zu beweisen. Ist $p \leqq 1$, so verschwindet der Integrand von $\Gamma(p)$ offenbar für $\lim x = +\infty$, ist $p > 1$, so gilt dasselbe nach dem 4. Beispiele in Nr. 131. Zugleich sieht man, daß der Integrand für $\lim x = +\infty$ in höherer als erster Ordnung mit $1 : x$ verschwindet. Also steht die Konvergenz nach Satz 4, Nr. 466, fest.

Machen wir in $B(p, q)$ die Substitution $x = z : (1 + z)$ und bezeichnen wir alsdann die neue Veränderliche z mit x, so bekommen wir:

$$(2) \quad B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx.$$

Wenn wir das letzte Integral vermöge der Substitution $x = 1 : z$ umformen, alsdann darin z mit x bezeichnen und die Grenzen vertauschen, so finden wir, da dann beide Integrale rechts von 0 bis 1 erstreckt sind und sich vereinigen lassen:

$$(3) \qquad B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx.$$

Hier tritt nun deutlich zu Tage, daß stets die Formel gilt:

$$(4) \qquad B(p, q) = B(q, p).$$

Man hätte dies auch aus der ursprünglichen Form von $B(p, q)$ mittels der Substitution $x = 1 - z$ erkennen können.

497. Zurückführung der Eulerschen Integrale erster Gattung auf die Gammafunktion. Ist m eine positive

Zahl und wird $x = mz$, $dx = mdz$ gesetzt, so geht aus der zweiten Formel (1) der letzten Nummer hervor:

(1) $$\Gamma(p) = m^p \int_0^{+\infty} e^{-mz} z^{p-1} dz,$$

also auch die folgende viel benutzte Gleichung:

(2) $$\frac{1}{m^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} e^{-mz} z^{p-1} dz \qquad (\text{für } m > 0,\ p > 0).$$

Verstehen wir unter x eine positive Zahl, so dürfen wir $m = 1 + x$ setzen. Schreiben wir noch $p + q$ statt p und multiplizieren wir mit x^{p-1}, so kommt:

(3) $$\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-(1+x)z} z^{p+q-1} dz.$$

Wir dürfen diese Formel nach Satz 21, Nr. 490, und Satz 23, Nr. 491, in der Art hinsichtlich x von Null bis $X > 0$ integrieren, daß wir rechts die Integration unter dem auf z bezüglichen Integralzeichen ausführen. Es kommt:

(4) $$\int_0^X \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} e^{-z} z^{p+q-1} \left[\int_0^X e^{-xz} x^{p-1} dx \right] dz.$$

Da die linke Seite für $\lim X = +\infty$ nach (2) in voriger Nummer gleich $B(p, q)$ und der Inhalt der eckigen Klammer für $\lim X = +\infty$ nach (1) gleich $\Gamma(p) : z^p$ ist, so folgt:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} e^{-z} z^{q-1} dz$$

oder nach (1) in voriger Nummer:

(5) $$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Da somit die Eulerschen Integrale erster Gattung durch die Gammafunktion ausgedrückt werden können, werden wir in der Folge nur noch die Gammafunktion genauer untersuchen.

498. Zusammenhang zwischen der Gammafunktion und den Fakultäten. Teilweise Integration gibt

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx = \Big[-e^{-x} x^{p-1}\Big]_0^{+\infty} + (p-1)\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-2} dx.$$

Für $p > 1$ ist der erste Ausdruck rechts gleich Null, so daß nach (1) in Nr. 496 hervorgeht:

$$(1) \qquad \Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1) \qquad \text{für } p > 1.$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, die kleiner als p ist:

$$(2) \qquad \Gamma(p) = (p-1)(p-2)\cdots(p-n)\,\Gamma(p-n).$$

Ist insbesondere n die größte ganze Zahl, die kleiner als p ist, so folgt, *daß die Werte der Gammafunktion sämtlich bekannt sind, sobald sie in dem Bereiche* $0 < p \leqq 1$ *berechnet worden sind.* Insbesondere ist nach der Definition (1) in Nr. 496 der Wert $\Gamma(1) = 1$. Wenn also p selbst eine ganze Zahl m ist, so gibt (2) für $n = m - 1$:

$$\Gamma(m) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1) = (m-1)!,$$

was wir übrigens schon in (3), Nr. 492, fanden. *Die Gammafunktion $\Gamma(p)$ ist also als eine Verallgemeinerung der Fakultät $(p-1)!$ für nicht ganzzahliges positives p zu bezeichnen.*

499. Die Produkte $\Gamma(p)\Gamma(1-p)$ und $\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2})$. Nehmen wir p in (5), Nr. 497, kleiner als Eins an, so können wir $q = 1 - p$ setzen, weil dann auch $1 - p$ positiv ist. Da ferner $\Gamma(1) = 1$ ist, kommt nach (2) in Nr. 496:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx,$$

also nach (4) in Nr. 479, weil jene Formel (4), wie dort bewiesen wurde, für $0 < p < 1$ stets gilt:

$$(1) \qquad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad (\text{für } 0 < p < 1).$$

Ist p zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 gelegen, so ist $1 - p$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ enthalten. Also sind die Werte von $\Gamma(p)$ für $0 < p < 1$ sämtlich bekannt, sobald sie für $0 < p \leqq \frac{1}{2}$ berechnet sind.

Nach (2) in voriger Nummer folgt weiter: *Die Werte der Gammafunktion $\Gamma(p)$ sind für jedes positive p bekannt, sobald sie in dem Bereiche $0 < p < \frac{1}{2}$ berechnet sind.* Insbesondere nämlich ist noch nach (1) für $p = \frac{1}{2}$:

$$(2) \qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi},$$

wo die Wurzel positiv ist. Diese Formel ist nicht neu, denn die Substitution $x = z^2$ führt sie auf (4) in Nr. 495 zurück.

Die Definition (1) von $B(p, q)$ in Nr. 496 zeigt ferner, daß

$$B(p, p) = \int_0^1 (x - x^2)^{p-1} dx = \int_0^1 [\tfrac{1}{4} - (\tfrac{1}{2} - x)^2]^{p-1} dx$$

ist. Machen wir im Intervalle von 0 bis $\frac{1}{2}$ die Substitution $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{z})$ und im Intervalle von $\frac{1}{2}$ bis 1 die Substitution $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{z})$, wobei $\sqrt{z}$ positiv sein soll, so folgt:

$$B(p, p) = -\frac{1}{2^{2p}} \int_1^0 \frac{(1 - z)^{p-1} dz}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2^{2p}} \int_0^1 \frac{(1 - z)^{p-1} dz}{\sqrt{z}}$$

oder:

$$B(p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 \frac{(1 - z)^{p-1} dz}{\sqrt{z}}.$$

Hierfür können wir nach (1) in Nr. 496 schreiben:

$$(3) \qquad B(p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} B(\tfrac{1}{2}, p).$$

Hieraus geht weiter nach (5) in Nr. 497 und wegen der obigen Formel (2) hervor:

$$(4) \qquad \Gamma(p)\,\Gamma(p + \tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\,\Gamma(2p),$$

wobei $\sqrt{\pi}$ positiv ist. Die in dieser Formel ausgedrückte Eigenschaft der Gammafunktion ist in einer allgemeineren Formel enthalten, die wir in Nr. 511 finden werden.

§ 2. Der Logarithmus der Gammafunktion.

500. Die Ableitung der Gammafunktion. Die Gammafunktion $\Gamma(p)$ ist eine Funktion der Größe p, die beliebige positive Werte annehmen kann und die wir daher von jetzt an mit x bezeichnen wollen. Dann müssen wir aber die in der Definition (1), Nr. 496, auftretende Veränderliche x anders, etwa mit y bezeichnen:

$$(1) \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\, y^{x-1}\, dy.$$

Nach den Sätzen 22 und 24 von Nr. 490, 491 hat die Funktion $\Gamma(x)$ eine Ableitung nach x, wenn dasjenige Integral konvergiert, das aus $\Gamma(x)$ durch direkte Differentiation nach x unterhalb des Integralzeichens hervorgeht, und zwar ist alsdann eben dieses Integral die Ableitung:

$$(2) \qquad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\, y^{x-1} \ln y\, dy.$$

Daß dies Integral in der Tat konvergiert, ist leicht einzusehen: Der Integrand wird nur für einen endlichen Wert von y unstetig, nämlich für $y = 0$. Aber da nach Nr. 130

$$\lim_{y=0} y \cdot e^{-y}\, y^{x-1} \ln y = \lim_{y=0} \frac{\ln y}{y^{-x}} = -\frac{1}{x} \lim y^x = 0$$

ist, wird der Integrand für $\lim y = 0$ in niederer Ordnung als $1 : y$ unendlich, so daß nach den Sätzen 11 und 12 von Nr. 471, 473 für $\lim y = 0$ die Konvergenz feststeht. Was die Grenze $+\infty$ anbetrifft, so bemerken wir, daß

$$y \cdot e^{-y}\, y^{x-1} \ln y = \frac{\ln y}{e^{y - x \ln y}}$$

ist und $y - x \ln y$ für $\lim y = +\infty$ unendlich wird. Folglich ist nach Nr. 130:

$$\lim_{y=+\infty} y \cdot e^{-y}\, y^{x-1} \ln y = \lim_{y=+\infty} \frac{\frac{1}{y}}{\left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{y - x \ln y}} = \lim_{y=+\infty} \frac{1}{(y-x)\, e^{y - x \ln y}} = 0.$$

Also verschwindet der Integrand für $\lim y = +\infty$ in höherer Ordnung als $1 : y$, so daß das Integral nach Satz 4, Nr. 466, konvergiert.

Die Gammafunktion $\Gamma(x)$ hat demnach die Ableitung (2), woraus überdies ihre *Stetigkeit* für positives x folgt, nach Satz 1, Nr. 27.

501. Darstellung von $\ln \Gamma(x)$ durch ein bestimmtes Integral. Es sei z eine positive Zahl. Wir gehen alsdann von der Betrachtung des Ausdruckes aus:

$$(1) \qquad \frac{e^{-z}}{z}\,\Gamma(x) - \frac{1}{z}\,\frac{\Gamma(x)}{(1+z)^x}.$$

Für die im Minuenden auftretende Funktion $\Gamma(x)$ setzen wir den Wert (1) aus voriger Nummer ein. Außerdem ist nach (1) in Nr. 497, wenn darin m durch $1+z$ und p durch x und z durch y ersetzt wird:

$$\frac{\Gamma(x)}{(1+z)^x} = \int_0^{+\infty} e^{-(1+z)y}\, y^{x-1}\, dy.$$

Demnach ist die Differenz (1) gleich

$$\frac{e^{-z}}{z}\int_0^{+\infty} e^{-y}\, y^{x-1}\, dy - \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-(1+z)y}\, y^{x-1}\, dy,$$

so daß folgt:

$$(2) \qquad \frac{e^{-z}}{z}\,\Gamma(x) - \frac{1}{z}\,\frac{\Gamma(x)}{(1+z)^x} = \int_0^{+\infty} e^{-y}\, y^{x-1}\left[\frac{e^{-z} - e^{-yz}}{z}\right] dy.$$

Wir wollen diese Formel hinsichtlich z von ε bis n integrieren, wobei ε eine beliebig kleine positive Zahl und n eine beliebig große positive Zahl bedeute. Nach den Sätzen 21 und 23 von Nr. 490, 491 darf dabei die Integration rechts unterhalb des Integralzeichens ausgeführt werden. So kommt:

$$\Gamma(x)\int_\varepsilon^n \left[e^{-z} - (1+z)^{-x}\right]\frac{dz}{z} = \int_0^{+\infty} e^{-y}\, y^{x-1}\left[\int_\varepsilon^n \frac{e^{-z} - e^{-yz}}{z}\, dz\right] dy$$

Gehen wir hierin zu den Grenzen $\lim \varepsilon = 0$ und $\lim n = +\infty$ über, so wird das rechts in der eckigen Klammer stehende Integral nach (5) in Nr. 492 gleich $\ln y$, also die

rechte Seite nach (2) in voriger Nummer gleich $\Gamma'(x)$, so daß sich ergibt:

$$(3) \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^{+\infty} [e^{-z} - (1+z)^{-x}] \frac{dz}{z},$$

vorausgesetzt, daß hier das rechts stehende Integral konvergent ist. Dies ist in der Tat der Fall: Der Integrand braucht nur für $\lim z = +\infty$ untersucht zu werden, da er für endliches z, auch für $z = 0$, stetig ist. Weil

$$\lim_{z=+\infty} z \cdot [e^{-z} - (1+z)^{-x}] \frac{1}{z} = \lim_{z=+\infty} \frac{\frac{(1+z)^x}{e^z} - 1}{(1+z)^x} = 0$$

ist, verschwindet der Integrand für $\lim z = +\infty$ in höherer Ordnung als $1 : z$, so daß die Konvergenz nach Satz 4, Nr. 466, feststeht.

Wir wollen die Formel (3) hinsichtlich x von 1 bis zu einem bestimmten Werte x integrieren. Dies darf rechts unter dem Integralzeichen geschehen. Da das unbestimmte Integral der linken Seite gleich $\ln \Gamma(x) +$ konst. ist und $\Gamma(1) = 1$, also $\ln \Gamma(1) = 0$ ist, so folgt:

$$(4) \qquad \ln \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \left[(x-1)\, e^{-z} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-x}}{\ln(1+z)}\right] \frac{dz}{z}.$$

Dies Ergebnis läßt sich noch umformen. Denn da $\Gamma(2) = 1! = 1$ ist, so erhalten wir für $x = 2$:

$$0 = \int_0^{+\infty} \left[e^{-z} - \frac{z(1+z)^{-2}}{\ln(1+z)}\right] \frac{dz}{z}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $x - 1$ und subtrahieren wir sie alsdann von (4), so kommt:

$$(5) \ln \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \left[(x-1)(1+z)^{-2} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-x}}{z}\right] \frac{dz}{\ln(1+z)}.$$

Hieraus aber finden wir vermöge der Substitution $z = e^y - 1$ schließlich:

$$(6) \qquad \ln \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \left[(x-1)\, e^{-y} - \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{1 - e^{-y}}\right] \frac{dy}{y}.$$

[501

502. Darstellung von $\ln\Gamma(x)$ durch eine unendliche Reihe. Wir wollen die letzte Formel nach x differenzieren. Dies darf rechts unterhalb des Integralzeichens geschehen, wenn das hervorgehende Integral konvergiert. Es würde sich so ergeben:

$$(1)\qquad \frac{d\ln\Gamma(x)}{dx}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-xy}}{1-e^{-y}}\right)dy.$$

Daß aber dies Integral konvergiert, folgt daraus, daß der Integrand für $\lim y=0$ in niederer Ordnung als $1:y$ unendlich groß wird und für $\lim y=+\infty$ in höherer Ordnung als $1:y$ verschwindet.

Nun ist nach (2) in Nr. 497, wenn wir darin $p=1$, also $\Gamma(p)=1$, ferner $m=1+k$ bzw. $x+k$ und $z=y$ setzen:

$$\frac{1}{1+k}=\int_0^{+\infty}e^{-(1+k)y}\,dy,\quad \frac{1}{x+k}=\int_0^{+\infty}e^{-(x+k)y}\,dy,$$

vorausgesetzt, daß $1+k>0$ bzw. $x+k>0$ ist. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{1+k}-\frac{1}{x+k}=\int_0^{+\infty}\left[e^{-(1+k)y}-e^{-(x+k)y}\right]dy.$$

Setzen wir hierin $k=0,1,2,\cdots n-1$ und subtrahieren wir alle n hervorgehenden Gleichungen von der Gleichung (1), indem wir rechts alle Integrale unter ein gemeinsames Zeichen bringen, so finden wir:

$$\frac{d\ln\Gamma(x)}{dx}-\left(1-\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n-1}\right)$$
$$=\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-y}}{y}+\frac{e^{-(n+1)y}-e^{-(n+x)y}-e^{-y}}{1-e^{-y}}\right]dy.$$

Bezeichnet γ den Wert, den $-d\ln\Gamma(x):dx$ für $x=1$ annimmt, d. h. wird nach (1) unter γ die Konstante

$$(2)\qquad \gamma=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-y}}{1-e^{-y}}-\frac{e^{-y}}{y}\right)dy$$

verstanden, so gibt die Addition dieser Gleichung zur letzten Gleichung:

$$\frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} + \gamma - \left(1 - \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)y} - e^{-(n+x)y}}{1 - e^{-y}}\, dy.$$

Hieraus folgt:

$$(3) \qquad \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = -\gamma + \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right) + R_n,$$

wobei der *Rest*:

$$(4) \qquad R_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)y} - e^{-(n+x)y}}{1 - e^{-y}}\, dy$$

ist.

Da x eine positive Zahl bedeutet, wollen wir annehmen, daß x zwischen 0 und m liege, wo m eine *ganze* positive Zahl sei. Weil der Zähler des Integranden von R_n beständig wächst, wenn x wächst, und weil der Nenner des Integranden positiv ist, so ergeben sich für $x = 0$ und $x = m$ Grenzwerte, zwischen denen R_n liegen muß, indem:

$$(5) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)y} - e^{-ny}}{1 - e^{-y}}\, dy < R_n < \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)y} - e^{-(n+m)y}}{1 - e^{-y}}\, dy$$

ist. Das erste Integral in (5) ist gleich

$$\int_0^{+\infty} - e^{-ny} dy = -\frac{1}{n}.$$

Das zweite läßt sich, da m eine ganze positive Zahl ist, so schreiben:

$$\int_0^{+\infty} [e^{-(n+1)y} + e^{-(n+2)y} + \cdots + e^{-(n+m-1)y}]\, dy$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m-1}.$$

Also ist, wenn $0 < x < m$ ist:

$$-\frac{1}{n} < R_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m-1} < \frac{m-1}{n}.$$

Bedeutet nun σ eine vorgeschriebene beliebig kleine positive Zahl, so können wir $n > (m-1):\sigma$ wählen. Alsdann ist der absolute Betrag von R_n kleiner als σ.

Also folgt: In jedem endlichen positiven Intervalle $0 < x < m$ können wir dadurch, daß wir n hinreichend groß wählen, erreichen, daß der absolute Betrag von R_n für *alle* Werte von x in diesem Intervalle kleiner als eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl σ wird. Dies aber bedeutet nach Nr. 425: Für $\lim n = +\infty$ geht aus (3) eine unendliche Reihe

$$(6)\qquad \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = -\gamma + \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right) + \cdots$$

hervor, *die innerhalb eines jeden für x vorgeschriebenen positiven Intervalles gleichmäßig konvergiert.*

Die hierin auftretende Konstante γ ist nach Definition der Wert, den die Ableitung von $\ln \Gamma(x)$ für $x = 1$ hat, multipliziert mit -1. Sie heißt die *Eulersche Konstante.* Über ihre Berechnung sprechen wir in der nächsten Nummer.

Ist x irgend eine positive Zahl, so ist die Reihe (6) insbesondere in dem Intervalle von 1 bis x gleichmäßig konvergent. Wir können daher den Satz 26, Nr. 426, anwenden und die Reihe von 1 bis x Glied für Glied integrieren. Da $\ln \Gamma(x)$ für $x = 1$ gleich Null ist, so ergibt sich alsdann:

$$(7)\quad \ln \Gamma(x) = -\gamma(x-1) + \left(\frac{x-1}{1} - \ln\frac{x}{1}\right) + \left(\frac{x-1}{2} - \ln\frac{x+1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{x-1}{n} - \ln\frac{x+n-1}{n}\right) + \cdots,$$

und diese Reihe konvergiert gleichmäßig innerhalb eines jeden für x vorgeschriebenen positiven Intervalles.

Die Konstante γ läßt sich aus (7) leicht entfernen. Denn für $x = 2$ ist $\Gamma(x) = 1$, also $\ln \Gamma(x) = 0$, so daß aus (7) folgt:

$$(8)\quad 0 = -\gamma + \left(\frac{1}{1} - \ln\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right) + \cdots.$$

Nun können wir die Reihe (8), nachdem sie mit $x-1$ multipliziert worden ist, Glied für Glied von der Reihe (7) abziehen, nach Satz 6, Nr. 103. Alsdann kommt:

$$(9)\quad \ln\Gamma(x)=\left[(x-1)\ln\frac{2}{1}-\ln\frac{x}{1}\right]+\left[(x-1)\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{x+1}{2}\right]+\cdots$$
$$+\left[(x-1)\ln\frac{n+1}{n}-\ln\frac{x+n-1}{n}\right]+\cdots,$$

und diese Reihe konvergiert ebenfalls gleichmäßig in jedem für x vorgeschriebenen positiven Intervalle.

Demnach hat der Rest der Reihe, der sich ergibt, wenn ihre m ersten Summanden gestrichen werden, für $\lim m=+\infty$ den Grenzwert Null. Wir können ihm also die Form $\ln(1+\varepsilon_m)$ geben, wenn wir unter ε_m eine Zahl verstehen, deren Grenzwert für $\lim m=+\infty$ gleich Null ist. Folglich kommt, wenn wir den Numerus von $\ln\Gamma(x)$, also $\Gamma(x)$ selbst bilden:

$$\Gamma(x)=\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{m+1}{m}\right)^{x-1}(1+\varepsilon_m):\left(\frac{x}{1}\cdot\frac{x+1}{2}\cdots\frac{x+m-1}{m}\right)$$

oder:

$$\Gamma(x)=\frac{1\cdot 2\cdots m\cdot m^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x-1}(1+\varepsilon_m).$$

Der vorletzte Faktor hat für $\lim m=+\infty$ den Grenzwert Eins. Daher können wir das Produkt der beiden letzten Faktoren mit $1+\eta_m$ bezeichnen, wenn wir unter η_m eine Zahl mit dem Grenzwerte Null für $\lim m=+\infty$ verstehen. Somit kommt:

$$(10)\qquad \Gamma(x)=\frac{m!\ m^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}(1+\eta_m),$$

mithin beim Grenzübergange zu $\lim m=+\infty$:

$$(11)\qquad \Gamma(x)=\lim_{m=+\infty}\frac{m!\ m^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}.$$

Schließlich merken wir noch an, daß aus (8) für die Eulersche Konstante γ augenscheinlich der Grenzwert hervorgeht:

$$(12)\qquad \gamma=\lim_{m=+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln m\right).$$

503. Berechnung von $\ln \Gamma(1+x)$. Nach der Formel (6) der letzten Nummer ist

$$(1)\qquad \frac{d \ln \Gamma(1+x)}{dx} = -\gamma + \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+2}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{x+m}\right) + \cdots,$$

und diese Reihe konvergiert innerhalb eines jeden solchen Intervalles, in dem $1+x$ positiv ist, gleichmäßig. Nach Satz 27, Nr. 427, dürfen wir daher diese Reihe Glied für Glied nach x differenzieren, wenn die hervorgehende Reihe ebenfalls gleichmäßig konvergiert. Bei $(n-1)$maliger Differentiation geht nun hervor:

$$(2)\quad \frac{1}{n!}\frac{d^n \ln \Gamma(1+x)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \cdots + \frac{1}{(x+m)^n} + \cdots\right]$$

und zwar für $n = 2, 3, 4 \ldots$, während für $n = 1$ die Formel (1) gilt. Es muß also noch gezeigt werden, daß die in (2) in der eckigen Klammer stehende Reihe gleichmäßig konvergiert. Sehen wir von ihren m ersten Gliedern ab, so ist der Rest gleich

$$\frac{1}{(x+m+1)^n} + \frac{1}{(x+m+2)^n} + \cdots$$

also positiv und kleiner als der für $n = 2$ hervorgehende Rest. Daher genügt es, den Rest zu betrachten, der sich für $n = 2$ ergibt:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{(x+m+1)^2} + \frac{1}{(x+m+2)^2} + \cdots.$$

Weil $x + 1 > 0$ ist, so folgt:

$$\mathfrak{R} < \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots$$

Da aber die Reihe der reziproken Werte der Quadrate von 1, 2, 3 ... nach dem Beispiele in Nr. 105 konvergiert, so läßt sich dadurch, daß m hinreichend groß gewählt wird, erreichen, daß ihr Rest kleiner als eine vorgegebene positive Zahl σ wird. Dann ist auch $\mathfrak{R} < \sigma$, woraus die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (2) für jedes Intervall, in dem $1 + x > 0$ ist, folgt.

Wenn wir

$$(3)\qquad S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots + \frac{1}{m^n} + \cdots$$

setzen, so liegt hier eine für $n > 1$ nach dem angeführten Beispiele konvergente Reihe vor, und es ergibt sich aus (2):

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \ln\Gamma(1+x)}{dx^n}\right]_{x=0} = (-1)^n \frac{S_n}{n} \quad (\text{für } n = 2, 3, 4, \ldots),$$

während nach (1):

$$\left[\frac{d \ln\Gamma(1+x)}{dx}\right]_{x=0} = -\gamma$$

ist und $\ln\Gamma(1+x)$ für $x = 0$ verschwindet. Mithin finden wir nach Nr. 116 die Mac-Laurinsche Reihe:

$$(4) \qquad \ln\Gamma(1+x) = -\gamma x + \frac{x^2}{2}S_2 - \frac{x^3}{3}S_3 + \frac{x^4}{4}S_4 - \cdots.$$

Ihr Restglied in der Lagrangeschen Form lautet nach Satz 24, Nr. 116, und nach (2):

$$R_n = \frac{(-1)^n x^n}{n}\left[\frac{1}{(\theta x+1)^n} + \frac{1}{(\theta x+2)^n} + \cdots\right],$$

wobei $0 < \theta < 1$ ist. Da die in der eckigen Klammer stehende Reihe für $\theta x + 1 > 0$, d. h. $x > -1$ nach (2) gleichmäßig konvergiert und x^n für $n = +\infty$ den Grenzwert Null im Falle $|x| < 1$ hat, *so ist die Reihe* (4) *für* $|x| < 1$ *unbedingt und gleichmäßig konvergent*, vgl. Satz 11, Nr. 363, und Nr. 428.

Um die Reihe (4) für die Berechnung von $\ln\Gamma(1+x)$ zu benutzen, bedarf man der Werte der Summen S_n. Der Rest von S_n, der nach Streichen der $m-1$ ersten Glieder hervorgeht, ist kleiner als

$$m \cdot \frac{1}{m^n} + m \cdot \frac{1}{(2m)^n} + m \cdot \frac{1}{(3m)^n} + \cdots = \frac{S_n}{m^{n-1}},$$

woraus folgt, daß der Rest kleiner als die Summe der $m-1$ ersten Glieder, dividiert durch $m^{n-1} - 1$, ist. Aus

$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \cdots < 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots\right) = 1 + \tfrac{1}{2}(S_n - 1)$$

folgt übrigens:

$$S_{n+1} - 1 < \tfrac{1}{2}(S_n - 1),$$

so daß erstens die Überschüsse von $S_2, S_3, S_4, S_5 \cdots$ über die

Einheit schneller abnehmen als die Glieder der geometrischen Progression:

$$S_2 - 1, \quad \tfrac{1}{2}(S_2 - 1), \quad (\tfrac{1}{2})^2(S_2 - 1), \quad (\tfrac{1}{2})^3(S_2 - 1), \quad \cdots$$

und zweitens $S_{n+1} - 1$ aus $S_n - 1$ bei hinreichend großem n einfach durch Division mit 2 gewonnen werden kann, wenn man eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen berücksichtigt. Die Werte der S_n bis $n = 16$ wurden zuerst von Euler berechnet; seine Ergebnisse wurden von Legendre berichtigt und bis $n = 35$ weitergeführt. Beide bestimmten die Summen auf sechzehn Dezimalstellen. Wir geben hier eine Tafel der Werte bis $n = 22$, abgerundet auf acht Dezimalstellen.

n	S_n	n	S_n	n	S_n
2	1,64493407	9	1,00200839	16	1,00001528
3	1,20205690	10	1,00099458	17	1,00000764
4	1,08232323	11	1,00049419	18	1,00000382
5	1,03692776	12	1,00024609	19	1,00000191
6	1,01734306	13	1,00012271	20	1,00000095
7	1,00834928	14	1,00006125	21	1,00000048
8	1,00407736	15	1,00003059	22	1,00000024

Für $n > 22$ ergeben sich die Werte von $S_n - 1$ aus $S_{22} - 1$ durch wiederholte Division mit 2 auf acht Dezimalstellen genau.

Da die Summen S_n mit wachsendem Index n immer weniger von Eins abweichen, so kann man aus (4) eine schneller konvergierende Reihe ableiten, indem man die nach Nr. 120 ebenfalls für $|x| < 1$ gleichmäßig konvergente Reihe

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Glied für Glied zur Reihe (4) addiert. So ergibt sich:

$$(5)\quad \ln\Gamma(1+x) = -\ln(1+x) + x(1-\gamma) + \frac{x^2}{2}(S_2-1) - \frac{x^3}{3}(S_3-1) + \frac{x^4}{4}(S_4-1) - \cdots$$

Man kann aber eine noch schneller konvergierende Reihe finden. Denn zunächst folgt, wenn x durch $-x$ ersetzt wird, für $|x| < 1$:

$$(6)\quad \ln\Gamma(1-x) = -\ln(1-x) - x(1-\gamma) + \frac{x^2}{2}(S_2-1) + \frac{x^3}{3}(S_3-1) + \frac{x^4}{4}(S_4-1) + \cdots$$

Weil $\Gamma(1+x)$ gleich $x\Gamma(x)$ und $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ gleich $\pi : \sin \pi x$ nach (1) in Nr. 498 und Nr. 499 ist, so haben wir:

$$\ln \Gamma(1+x) + \ln \Gamma(1-x) = \ln \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

Wenn wir also diese Gleichung zur Gleichung (5) addieren, alsdann die Gleichung (6) subtrahieren und schließlich durch 2 dividieren, so finden wir die für $|x| < 1$ gleichmäßig konvergente Reihe:

$$(7)\quad \ln \Gamma(1+x) = \tfrac{1}{2} \ln \frac{\pi x}{\sin \pi x} - \tfrac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - x(\gamma - 1) - \frac{x^3}{3}(S_3 - 1) - \frac{x^5}{5}(S_5 - 1) - \cdots.$$

Setzen wir hierin $x = \frac{1}{2}$, so folgt, weil $\Gamma(\frac{3}{2})$ gleich $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$, d. h. nach (2) in Nr. 499 gleich $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ist:

$$(8)\quad 1 - \gamma = \ln \tfrac{3}{2} + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^3(S_3 - 1) + \tfrac{2}{5}(\tfrac{1}{2})^5(S_5 - 1) + \cdots.$$

Berücksichtigt man noch das Glied mit S_9, so ergibt sich hieraus der Wert der Eulerschen Konstanten bis auf 16 Dezimalen, nämlich

$$\gamma = 0{,}57721\,56649\,01532\bar{9}.$$

Eine schnellere Bestimmung von γ ohne die vorhergehende Berechnung der Summen S_n werden wir in Nr. 527 finden.

Nach den Formeln (2) in Nr. 498 und (1) in Nr. 499 genügt es, um $\Gamma(p)$ für ein beliebiges positives p zu berechnen, die Werte von $\ln \Gamma(1+x)$ in dem Intervalle $0 < x < \frac{1}{2}$ zu kennen. Für solche Werte von x ist die Reihe (7) sehr bequem. Weil darin

$$S_5 - 1 < \frac{1}{2^2}(S_3 - 1), \quad S_7 - 1 < \frac{1}{2^4}(S_3 - 1) \quad \text{usw.}$$

ist, läßt sich der Rest der Reihe leicht abschätzen.

504. Berechnung der Ableitung von $\ln \Gamma(x)$. Anstelle der unbequemen Entwicklung (1) von Nr. 503 bedienen wir uns zur Berechnung der Ableitung von $\ln \Gamma(x)$ derjenigen unendlichen Reihen, die sich aus den für $\ln \Gamma(1+x)$ gefundenen Reihen durch Differentiation ergeben. Nach Satz 27, Nr. 427, ist ja die gliedweise Differentiation erlaubt, wenn auch die hervorgehende Reihe gleichmäßig konvergiert. Z. B. die Reihe (5) in Nr. 503 liefert

$$(1)\quad \frac{d \ln \Gamma(1+x)}{dx} = -\frac{1}{1+x} + 1 - \gamma + x(S_2 - 1) - x^2(S_3 - 1) + x^3(S_4 - 1) - \cdots,$$

und daß diese Reihe ebenso wie diejenige, aus der sie hervorgegangen ist, für $|x| < 1$ gleichmäßig konvergiert, folgt aus Satz 19, Nr. 370. Vgl. auch die Bemerkung zu Anfang von Nr. 428. Ebenso ergibt sich aus (7) in voriger Nummer für $|x| < 1$:

$$(2)\qquad \frac{d}{dx}\left[\ln\Gamma(1+x) - \tfrac{1}{2}\ln\frac{\pi x}{\sin \pi x} + \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right]$$
$$= 1 - \gamma - x^2(S_3 - 1) - x^4(S_5 - 1) - \cdots.$$

Wir können auch ein anderes Verfahren ableiten. Durch Addition der Gleichungen (1) und (2) in Nr. 502 geht

$$\frac{d\ln\Gamma(x)}{dx} + \gamma = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{1 - e^{-y}}\,dy$$

hervor und hieraus durch die Substitution $y = -\ln z$:

$$(3)\qquad \frac{d\ln\Gamma(x)}{dx} = -\gamma + \int_0^1 \frac{1 - z^{x-1}}{1 - z}\,dz.$$

Daß die Substitution erlaubt ist, obwohl $\ln z$ an den Grenzen unstetig wird, folgt daraus, daß dasjenige Integral, das zwischen zwei Grenzen innerhalb des Intervalles von 0 bis 1 erstreckt ist, konvergent bleibt, wenn die Grenzen in 0 und 1 übergehen. Denn der Integrand in (3) bleibt, falls $x > 1$ ist, an der unteren Grenze stetig und wird, falls $x < 1$ ist, ebenda in niederer Ordnung als $1 : z$ unendlich groß. An der oberen Grenze ist der Integrand für jedes positive x stetig. *Die Formel* (3) *gilt demnach für jedes positive* x, *insbesondere auch für* $x = 1$.

Sind nun m und n ganze positive Zahlen und ist x *die rationale Zahl* $m : n$, so folgt aus (3) durch die Substitution $z = y^n$ die Formel:

$$(4)\qquad \frac{d\ln\Gamma(x)}{dx} = -\gamma + n\int_0^1 \frac{y^{n-1} - y^{m-1}}{1 - y^n}\,dy \quad \left(\text{für } x = \frac{m}{n} > 0\right).$$

Hier ist der Integrand *rational*, so daß das Integral nach § 1 des 2. Kap. ausgewertet werden kann. Z. B. für $x = 0{,}5$ hat die Ableitung von $\ln\Gamma(x)$ den Wert $-\gamma - \ln 4$.

Ist x insbesondere *eine ganze positive Zahl m*, so gibt (3):

$$\frac{d \ln \Gamma(m)}{dm} + \gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m-1}. \tag{5}$$

505. Verlauf der Funktion $\Gamma(x)$ für positives x. Nach den in Nr. 503 und Nr. 504 gegebenen Methoden kann man die folgende Tafel von Werten in dem Bereiche von $x = 1$ bis $x = 2$ berechnen. Nach (1) in Nr. 498, 499 lassen sich daraus leicht die Werte für andere positive Bereiche von x ableiten.

x	$\log \Gamma(x)$	$\Gamma(x)$	$\Gamma'(x):\Gamma(x)$	x	$\log \Gamma(x)$	$\Gamma(x)$	$\Gamma'(x):\Gamma(x)$
1,00	00000	1,0000	— 0,5772	1,50	94754	0,8862	0,0365
1,05	98834	0,9735	— 0,4978	1,55	94884	0,8889	0,0822
1,10	97834	0,9514	— 0,4237	1,60	95110	0,8935	0,1260
1,15	96990	0,9330	— 0,3543	1,65	95430	0,9001	0,1681
1,20	96292	0,9182	— 0,2890	1,70	95839	0,9086	0,2085
1,25	95732	0,9064	— 0,2274	1,75	96335	0,9191	0,2475
1,30	95302	0,8975	— 0,1692	1,80	96913	0,9314	0,2850
1,35	94995	0,8911	— 0,1139	1,85	97571	0,9456	0,3212
1,40	94805	0,8873	— 0,0614	1,90	98307	0,9618	0,3562
1,45	94727	0,8857	— 0,0113	1,95	99117	0,9799	0,3900
1,50	94754	0,8862	0,0365	2,00	00000	1,0000	0,4228

Die Spalte für $\log \Gamma(x)$ enthält die auf fünf Stellen abgerundete Mantisse des *gewöhnlichen* Logarithmus von $\Gamma(x)$. Hier ist überall -1 die Kennziffer, abgesehen von den Werten für $x = 1$ und $x = 2$, wo die Kennziffer 0 ist.

Nach Nr. 496 ist $\Gamma(x)$ für $x > 0$ stets positiv. Aus (2) in Nr. 503 folgt für $n = 2$, daß die zweite Ableitung von $\ln \Gamma(x)$ für $x > 0$ auch stets positiv ist. Die erste Ableitung von $\ln \Gamma(x)$ wächst also mit x. Nach (6) in Nr. 502 und nach Nr. 103 hat sie für $\lim x = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$; sie wird dagegen gleich $-\infty$ für $\lim x = 0$. Also wird $\Gamma'(x):\Gamma(x)$ für einen und nur einen positiven Wert von x gleich Null. Demnach erreicht $\Gamma(x)$ nur für diesen einen Wert ein Extrem und zwar ein Minimum. Da $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ ist, liegt dies Minimum zwischen $x = 1$ und $x = 2$. Man erkennt aus der obigen Tafel, nämlich aus der Spalte für $\log \Gamma(x)$ und

der für $\Gamma'(x) : \Gamma(x)$, daß der fragliche Wert von x zwischen 1,45 und 1,50 liegt. Wir können durch Interpolation in der letzten Spalte den besseren Näherungswert 1,46 gewinnen.

Aus der Formel (1) in Nr. 504 finden wir, daß der Überschuß dieses Wertes von x über Eins diejenige Zahl z ist, für die

$$\frac{1}{1+z} = 1 - \gamma + z(S_2 - 1) - z^2(S_3 - 1) + z^3(S_4 - 1) - \cdots$$

ist. Da z zwischen 0 und 1 liegt, so folgt nach Satz 1, Nr. 101:

$$1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = 1 - \gamma + z(S_2 - 1) - z^2(S_3 - 1) + z^3(S_4 - 1) - \cdots$$

oder nach Satz 6, Nr. 103:

$$zS_2 - z^2S_3 + z^3S_4 - \cdots = \gamma.$$

Durch sukzessive Näherungsberechnungen gewinnt man hieraus für $x = 1 + z$ den genaueren Wert:

$$x = 1 + z = 1{,}461\,632\,1$$

und aus der Gleichung (5) von Nr. 503:

$$\ln \Gamma(x) = \ln \Gamma(1 + z) = 1{,}947\,239\,2,$$
$$\Gamma(1 + z) = 0{,}885\,603\,2.$$

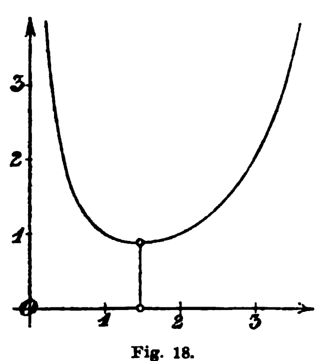


Fig. 18.

Da $\Gamma(x) = \Gamma(1+x) : x$ für $\lim x = 0$ den Grenzwert $+\infty$ und ebenfalls für $\lim x = +\infty$ nach (2) in Nr. 498 den Grenzwert $+\infty$ hat, so nimmt die Bildkurve von $y = \Gamma(x)$ für positives x den in Fig. 18 angegebenen Verlauf: Sie hat die positive y-Achse zur Asymptote, fällt mit wachsendem x bis zu dem zu $x = 1{,}4616\cdots$ gehörigen Minimum $0{,}8856\cdots$ und steigt weiterhin immer steiler an, da $\Gamma(x)$ für ganzzahliges positives x die Fakultät $(x-1)!$ ist.

§ 3. Die Gammafunktion im komplexen Bereiche.

506. Neuer Ausgangspunkt der Theorie. Daß die Gammafunktion $\Gamma(x)$ als eine Verallgemeinerung des Begriffs der Fakultät $(x-1)!$ aufzufassen ist, wurde schon in Nr. 498 erkannt. Da die Fakultät nur für ganze positive Werte der

Veränderlichen definiert ist, kann man sich die Aufgabe stellen, eine solche Funktion von x zu ermitteln, die, falls x insbesondere positiv und ganzzahlig ist, gerade $(x-1)!$ vorstellt. Es ist dies natürlich keine bestimmt umschriebene Aufgabe. Tritt man ihr aber in der Weise näher, daß man ein gewisses naheliegendes Verfahren einschlägt, so gelangt man, wie jetzt gezeigt werden soll, in der Tat zur Gammafunktion.

Es seien x und m ganze positive Zahlen. Wenn m unbegrenzt wächst, x aber ungeändert bleibt, so strebt der Bruch

$$\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+x-1)}{m^{x-1}},$$

der nicht kleiner als Eins ist, gerade nach Eins. Denn es ist

$$\frac{m+1}{m}=1+\frac{1}{m}<e^{\frac{1}{m}},\quad \frac{m+2}{m}=1+\frac{2}{m}<e^{\frac{2}{m}},\quad \ldots\quad \frac{m+x-1}{m}<e^{\frac{x-1}{m}}$$

nach (1) in Nr. 117, daher das Produkt der $x-1$ Brüche, d. h. der vorgelegte Bruch, kleiner als

$$e^{\frac{1}{m}+\frac{2}{m}+\cdots+\frac{x-1}{m}}=e^{\frac{x(x-1)}{2m}}.$$

Diese Potenz aber hat für $\lim m=+\infty$ den Grenzwert Eins.

Wir können also für ganze positive Werte von x und m

$$\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+x-1)}{m^{x-1}}=1+\eta_m$$

setzen, wenn wir unter η_m eine Zahl verstehen, die für $\lim m=+\infty$ den Grenzwert Null hat. Hieraus folgt:

$$(m+x-1)!=m^{x-1}(1+\eta_m)m!$$

oder, wenn wir durch $x(x+1)\cdots(x+m-1)$ dividieren:

$$(x-1)!=\frac{m!\,m^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}(1+\eta_m).$$

In Nr. 502 wurde unter (10) dieselbe Formel für $\Gamma(x)$ statt $(x-1)!$ aufgestellt. Man sieht also, daß die Formel (11) von Nr. 502, nämlich

$$(1)\qquad \Gamma(x)=\lim_{m=+\infty}\frac{m!\,m^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+m-1)},$$

in der Tat eine naheliegende Verallgemeinerung des Fakultätsbegriffes vorstellt.

Man kann nun, wie es zuerst *Gauß* getan hat, die Gammafunktion $\Gamma(x)$ durch die Formel (1) *definieren* und dadurch zu den früheren Ergebnissen, wie noch gezeigt werden soll, zurückgelangen. Diese Definition von $\Gamma(x)$ gibt uns auch die Möglichkeit, die Gammafunktion für komplexe Werte von x (insbesondere also auch für negative Werte) zu definieren, indem wir nämlich in (1) zwar unter m eine ganze positive, nach $+\infty$ strebende Zahl verstehen, dagegen zulassen, *daß x einen beliebigen komplexen Wert habe. Die Werte $x = 0, -1, -2, -3, \cdots$ sind jedoch auszuschließen*, wegen des in (1) auftretenden Nenners.

Hierbei sind aber noch zwei Bemerkungen zu machen: Die Funktion

$$m^{x-1}$$

ist, falls x komplex ist, zunächst vieldeutig. Da $m = e^{\ln m}$ ist, so wollen wir sie jedoch nach (1) in Nr. 373 durch die Formel:

$$m^{x-1} = e^{(x-1)\ln m} = 1 + \frac{(x-1)\ln m}{1!} + \frac{[(x-1)\ln m]^2}{2!} + \cdots$$

definieren, worin wir unter $\ln m$ den reellen Logarithmus der positiven Zahl m verstehen. Da diese unendliche Reihe nach Nr. 373 unbedingt konvergiert, ist jetzt *m^{x-1} auch für komplexes x eine eindeutige Funktion von x. Insbesondere reduziert sie sich für reelles x auf den einzigen positiven Wert der Potenz* (vgl. Nr. 5 und Nr. 117).

Ferner ist zu bemerken, daß die Definition der Gammafunktion durch die Formel (1) nur dann angewandt werden darf, wenn feststeht, daß der Grenzwert in (1) auch wirklich bestimmt und endlich ist. Diese Feststellung läßt sich jedoch auf eine andere zurückführen. Nehmen wir nämlich vorläufig an, der Grenzwert in (1) sei bestimmt und endlich. Dann folgt daraus:

$$\Gamma(x) = \frac{m!\, m^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}(1+\eta_m),$$

wobei η_m eine Zahl ist, die für $\lim m = +\infty$ den Wert Null erreicht. Da für jedes komplexe x auch

$$\lim_{m=+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x-1} = 1$$

ist, so können wir hierfür schreiben:

$$\Gamma(x)=\frac{m!\,m^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x-1}(1+\varepsilon_m),$$

wobei $\lim \varepsilon_m = 0$ für $\lim m = +\infty$ ist, oder:

$$\Gamma(x)=\frac{m!(m+1)^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}(1+\varepsilon_m)$$

$$=\left(\frac{2}{1}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}\cdot\frac{2}{x+1}\cdots\left(\frac{m+1}{m}\right)^{x-1}\cdot\frac{m}{x+m-1}\cdot(1+\varepsilon_m).$$

Nehmen wir beiderseits den Logarithmus, der ja in Nr. 376 auch für komplexe Numeri definiert wurde, und zwar den *Hauptwert* dieses Logarithmus, den wir jetzt mit ln (statt mit Ln, wie in Nr. 376) bezeichnen wollen, so kommt:

$$\text{(2)}\qquad \ln\Gamma(x)=\left[(x-1)\ln\frac{2}{1}-\ln\frac{x}{1}\right]+\cdots$$
$$+\left[(x-1)\ln\frac{m+1}{m}-\ln\frac{x+m-1}{m}\right]+\ln(1+\varepsilon_m).$$

Wenn nun wirklich $\lim\varepsilon_m = 0$ ist, so wird $\lim\ln(1+\varepsilon_m)$ auch gleich Null, so daß genau die in Nr. 502 unter (9) angegebene unendliche Reihe hervorgeht.

Um nun zu zeigen, daß der Grenzwert (1) für jedes komplexe x außer $x = 0, -1, -2, \cdots$ bestimmt und endlich ist, genügt es nach dem Auseinandergesetzten, zu beweisen, daß die unendliche Reihe

$$\text{(3)}\qquad \ln\Gamma(x)=\sum_{1}^{+\infty}{}_m\left[(x-1)\ln\frac{m+1}{m}-\ln\frac{x+m-1}{m}\right]$$

konvergiert; und dies soll in der nächsten Nummer geschehen.

507. Konvergenz der Reihe für $\ln\Gamma(x)$. Zum Beweise bedürfen wir der Entwicklung von $\ln(1+x)$ für den Fall, daß x komplex ist. Daß die Reihe (1) von Nr. 120, nämlich

$$\text{(1)}\qquad \ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

auch für komplexes x gilt, sobald $|x|<1$ ist und es sich um den Hauptwert des Logarithmus (vgl. Nr. 376) handelt, sieht man so ein: Nach Nr. 376 ist

$$\frac{d\ln(1+x)}{dx}=\frac{1}{1+x}$$

für $x \neq -1$. Andererseits wissen wir nach Nr. 120, daß die Reihe

$$(2) \qquad \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

für reelles x nur im Intervalle $-1 < x \leqq +1$ konvergiert, so daß also ihr Konvergenzkreis nach Satz 11, Nr. 363, der Kreis mit dem Radius Eins um den Nullpunkt der Zahlenebene ist. Diese Potenzreihe hat demnach für $|x| < 1$ nach Satz 19, Nr. 370, die Ableitung, die durch gliedweise Differentiation gewonnen wird, nämlich $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, die nach Nr. 374 den Wert $1:(1 + x)$ hat. Für jedes komplexe x, dessen absoluter Betrag kleiner als Eins ist, haben also $\ln(1 + x)$ und die Reihe (2) dieselbe Ableitung. Folglich ist ihre Differenz konstant. Da beide für $x = 0$ verschwinden, so ist ihre Differenz insbesondere gleich Null. *Folglich gilt für den Hauptwert des natürlichen Logarithmus und für* $|x| < 1$ *die Entwicklung* (1). Hiervon werden wir bald Gebrauch machen.

Fig. 19.

Um nun zu beweisen, daß die Reihe (3) der letzten Nummer innerhalb eines gewissen Bereiches der komplexen Zahlenebene gleichmäßig konvergiert, müssen wir diesen Bereich genauer festlegen: Vor allem sind die Stellen $x = 0, -1, -2, \cdots$ auszuschließen (vgl. Nr. 506), da für sie das 1., 2., 3., $\cdots$ Glied der Reihe unstetig wird, denn es ist

$$(3) \qquad u_m = (x - 1) \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) - \ln\left(1 + \frac{x-1}{m}\right)$$

das m^{te} Glied der Reihe. Wir legen deshalb um die Stellen $0, -1, -2, \cdots$ beliebig kleine Kreise, siehe Fig. 19, und setzen voraus, daß die Stelle x nicht im Innern eines dieser Kreise liege. Außerdem ziehen wir um den *Einheits*punkt einen Kreis von beliebig großem Radius r und setzen voraus, daß die Stelle x im Innern dieses Kreises gelegen sei. Wir weisen

also der Veränderlichen x den in Fig. 19 schraffierten Variabilitätsbereich zu. Alsdann sind alle Glieder $u_1, u_2, u_3, \cdots$ der zu untersuchenden Reihe stetig.

Wählen wir den Index $m > r+1$, so ist auch $1:m<1$ und also:

$$\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}-\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{3m^3}-\cdots.$$

Weil die Stelle x innerhalb des Kreises um den Einheitspunkt gewählt wurde, so ist $|x-1|<r$, daher auch $|x-1|<m$ und mithin nach (1):

$$\ln\left(1+\frac{x-1}{m}\right)=\frac{x-1}{m}-\frac{(x-1)^2}{2m^2}+\frac{(x-1)^3}{3m^3}-\cdots,$$

folglich nach (3):

$$u_m=\frac{(x-1)(x-2)}{2m^2}+(x-1)\left[\frac{1}{3m^3}-\frac{1}{4m^4}+\frac{1}{5m^5}-\cdots\right]$$
$$-\left[\frac{(x-1)^3}{3m^3}-\frac{(x-1)^4}{4m^4}+\frac{(x-1)^5}{5m^5}-\cdots\right].$$

Der Inhalt der ersten eckigen Klammer ist positiv und kleiner als das erste Glied $1:3m^3$. Wegen $|x-1|<r$ ist der absolute Betrag des Inhaltes der zweiten eckigen Klammer kleiner als

$$\frac{r^3}{3m^3}+\frac{r^4}{4m^4}+\frac{r^5}{5m^5}+\cdots<\frac{r^3}{3m^3}+\frac{r^4}{3m^4}+\frac{r^5}{3m^5}+\cdots.$$

Die Reihe rechts hat aber nach Satz 1, Nr. 101, den Wert

$$\frac{r^3}{3m^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{r}{m}},$$

der kleiner ist als derjenige Wert, der hieraus hervorgeht, wenn $r:m$ im Nenner durch $r:(r+1)$ ersetzt wird, weil ja $m>r+1$ sein soll. Der absolute Betrag des Inhaltes der zweiten eckigen Klammer ist folglich kleiner als

$$\frac{r^3(r+1)}{3m^3}.$$

Außerdem ist $|x-2|<r+1$. Also kommt:

$$|u_m|<\frac{r(r+1)}{2m^2}+\frac{r+r^3(r+1)}{3m^3}.$$

Setzen wir nun

$$v_m=\frac{r(r+1)}{2m^2}+\frac{r+r^3(r+1)}{3m^3},$$

[507

so daß $v_m > |u_m|$ ist, sobald $m > r + 1$ gewählt wird, so ist die Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ konvergent nach dem Beispiele in Nr. 105. Dies bedeutet: Ist τ eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl, so gibt es einen Index n derart, daß für jeden Index $m \geqq n$ der Rest $v_m + v_{m+1} + \cdots$ kleiner als τ ist. Wählen wir überdies $m > r + 1$, so ist also wegen $|u_m| < v_m$ auch:

$$|u_m| + |u_{m+1}| + \cdots < \tau, \quad \text{d. h.} \quad |u_m + u_{m+1} + \cdots| < \tau.$$

Dies aber bedeutet, daß die vorgelegte Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ *konvergiert* und zwar, da die für den Index m gefundenen Bedingungen unabhängig von der Wahl der Stelle x in dem in Fig. 19 bezeichneten Bereiche sind, daß diese Reihe dort *gleichmäßig* konvergiert. Weil jedoch der Hauptwert des Logarithmus nach der Definition in Nr. 376 für negative reelle Numeri unstetig ist, so werden wir die negative reelle Achse dabei ausschließen.

Da wir den Radius r beliebig groß wählen können, ergibt sich also mit Rücksicht auf die Auseinandersetzungen der letzten Nummer der

Satz 1: Für jedes von $0, -1, -2, -3, \cdots$ *verschiedene reelle oder imaginäre* x *ist der Grenzwert*

$$\Gamma(x) = \lim_{m=+\infty} \frac{m!\, m^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+m-1)},$$

worin m *eine ganze positive Zahl bedeutet, bestimmt und endlich. Außerdem ist in jedem solchen endlichen Bereiche der Zahlenebene, der frei von Stellen der negativen reellen Achse ist, der Hauptwert des Logarithmus dieses Grenzwertes durch die gleichmäßig konvergente Reihe darstellbar:*

$$\ln \Gamma(x) = \sum_{1}^{+\infty}{}_m \left[(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) - \ln\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right].$$

508. Die Reihen für die Ableitungen von $\ln \Gamma(x)$. Da wir wünschen, im Anschlusse an die Betrachtung der Gammafunktion im reellen Bereiche sogleich auch das Wichtigste aus der Theorie dieser Funktion im komplexen Bereiche zu bringen, um nicht diese so eng zusammengehörigen Betrach-

tungen zu zerreißen, ist es jetzt unerläßlich, *vorläufig ohne Beweis davon Gebrauch zu machen, daß die gliedweise Differentiation einer gleichmäßig konvergenten Reihe im komplexen Bereiche gestattet ist.* Der Beweis hierfür wird erst viel später, nämlich in § 4 des 8. Kap., zu geben sein.

Hiernach folgt aus der Reihe des letzten Satzes, daß

$$\frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = \sum_{1}^{+\infty} {}_m \left[\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m + x - 1}\right] \tag{1}$$

ist. Doch wollen wir direkt zeigen, daß diese Reihe gleichmäßig konvergiert. Dies tun wir unter denselben Voraussetzungen und nach derselben Methode wie in der letzten Nummer. Indem wir nämlich wieder $m > r + 1$ wählen, finden wir als Wert des m^{ten} Gliedes der Reihe (1) die Entwicklung

$$u_m = \frac{2x - 3}{2m^2} + \left[\frac{1}{3m^3} - \frac{1}{4m^4} + \cdots\right]$$
$$- \frac{1}{m}\left[\frac{(x-1)^2}{m^2} - \frac{(x-1)^3}{m^3} + \cdots\right],$$

woraus folgt:

$$|u_m| < \frac{2r + 1}{2m^2} + \frac{1 + 3r^2(r + 1)}{3m^3},$$

so daß die Beendigung des Beweises genau so wie in voriger Nummer ist.

Wenn wir wie in (8), Nr. 502:

$$\gamma = \sum_{1}^{+\infty} {}_m \left[\frac{1}{m} - \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right]$$

setzen, so folgt aus (1) und hieraus:

$$\frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = -\gamma + \sum_{1}^{+\infty} {}_m \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m + x - 1}\right), \tag{2}$$

d. h. die Formel (6) von Nr. 502, die aber damals nur für positives x bewiesen wurde, während wir jetzt wissen, daß sie ebenso wie die obige Formel (1) für jedes komplexe x gilt, abgesehen von $0, -1, -2, -3, \cdots$.

[506

Wiederholte Differentiation von (1) oder (2) gibt:

$$(3) \qquad \frac{1}{n!}\frac{d^n \ln \Gamma(x)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{n}\sum_{1}^{+\infty}{}_m \frac{1}{(m+x-1)^n} \quad (n = 2, 3 \cdots),$$

und diese Differentiation ist nach einer oben gemachten Bemerkung gestattet. Wir wollen auch hier die gleichmäßige Konvergenz direkt beweisen. Indem wir wieder die Annahmen der letzten Nummer für den Variabilitätsbereich von x machen und $m > r + 1$ wählen, finden wir, daß das m^{te} Glied der in (3) rechts auftretenden Summe, nämlich

$$u_m = \frac{1}{(m+x-1)^n} = \frac{1}{m^n}\left[\frac{1}{1+\frac{x-1}{m}}\right]^n$$

in dieser Form entwickelt werden kann:

$$u_m = \frac{1}{m^n}\left[1 - \frac{x-1}{m} + \frac{(x-1)^2}{m^2} - \cdots\right]^n,$$

so daß

$$|u_m| < \frac{1}{m^n}\left[1 + \frac{r}{m} + \frac{r^2}{m^2} + \cdots\right]^n = \frac{1}{m^n}\left[\frac{1}{1-\frac{r}{m}}\right]^n < \frac{(r+1)^n}{m^n}$$

ist, woraus nun die gleichmäßige Konvergenz wie früher folgt.

Wenn wir in (3) die Veränderliche x durch $1 + x$ ersetzen, kommen wir zur Formel (2) von Nr. 503 zurück, die damals nur für positive Werte von $1 + x$ bewiesen wurde, während jetzt feststeht, daß die Formel (3) für jedes komplexe x, abgesehen von $0, -1, -2, -3, \cdots$, gilt.

Satz 2: Für jedes reelle oder imaginäre x, abgesehen von $0, -1, -2, -3, \cdots$ sind die Ableitungen des Logarithmus der Gammafunktion darstellbar durch die unendlichen Reihen:

$$\frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = \sum_{1}^{+\infty}{}_m\left[\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m+x-1}\right],$$

$$\frac{d^n \ln \Gamma(x)}{dx^n} = (-1)^n(n-1)!\sum_{1}^{+\infty}{}_m \frac{1}{(m+x-1)^n} \quad \textit{für } n = 2, 3, \cdots.$$

Diese Reihen konvergieren gleichmäßig in jedem solchen endlichen Bereiche der Zahlenebene, der frei von Stellen der negativen reellen Achse ist.

509. Erste Eigenschaft der Gammafunktion. Aus der in Nr. 496 gegebenen ursprünglichen Definition der Gammafunktion im reellen Bereiche leiteten wir in § 1 einige Eigenschaften dieser Funktion ab. Wir wollen nun zeigen, daß diese Eigenschaften auch im Bereiche der imaginären Zahlen gelten.

Zunächst folgt aus Satz 1 in Nr. 507:

$$\Gamma(x)=\frac{m!\; m^{x-1}(1+\eta_m)}{x(x+1)\cdots(x+m-1)},\quad \Gamma(x+1)=\frac{m!\; m^{x}(1+\varepsilon_m)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m)},$$

wobei $\lim\eta_m=\lim\varepsilon_m=0$ für $\lim m=+\infty$ ist. Hieraus ergibt sich

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)\cdot\frac{m}{x+m}\cdot\frac{1+\varepsilon_m}{1+\eta_m},$$

so daß für $\lim m=+\infty$ der Satz hervorgeht:

Satz 3: Für jedes reelle oder imaginäre x, abgesehen von $0, -1, -2, -3, \cdots$, hat die Gammafunktion die Eigenschaft:

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x).$$

Diese *erste Eigenschaft der Gammafunktion* wurde in Nr. 498 nur für reelles $x>-1$ bewiesen.

510. Zweite Eigenschaft der Gammafunktion. Nach dem Satze von Nr. 507 ist:

$$\Gamma(x)=\frac{m!\; m^{x-1}(1+\eta_m)}{x(x+1)\cdots(x+m-1)},\quad \Gamma(1-x)=\frac{m!\; m^{-x}(1+\vartheta_m)}{(1-x)(2-x)\cdots(m-x)},$$

wobei $\lim\eta_m=\lim\vartheta_m=0$ für $\lim m=+\infty$ ist. Hieraus schließen wir:

$$\frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)}=\frac{x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)}{\left(1+\frac{x}{m}\right)(1+\eta_m)(1+\vartheta_m)},$$

woraus für $\lim m=+\infty$ folgt:

$$(1)\qquad \frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)}=\lim_{m=+\infty}x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right).$$

Den rechts stehenden Grenzwert können wir nun durch eine andere Betrachtung finden: Nach der in Nr. 358 aufgestellten Moivreschen Formel ist für ganzes positives n:

$$(\cos\omega+i\sin\omega)^{2n}=\cos 2n\omega+i\sin 2n\omega.$$

Rechnet man die Potenz nach dem binomischen Satze aus und ersetzt man darin $\cos^2\omega$ stets durch $1-\sin^2\omega$, so übersieht man, indem man die mit i behafteten Glieder ins Auge faßt, daß

$$(2) \qquad \frac{\sin 2n\omega}{\sin\omega\cos\omega} \quad \text{oder} \quad \frac{2\sin 2n\omega}{\sin 2\omega}$$

eine ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $\sin^2\omega$ ist. Sie hat also $n-1$ Nullstellen. Sie gehören zu denjenigen Winkeln ω, für die $\sin 2n\omega = 0$, aber $\sin 2\omega \neq 0$ ist, d. h. nach Nr. 373 zu den Winkeln $\omega = k\pi : 2n$, wobei k eine ganze Zahl, aber $k\pi : 2n$ kein ganzes Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist. Die Zahl k ist demnach von Null verschieden und nicht durch n teilbar. Für alle hiernach gestatteten Werte von k nimmt $\sin^2\omega$ gerade und nur die folgenden $n-1$ verschiedenen Werte an:

$$\sin^2\frac{\pi}{2n}, \quad \sin^2\frac{2\pi}{2n}, \quad \cdots \quad \sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Es ist also der Ausdruck (2) eine solche ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $\sin^2\omega$, deren Nullstellen diese $n-1$ Werte sind. Nach Nr. 378 besteht demnach eine Gleichung von der Form:

$$\frac{\sin 2n\omega}{\sin\omega\cos\omega} = \text{konst.}\left[\sin^2\omega - \sin^2\frac{\pi}{2n}\right]\cdots\left[\sin^2\omega - \sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}\right]$$

oder auch eine Gleichung von der Form:

$$\frac{\sin 2n\omega}{2n\sin\omega\cos\omega} = \text{konst.}\left[1-\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right].$$

Weil die linke Seite für $\sin\omega = 0$ den Wert Eins annimmt, ist der konstante Faktor auch gleich Eins. Setzen wir nun $2n\omega : \pi = x$, so ergibt sich also für jedes beliebige x und jede ganze positive Zahl n:

$$(3) \qquad \sin\pi x = 2n\sin\frac{\pi x}{2n}\cos\frac{\pi x}{2n}\left[1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2n}}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2n}}{\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right].$$

Wir sagen: *für jedes beliebige* x, obgleich $2n\omega = \pi x$ gesetzt wurde und die oben benutzte Moivresche Formel in Nr. 358

nur für reelles ω bewiesen worden ist. Daß sie aber auch für komplexes ω gilt, folgt daraus, daß nach (5) in Nr. 373 für jedes komplexe ω

$$\cos\omega + i\sin\omega = e^{i\omega}$$

und demnach

$$\cos n\omega + i\sin n\omega = e^{in\omega},$$

also auch:

$$(\cos\omega + i\sin\omega)^n = \cos n\omega + i\sin n\omega$$

ist.

Wir lassen nun, um zu dem in (1) auftretenden Grenzwerte zu gelangen, die Zahl n über jede Grenze wachsen. Wegen

$$\lim_{n=+\infty} 2n\sin\frac{\pi x}{2n}\cos\frac{\pi x}{2n} = \pi x, \quad \lim_{n=+\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2n}}{\sin^2\frac{m\pi}{2n}} = \frac{x^2}{m^2}$$

für $m = 1, 2, \ldots n-1$ folgt dann aus (3):

$$(4) \qquad \frac{\sin\pi x}{\pi} = \lim_{m=+\infty} x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right).$$

Hiermit ist der in (1) rechts auftretende Grenzwert bestimmt. Setzen wir ihn in (1) ein, so kommt:

$$(5) \qquad \frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = \frac{\sin\pi x}{\pi},$$

d. h. es gilt der folgende Satz, der die *zweite Eigenschaft der Gammafunktion* zum Ausdrucke bringt (vgl. Nr. 499):

Satz 4: Für jedes reelle oder imaginäre x, abgesehen von den ganzzahligen Werten, hat die Gammafunktion die Eigenschaft:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Die ganzzahligen Werte von x sind nämlich diejenigen, für die $\Gamma(x)$ bzw. $\Gamma(1-x)$ unendlich wird. Für sie ist übrigens auch die rechte Seite der letzten Gleichung unendlich.

Da $x\Gamma(x)$ nach Satz 3 der vorigen Nummer gleich $\Gamma(1+x)$ ist, so folgt noch durch Multiplikation der letzten Formel mit x:

$$(6) \qquad \Gamma(1-x)\,\Gamma(1+x) = \frac{\pi x}{\sin\pi x}.$$

511. Dritte Eigenschaft der Gammafunktion. Sind n und h zwei ganze positive Zahlen, so folgt aus Satz 1, Nr. 507, wenn darin x durch $x + h : n$ ersetzt wird:

$$\Gamma\left(x + \frac{h}{n}\right) = \frac{m!\, m^{x + \frac{h}{n} - 1}(1 + \varepsilon_m)}{\left(x + \frac{h}{n}\right)\left(x + \frac{h}{n} + 1\right) \cdots \left(x + \frac{h}{n} + m - 1\right)},$$

wobei $\lim \varepsilon_m = 0$ für $\lim m = +\infty$ ist. Geben wir der Zahl h die Werte $0, 1, 2, \ldots n - 1$, so gehen n Gleichungen hervor. Indem wir sie miteinander multiplizieren, finden wir:

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{(m!)^n m^{nx - \frac{n+1}{2}} n^{mn}(1 + \eta_m)}{nx(nx+1)\cdots(nx + mn - 1)},$$

wobei $\lim \eta_m = 0$ für $\lim m = +\infty$ ist. Andererseits folgt aus Satz 1, Nr. 507, wenn wir darin x durch nx und m durch mn ersetzen:

$$\Gamma(nx) = \frac{(mn)!\,(mn)^{nx-1}(1 + \eta_m')}{nx(nx+1)\cdots(nx + mn - 1)},$$

wobei $\lim \eta_m' = 0$ für $\lim m = +\infty$ ist. Dividieren wir die beiden letzten Gleichungen durcheinander, so folgt:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right)}{n^{-nx}\,\Gamma(nx)} = \frac{(m!)^n n^{nm+1}}{(mn)!\, m^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \frac{1 + \eta_m}{1 + \eta_m'}.$$

Lassen wir nun m über jede Grenze wachsen, so nimmt die rechte Seite einen nur noch von n abhängigen Wert an:

(1) $$\varphi(n) = \lim_{m = +\infty} \frac{(m!)^n n^{nm+1}}{(mn)!\, m^{\frac{n-1}{2}}},$$

so daß kommt:

(2) $$\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = n^{-nx}\,\Gamma(nx)\varphi(n).$$

Um den Wert der Funktion $\varphi(n)$ zu ermitteln, setzen wir allgemein:

(3) $$\psi(m) = \frac{m!}{m^{m + \frac{1}{2}}}.$$

Alsdann ist nach (1):

$$\varphi(n) = \sqrt{n} \lim_{m=+\infty} \frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)}.$$

Bezeichnen wir den hier auftretenden und nach (2) bestimmten und endlichen Grenzwert mit A_n, weil er von n abhängt, so ist:

(4) $$\varphi(n) = \sqrt{n}\, A_n, \quad A_n = \lim_{m=+\infty} \frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)}$$

oder auch, wenn m durch $2m$ ersetzt wird:

(5) $$A_n = \lim_{m=+\infty} \frac{[\psi(2m)]^n}{\psi(2mn)}.$$

Folglich bekommen wir aus der zweiten Formel (4) und aus (5):

$$A_n = \frac{A_n^2}{A_n} = \lim_{m=+\infty} \left\{ \frac{[\psi(m)]^{2n}}{[\psi(mn)]^2} : \frac{[\psi(2m)]^n}{\psi(2mn)} \right\}$$

oder:

$$A_n = \lim_{m=+\infty} \left[\left\{ \frac{[\psi(m)]^2}{\psi(2m)} \right\}^n : \frac{[\psi(mn)]^2}{\psi(2mn)} \right].$$

Aus der zweiten Formel (4) folgt jedoch, wenn darin n durch 2 oder aber zugleich n durch 2 und m durch mn ersetzt wird:

$$\lim_{m=+\infty} \frac{[\psi(m)]^2}{\psi(2m)} = A_2, \quad \lim_{m=+\infty} \frac{[\psi(mn)]^2}{\psi(2mn)} = A_2,$$

so daß wir erhalten:

$$A_n = A_2^{n-1}.$$

Nach der ersten Formel (4) ist deshalb:

(6) $$\varphi(n) = \sqrt{n}\, A_2^{n-1}.$$

Andererseits ist aber nach (4) und (1):

$$A_2 = \frac{\varphi(2)}{\sqrt{2}} = \lim_{m=+\infty} \frac{(m!)^2\, 2^{2m+\frac{1}{2}}}{(2m)!\sqrt{m}}$$

$$= \lim_{m=+\infty} \sqrt{4 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1}},$$

woraus nach der Formel von Wallis in Nr. 481 folgt, daß

$$A_2 = \sqrt{2\pi},$$

also nach (6)

$$\varphi(n) = \sqrt{n}\, \sqrt{2\pi}^{\,n-1}$$

ist, so daß schließlich aus (2) hervorgeht:

$$(7) \quad \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{2\pi}^{\,n-1}\sqrt{n^{-2nx+1}}\,\Gamma(nx).$$

Was die auftretenden Wurzeln betrifft, so ist daran festzuhalten, daß

$$\sqrt{2\pi}^{\,n-1}=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}, \quad \sqrt{n^{-2nx+1}}=n^{-nx+\frac{1}{2}}$$

nach den in Nr. 506 getroffenen Festsetzungen ganz bestimmte Werte haben. Insbesondere sind die Wurzeln positiv, wenn die Exponenten positiv sind, so daß es sich nachträglich rechtfertigt, daß wir vorhin bei der Bestimmung von A_2 ein Produkt von Wurzeln zu einer einzigen Wurzel zusammengezogen haben.

In (7) ist n eine ganze positive Zahl. Da $\Gamma(x)$ nur für $x=0,\ -1,\ -2,\ \cdots$ unstetig ist, so sind also in (7) solche Werte von x auszuschließen, die negative ganze Vielfache von $1:n$ oder gleich Null sind.

Satz 5: Ist n eine ganze positive Zahl, so hat die Gammafunktion für jedes reelle oder imaginäre x, abgesehen von Null und negativen ganzen Vielfachen von $1:n$, die Eigenschaft:

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{2\pi}^{\,n-1}\sqrt{n^{-2nx+1}}\,\Gamma(nx).$$

Die in diesem Satze ausgesprochene *dritte Eigenschaft der Gammafunktion* geht für $n=2$ in die in Nr. 499 unter (4) für positives x gefundene Eigenschaft über.

Der hier für den Satz 5 gegebene Beweis ist unabhängig von den beiden in Nr. 509 und Nr. 510 gefundenen Eigenschaften der Gammafunktion. Um die Konstante A_2 zu bestimmen, kann man sich aber auch der Gleichung $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ nach (2) in Nr. 499 bedienen. Setzt man nämlich in (2) insbesondere $x=\frac{1}{2}$ und $n=2$, so kommt wegen $\Gamma(1)=1$ und nach (6):

$$\sqrt{\pi}=\tfrac{1}{2}\varphi(2)=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}A_2, \qquad \text{d. h. } A_2=\sqrt{2\pi}.$$

Man kann die Funktion $\varphi(n)$ nach *Legendre* auch durch Benutzung der zweiten Eigenschaft der Gammafunktion bestimmen. Setzt man nämlich statt $\Gamma(x)$ in (2) den Wert

$\Gamma(x+1):x$ und statt $\Gamma(nx)$ den Wert $\Gamma(nx+1):nx$, so folgt bei der alsdann statthaften Annahme $x=0$:

(8) $$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\varphi(n)}{n}$$

oder, wenn man die Reihenfolge der Faktoren umkehrt:

(9) $$\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\varphi(n)}{n}.$$

Da nach (5) in Nr. 510

$$\Gamma\left(\frac{h}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-h}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin(\pi h:n)}$$

ist, so gibt die Multiplikation von (8) und (9) miteinander:

(10) $$[\varphi(n)]^2=\frac{n^2\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Der Nenner rechts ist gleich $n:2^{n-1}$, wie wir sogleich zeigen wollen. Daher geht in der Tat der schon oben für $\varphi(n)$ gefundene Wert hervor.

Um noch zu beweisen, daß

(11) $$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

ist, gehen wir nach *Dirichlet* davon aus, daß die $n-1$ von Eins verschiedenen Wurzeln der Gleichung $x^n=1$ nach Nr. 358 und Nr. 373 die Form

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad\text{oder}\quad e^{\frac{2k\pi}{n}i}$$
$$(k=1,\ 2,\ \cdots n-1)$$

haben. Es sind dies also die Wurzeln der Gleichung, die aus $x^n-1=0$ durch Division mit $x-1$ hervorgeht:

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots x+1=0.$$

Mithin ist für *jedes* x:

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=\left(x-e^{\frac{2\pi}{n}i}\right)\left(x-e^{\frac{4\pi}{n}i}\right)\cdots\left(x-e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i}\right),$$

also für $x=1$:

(12) $$n=\left(1-e^{\frac{2\pi}{n}i}\right)\left(1-e^{\frac{4\pi}{n}i}\right)\cdots\left(1-e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i}\right).$$

Da aber:

$$\begin{aligned}1-e^{\frac{2k\pi}{n}i} &= 1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\\ &= 2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right)\\ &= -2i\sin\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\\ &= \frac{2}{i}\sin\frac{k\pi}{n}\,e^{\frac{k\pi}{n}i}\end{aligned}$$

ist, so geht aus (12) hervor:

$$n=\frac{2^{n-1}}{i^{n-1}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot e^{\frac{(n-1)\pi}{2}i}.$$

Es ist aber $e^{\frac{1}{2}\pi i}$ gleich $\cos\frac{1}{2}\pi+i\sin\frac{1}{2}\pi$, d. h. gleich i. Die letzte Formel geht demnach in die zu beweisende Formel (11) über.

§ 4. Einige Anwendungen der Gammafunktion.

512. Die Integrale

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}x^{p-1}\cos tx\,dx \quad \text{und} \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}x^{p-1}\sin tx\,dx.$$

Wir wollen in diesem Paragraphen zeigen, daß sich eine Anzahl von wichtigen bestimmten Integralen mit Hilfe der Gammafunktion auswerten läßt.

Die Integrale

$$(1)\qquad u_p=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}x^{p-1}\cos tx\,dx,\quad v_p=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}x^{p-1}\sin tx\,dx,$$

in denen α, p und t als positive Zahlen vorausgesetzt werden, sind augenscheinlich konvergent. Es ergibt sich dies wie die Konvergenz von $\Gamma(p)$ in Nr. 496, da $|\cos tx|$ und $|\sin tx|\leq 1$ sind. Daß die Werte der Integrale von dem Werte der Zahl p abhängen, haben wir durch ihre Bezeichnung mit u_p und v_p hervorgehoben. Wir können aber u_p und v_p als Funktionen des Parameters t betrachten und nach t unterhalb der Integral-

zeichen differenzieren, vorausgesetzt, daß die hervorgehenden Integrale konvergent sind. Die Differentiation ergibt nun:

$$\frac{du_p}{dt} = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^p \sin tx\, dx, \quad \frac{dv_p}{dt} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^p \cos tx\, dx,$$

und man sieht, daß die Integrale nach (1) gerade gleich v_{p+1} und u_{p+1}, folglich auch konvergent sind. Demnach haben wir:

(2) $$\frac{du_p}{dt} = -v_{p+1}, \quad \frac{dv_p}{dt} = u_{p+1}.$$

Die Integrale u_{p+1} und v_{p+1} lassen sich mittels teilweiser Integration leicht auf u_p und v_p zurückführen. Denn wenn wir $\cos tx$ und $\sin tx$ als die Ableitungen von $\sin tx : t$ und $-\cos tx : t$ nach x betrachten, so finden wir:

$$u_{p+1} = \left[e^{-\alpha x} x^p \frac{\sin tx}{t}\right]_0^{+\infty} - \frac{p}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{p-1} \sin tx\, dx + \frac{\alpha}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^p \sin tx\, dx,$$

$$v_{p+1} = -\left[e^{-\alpha x} x^p \frac{\cos tx}{t}\right]_0^{+\infty} + \frac{p}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{p-1} \cos tx\, dx - \frac{\alpha}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^p \cos tx\, dx.$$

Die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke sind für beide Grenzen gleich Null, weil $\alpha > 0$ und $p > 0$ ist. Also folgt:

$$u_{p+1} = -\frac{p}{t} v_p + \frac{\alpha}{t} v_{p+1}, \quad v_{p+1} = \frac{p}{t} u_p - \frac{\alpha}{t} u_{p+1},$$

woraus wir berechnen können:

$$u_{p+1} = p\frac{\alpha u_p - t v_p}{\alpha^2 + t^2}, \quad v_{p+1} = p\frac{t u_p + \alpha v_p}{\alpha^2 + t^2}.$$

Setzen wir diese Werte in (2) ein, so erhalten wir:

$$\frac{du_p}{dt} = -p\frac{t u_p + \alpha v_p}{\alpha^2 + t^2}, \quad \frac{dv_p}{dt} = p\frac{\alpha u_p - t v_p}{\alpha^2 + t^2}.$$

Hieraus schließen wir, daß

$$\frac{d}{dt}\left[\ln(u_p \pm i v_p) + p \ln(t \pm i\alpha)\right] = 0$$

ist, indem wir den Logarithmus auch im komplexen Gebiete, wie schon in Nr. 507, mit ln bezeichnen. Diese Formel gilt

sowohl für die oberen als auch für die unteren Vorzeichen. Aus ihr schließen wir, daß die Ausdrücke

$$\ln(u_p + iv_p) + p\ln(t + i\alpha), \quad \ln(u_p - iv_p) + p\ln(t - i\alpha)$$

von t unabhängig sind. Dasselbe gilt vom Numerus ihrer Summe und von ihrer durch $2i$ dividierten Differenz. Letztere liefert nach (1) in Nr. 377 Arkusfunktionen. So erkennen wir, daß

$$(u_p^2 + v_p^2)(t^2 + \alpha^2)^p \quad \text{und} \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{v_p}{u_p} - p\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\alpha} + \tfrac{1}{2}p\pi$$

von t unabhängig sind. Nun ist u_p für $t = 0$ nach (1) in Nr. 497 gleich $\Gamma(p) : \alpha^p$ und v_p gleich Null. Demnach folgt:

$$u_p^2 + v_p^2 = \left(\frac{\alpha^2}{t^2 + \alpha^2}\right)^p \left[\frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}\right]^2, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{v_p}{u_p} = p\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\alpha},$$

wenn der Arkus auf den Bereich von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ beschränkt wird. Setzen wir $t = \alpha\operatorname{tg}\varphi$, indem wir φ auf denselben Bereich einschränken, so ergibt sich hieraus:

$$u_p = \pm\frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}\cos^p\varphi\cos p\varphi, \quad v_p = \pm\frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}\cos^p\varphi\sin p\varphi,$$

wobei entweder die Plus- oder die Minuszeichen gelten müssen. Da sich aber u_p für $t = 0$ oder $\varphi = 0$ auf $\Gamma(p) : \alpha^p$ reduziert, so gelten die Pluszeichen. Nach (1) ist also:

$$(3)\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}x^{p-1}\cos tx\,dx = \frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}\cos^p\varphi\cos p\varphi = \frac{\Gamma(p)}{t^p}\sin^p\varphi\cos p\varphi, \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}x^{p-1}\sin tx\,dx = \frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}\cos^p\varphi\sin p\varphi = \frac{\Gamma(p)}{t^p}\sin^p\varphi\sin p\varphi, \end{cases}$$

wenn α und p positiv sind. Dabei bedeutet φ den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegenen Winkel, dessen Tangens gleich $t : \alpha$ ist. Daß die Formeln auch für negatives t gelten, erkennt man sofort aus $\cos(-tx) = \cos tx$ und $\sin(-tx) = -\sin tx$.

513. Die Integrale

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1}\cos tx\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^{+\infty} x^{\nu-1}\sin tx\,dx.$$

Die Formeln (3) der letzten Nummer sind nur für $\alpha > 0$ bewiesen. Wir wollen aber zeigen, daß sie auch noch für $\alpha = 0$

gelten. Allerdings muß dann p auf den Bereich $0 < p < 1$ eingeschränkt werden. Denn beim Grenzübergange zu $\lim \alpha = 0$ gehen die beiden Integrale über in

$$(1) \qquad \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cos tx\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^{+\infty} x^{p-1} \sin tx\,dx,$$

und wir können beweisen, daß sie für $p \geqq 1$ divergieren. Dabei nehmen wir wie vorhin $t > 0$ an.

Ist nämlich $p > 1$, so bedeute k irgend eine positive ganze Zahl, und es sei

$$n = \frac{2\pi k + \frac{1}{4}\pi}{t}, \quad m = \frac{2\pi k + \frac{1}{2}\pi}{t}, \quad \text{also} \quad m > n > 0$$

gewählt. In dem Intervalle von $x = n$ bis $x = m$ ist $\sin tx$ stets positiv und mindestens gleich $\frac{1}{2}|\sqrt{2}|$. Außerdem ist x^{p-1} positiv, also

$$(2) \quad \int_n^m x^{p-1} \sin tx\,dx > \tfrac{1}{2}|\sqrt{2}| \int_n^m x^{p-1}\,dx = \tfrac{1}{2}|\sqrt{2}|\frac{m^p - n^p}{p}.$$

Da nun

$$m^p - n^p = (m-n)(m^{p-1} + m^{p-2}n + \cdots + n^{p-1})$$
$$> (m-n)n^{p-1} = \frac{\pi}{4t}\left(\frac{2\pi k + \frac{1}{4}\pi}{t}\right)^{p-1}$$

ist, also für $\lim n = +\infty$ oder $\lim k = +\infty$ auch zu $+\infty$ wird, weil $p > 1$ angenommen wurde, so hat das Integral (2) für beliebig großes n keinen solchen Wert, der kleiner als eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl ist. Das zweite Integral (1) ist demnach für $p > 1$ divergent, nach Satz 1, Nr. 465. Analog beweist man die Divergenz des ersten Integrals (1) für $p > 1$, indem man

$$n = \frac{2\pi k}{t}, \quad m = \frac{2\pi k + \frac{1}{4}\pi}{t}$$

setzt.

Ist $p = 1$ oder $0 < p < 1$, so machen wir in den Integralen (1) die Substitution $x = z : t$ und erhalten, abgesehen vom Faktor $1 : t^p$, die Integrale:

$$(3) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos z}{z^{1-p}}\,dz, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z^{1-p}}\,dz.$$

[512

Das erste ist für $p = 1$ nach dem 5. Beispiele in Nr. 464 divergent, ebenso offenbar das zweite.

Daß dagegen die Integrale (3) für $0 < p < 1$ konvergieren und infolgedessen auch die Integrale (1), wird durch eine Betrachtung ähnlich den Überlegungen in Nr. 469 bewiesen, weshalb wir uns kurz fassen und die Betrachtung nur für das zweite Integral (3) anzudeuten brauchen: Indem wir das Intervall in das von 0 bis π, von π bis 2π usw. zerlegen, verwandeln wir das zweite Integral mittels naheliegender Substitutionen in die unendliche Reihe

$$\int_0^\pi \frac{\sin z}{z^{1-p}}dz - \int_0^\pi \frac{\sin z}{(\pi+z)^{1-p}}dz + \int_0^\pi \frac{\sin z}{(2\pi+z)^{1-p}}dz - \cdots,$$

deren Glieder abwechselnd positiv und negativ und absolut genommen kleiner als die Integrale

$$\int_0^\pi \frac{dz}{z^{1-p}}, \quad \int_0^\pi \frac{dz}{(\pi+z)^{1-p}}, \quad \int_0^\pi \frac{dz}{(2\pi+z)^{1-p}}, \quad \cdots$$

sind, die bis zur Null abnehmende Werte haben. Nach Satz 9, Nr. 104, ist also das zweite Integral (3) als konvergente unendliche Reihe darstellbar. Entsprechendes gilt für das erste Integral (3).

Wir kehren nun zu den Formeln (3) der letzten Nummer zurück. Wir haben gesehen, daß ihre linken Seiten für $\lim \alpha = 0$ und $0 < p < 1$ bestimmte endliche Grenzwerte haben. Für $\lim \alpha = 0$ wird $\lim \varphi = \frac{1}{2}\pi$, weil $\operatorname{tg}\varphi = t:\alpha$ ist, so daß auch die rechten Seiten bestimmte endliche Grenzwerte bekommen. Demnach finden wir:

$$(4)\quad \int_0^{+\infty} x^{p-1}\cos tx\,dx = \frac{\Gamma(p)}{t^p}\cos\tfrac{1}{2}p\pi, \quad \int_0^{+\infty} x^{p-1}\sin tx\,dx = \frac{\Gamma(p)}{t^p}\sin\tfrac{1}{2}p\pi$$

für $0 < p < 1$ und $t > 0$. Wird in der letzten Formel $\Gamma(p)$ nach (1) in Nr. 499 durch $\pi : \Gamma(1-p)\sin p\pi$ ersetzt, so gibt der Grenzübergang zu $\lim p = 0$ die schon in Nr. 493 unter (6) gefundene Formel.

514. Das Integral $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi$ und verwandte Integrale. Werden die Formeln (3) von Nr. 512 mit t^{q-1} multipliziert, so kommt, da $t = \alpha \operatorname{tg} \varphi$ ist:

$$(1)\begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{p-1} t^{q-1} \cos tx\, dx = \frac{\Gamma(p)}{\alpha^{p-q+1}} \cos^{p-q+1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \cos p\varphi, \\ \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{p-1} t^{q-1} \sin tx\, dx = \frac{\Gamma(p)}{\alpha^{p-q+1}} \cos^{p-q+1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \sin p\varphi, \end{cases}$$

wenn α, p und t positiv sind. Unter q wollen wir eine Zahl zwischen 0 und 1 verstehen.

Wir dürfen nun hinsichtlich t beiderseits etwa von $t = \varepsilon$ bis $t = T$ integrieren, wobei $0 < \varepsilon < T$ sei, und zwar darf dies links unter dem Integralzeichen geschehen. Aber wir behaupten, daß die hervorgehenden Formeln unter der Voraussetzung $p > q$ auch noch richtig bleiben, wenn wir $\lim \varepsilon = 0$ und $\lim T = +\infty$ wählen. Zum Beweise müssen wir zeigen, daß dann beiderseits bestimmte endliche Werte hervorgehen.

Links treten die Integrale mit der Veränderlichen t

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{q-1} \cos tx\, dt, \quad \int\limits_0^{+\infty} t^{q-1} \sin tx\, dt$$

auf, die nach (4) in voriger Nummer gleich

$$\frac{\Gamma(q)}{x^q} \cos \tfrac{1}{2} q\pi, \quad \frac{\Gamma(q)}{x^q} \sin \tfrac{1}{2} q\pi$$

sind, so daß die Integration der linken Seiten von (1) hinsichtlich t von 0 bis $+\infty$, abgesehen von den Faktoren:

$$\Gamma(q) \cos \tfrac{1}{2} q\pi, \quad \Gamma(q) \sin \tfrac{1}{2} q\pi,$$

das Integral

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{p-q-1}\, dx$$

ergibt. Dies Integral aber ist, weil $p > q$ angenommen wurde, nach (1) in Nr. 497 gleich $\Gamma(p-q) : \alpha^{p-q}$.

Was die rechten Seiten von (1) betrifft, so ist zu bemerken, daß darin $\operatorname{tg}\varphi = t:\alpha$ ist. Wenn wir also hinsichtlich t von 0 bis $+\infty$ integrieren, so ist rechts hinsichtlich φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ zu integrieren, weil $\alpha > 0$ ist. Da außerdem $dt = \alpha d\varphi : \cos^2\varphi$ ist, so müssen wir die rechten Seiten vor der Integration noch mit $\alpha : \cos^2\varphi$ multiplizieren. Alsdann gehen rechts, abgesehen von dem von t freien Faktor $\Gamma(p):\alpha^{p-q}$, die Integrale

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi, \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi$$

hervor, die beide konvergent sind. Denn weil $0 < q < 1$, $p > q$ ist, so wird die $(q-1)^{\text{te}}$ Potenz von $\sin\varphi$ für $\lim\varphi = 0$ in niederer Ordnung unendlich als $1:\varphi$ und die $(p-q-1)^{\text{te}}$ Potenz von $\cos\varphi$ für $\lim\varphi = \frac{1}{2}\pi$ in niederer Ordnung unendlich als $1:(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$, falls sie nicht überhaupt endlich bleibt.

Wenn wir nach der ausgeführten Integration von (1) nach t bzw. φ die beiden Seiten der erhaltenen Gleichungen vertauschen und alles mit $\alpha^{p-q}:\Gamma(p)$ multiplizieren, so folgt also:

$$(2) \quad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = \frac{\Gamma(p-q)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p)} \cos\tfrac{1}{2}q\pi, \\ \displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi = \frac{\Gamma(p-q)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p)} \sin\tfrac{1}{2}q\pi \end{cases}$$

für $0 < q < 1$ und $p > q$.

Offenbar können wir hier den Grenzübergang zu $\lim q = 1$ machen, so daß sich wegen $\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$ ergibt, daß für $p > 1$ die Formeln gelten:

$$(3) \quad \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = 0, \quad \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-2}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi = \frac{1}{p-1}.$$

Setzen wir dagegen in (2) für q den Wert $p-1$, so muß p wegen $0 < q < 1$ zwischen 1 und 2 liegen. Alsdann kommt:

$$(4) \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{p-2}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}p\pi}{p-1}, \quad \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{p-2}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi = \frac{-\cos\frac{1}{2}p\pi}{p-1}.$$

Obgleich wir diese Formeln nur für $1 < p < 2$ bewiesen haben, gelten sie doch für jedes $p > 1$. Man gewinnt sie nämlich auch aus den Formeln (3), wenn man φ durch $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ ersetzt.

Wenn wir in der zweiten Gleichung (2) nach (1) in Nr. 499

$$\Gamma(q) = \frac{\pi}{\sin q\pi\, \Gamma(1-q)}$$

setzen, was geschehen darf, da $0 < q < 1$ ist, so zeigt der Grenzübergang zu $\lim q = 0$, wobei $\Gamma(1-q)$ in Eins übergeht, daß beide Seiten der Gleichung bestimmt und endlich bleiben, so daß sich für $p > 1$ noch ergibt:

$$(5) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{p-1}\varphi \sin p\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Es ist bemerkenswert, daß dies Integral einen von der positiven Konstanten p unabhängigen Wert hat.

§ 5. Fortgesetzte Betrachtung der Gammafunktion.

515. Vorbemerkung. Die Theorie der Eulerschen Funktionen ist, auch wenn man von ihren Anwendungen absieht, mit dem in § 1—3 Vorgetragenen bei weitem noch nicht erschöpft. Es erscheint uns angebracht, in diesem Paragraphen noch einiges aus der Theorie hinzuzufügen, das besonderes Interesse beansprucht. Die folgende Betrachtung wird beherrscht durch eine mit der Funktion $\Gamma(x+1)$ eng zusammenhängende Funktion $\mu(x)$, die wir zunächst nur für ganzes positives x definieren. Man kann aber ihre Definition auf komplexe Werte von x ausdehnen. Dadurch werden wir dazu geführt, die Gammafunktion für reelles positives x durch eine merkwürdige Reihe, die *Stirlingsche Reihe* darzustellen, die unbegrenzt fortgeht, zwar durchaus divergiert, jedoch abgebrochen ein besonders bequemes Hilfsmittel zur näherungsweisen Berechnung der Gammafunktion bietet. Die bekannte *Formel von Wallis* in Nr. 481 ist es, die diesen Betrachtungen als wesentliche Grundlage dient. Schließlich soll der Verlauf der Gammafunktion für beliebige reelle Werte der Veränderlichen erörtert werden.

516. Über eine mit der Fakultät zusammenhängende Funktion $\mu(x)$. Es sei bis auf weiteres unter x eine beliebige *ganze positive Zahl* verstanden. Alsdann betrachten wir die Funktion

$$(1)\qquad \mu(x) = \frac{x!\, e^x}{\sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot e^x}{\sqrt{2\pi}\,.\,x^{x+\frac{1}{2}}}.$$

Darin soll $\sqrt{2\pi}$ und $x^{\frac{1}{2}}$ positiv sein.

Aus (1) folgt sofort:

$$(2)\qquad \ln\frac{\mu(x)}{\mu(x+1)} = -1 + (x+\tfrac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Weil x eine ganze positive Zahl ist, so liegt $1:x$ zwischen 0 und 1 und ist höchstens gleich 1. Mithin gilt nach (4) in Nr. 120 die konvergente Entwicklung:

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{nx^n} + \cdots,$$

so daß aus (2) die ebenfalls konvergente Entwicklung folgt:

$$(3)\ \ln\frac{\mu(x)}{\mu(x+1)} = \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{12x^3} + \frac{3}{40x^4} - \cdots + \frac{(-1)^n(n-1)}{2n(n+1)x^n} + \cdots.$$

In dieser Reihe sind die Glieder abwechselnd positiv und negativ. Der absolute Betrag des Verhältnisses aus dem n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Gliede der Reihe ist gleich

$$\frac{n^2}{n^2+n-2}\cdot\frac{1}{x},$$

also gleich $1:x$ für $n=2$ und kleiner als $1:x$ für $n>2$. Die absoluten Beträge der Glieder der Reihe (3) nehmen mithin vom zweiten an beständig ab, und zwar selbst für den kleinsten Wert $x=1$ von x. Außerdem streben die Glieder mit wachsendem n nach Null.

Wir können also aus (3) den Schluß ziehen:

$$\ln\frac{\mu(x)}{\mu(x+1)} < \frac{1}{12x^2}$$

oder:

$$(4)\qquad \frac{\mu(x)}{\mu(x+1)} < e^{\frac{1}{12x^2}}.$$

Wir können aber auch eine noch niedrigere Grenze für denselben Quotienten finden, und dies soll sogleich geschehen, da wir sie doch später — in Nr. 518 — gebrauchen.

Multiplizieren wir nämlich die Gleichung (3) mit $x+1$, so kommt:

$$(x+1)\ln\frac{\mu(x)}{\mu(x+1)}=\frac{1}{12x}-\frac{1}{120x^3}+\cdots+\frac{(-1)^n(n-2)}{2n(n+1)(n+2)x^n}+\cdots.$$

In dieser Reihe fehlt das Glied mit $1:x^2$; die Glieder der Reihe sind abwechselnd positiv und negativ, und der absolute Betrag des Verhältnisses aus dem n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Gliede der Reihe ist gleich

$$\frac{n(n-1)}{(n-2)(n+3)}\cdot\frac{1}{x},$$

d. h. gleich $1:x$ für $n=3$ und kleiner als $1:x$ für $n>3$, selbst für $x=1$. Demnach erhalten wir:

$$(x+1)\ln\frac{\mu(x)}{\mu(x+1)}<\frac{1}{12x}$$

oder:

$$\ln\frac{\mu(x)}{\mu(x+1)}<\frac{1}{12x(x+1)}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right). \tag{5}$$

Nach dieser Einschaltung kehren wir zur Ungleichung (4) zurück. Verstehen wir unter Θ_0 eine positive Zahl kleiner als $\frac{1}{12}$, so läßt sie sich so schreiben:

$$\frac{\mu(x)}{\mu(x+1)}=e^{\frac{\Theta_0}{x^2}}. \tag{6}$$

Ersetzen wir hierin x nach und nach durch $x+1$, $x+2$, $\cdots 2x-1$, so ergeben sich analoge Gleichungen, in denen an die Stelle von Θ_0 andere positive Zahlen Θ_1, Θ_2, $\cdots\ \Theta_{x-1}$ treten, die sämtlich kleiner als $\frac{1}{12}$ sind:

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\mu(x+1)}{\mu(x+2)}&=e^{\frac{\Theta_1}{(x+1)^2}},\\ \frac{\mu(x+2)}{\mu(x+3)}&=e^{\frac{\Theta_2}{(x+2)^2}},\\ &\cdots\cdots\\ \frac{\mu(2x-1)}{\mu(2x)}&=e^{\frac{\Theta_{x-1}}{(2x-1)^2}}.\end{aligned}\right.$$

Insgesamt liegen in (6) und (7) gerade x Gleichungen vor, die wir alle miteinander multiplizieren wollen. Dabei geht rechts eine Exponentialfunktion mit dem Exponenten

$$\frac{\Theta_0}{x^2}+\frac{\Theta_1}{(x+1)^2}+\cdots+\frac{\Theta_{x-1}}{(2x-1)^2}<\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot x=\frac{1}{12x}$$

hervor. Es gibt also eine positive Zahl Θ kleiner als $\frac{1}{12}$ derart, daß

(8) $$\frac{\mu(x)}{\mu(2x)} = e^{\frac{\Theta}{x}}$$

ist. Hieraus folgt:

(9) $$\lim_{x=+\infty} \frac{\mu(x)}{\mu(2x)} = 1,$$

falls x eine ganze positive Zahl bedeutet.

517. Asymptotischer Wert der Fakultät. Wenn wir nun bedenken, daß nach der Formel von Wallis in Nr. 481

$$\lim_{x=+\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2x-2}{2x-3}\cdot\frac{2x-2}{2x-1}\cdot\frac{2x}{2x-1} = \tfrac{1}{2}\pi$$

ist, wofür wir auch

$$\lim_{x=+\infty} \frac{1^4\cdot 2^4\cdots x^4\cdot 2^{4x}}{1^2\cdot 2^2\cdots(2x)^2\cdot x\cdot\pi} = 1$$

oder

$$\lim_{x=+\infty} \frac{[\mu(x)]^4}{[\mu(2x)]^2} = 1$$

schreiben können, so folgt durch Wurzelausziehen, da die Funktion μ stets positiv ist:

(1) $$\lim_{x=+\infty} \frac{[\mu(x)]^2}{\mu(2x)} = 1.$$

Hiernach und nach (9) in voriger Nummer ist:

(2) $$\lim_{x=+\infty} \mu(x) = 1.$$

Da $\mu(x)$ nach (3) in voriger Nummer stets größer als $\mu(x+1)$ ist, so strebt $\mu(x)$ mit wachsendem x *abnehmend* zur Grenze Eins, d. h. es ist

(3) $$\mu(x) = 1 + \varepsilon,$$

wobei ε eine *positive* Zahl bedeutet, die für $\lim x = +\infty$ den Grenzwert Null hat. Nach der Definition (1) von $\mu(x)$ in voriger Nummer folgt also:

$$\frac{x!\,e^x}{\sqrt{2\pi}\cdot x^{x+\frac{1}{2}}} = 1 + \varepsilon$$

oder:

(4) $$x! = \sqrt{2\pi}\,e^{-x}\,x^{x+\frac{1}{2}}(1+\varepsilon).$$

Diese Formel besagt, daß sich die Fakultät $x!$ und die Funktion

(5) $$\sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}}$$

mit unbegrenzt wachsendem ganzzahligen x *asymptotisch* einander nähern, d. h. daß ihr Verhältnis um so weniger von Eins abweicht, je größer die ganze positive Zahl x gewählt wird.

518. Einengung der Fakultät zwischen zwei Grenzen. Soeben haben wir eine Funktion von x gewonnen, die sich der Fakultät $x!$ mit wachsendem x derart asymptotisch nähert, daß sie doch immer kleiner als $x!$ bleibt. Wir können nun aber auch eine obere Grenze für $x!$ ableiten:

Nach (3) in voriger Nummer ist

(1) $$\mu(x) = 1 + \varepsilon,$$

wo $\varepsilon > 0$ und $\lim \varepsilon = 0$ für $x = +\infty$ ist. Folglich ist $\ln \mu(x)$ positiv. Nun ist nach der Definition von $\mu(x)$ in (1), Nr. 516, für ganzes positives x, weil $x! = \Gamma(x+1)$ ist:

(2) $$\ln \Gamma(x+1) = \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) - x + (x + \tfrac{1}{2})\ln x + \ln \mu(x).$$

Also ergibt sich:

(3) $$\ln \Gamma(x+1) > \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) - x + (x + \tfrac{1}{2})\ln x.$$

Ferner ist für *jede* Funktion $\mu(x)$:

$$\ln \mu(x) = \ln \frac{\mu(x)}{\mu(x+1)} + \ln \frac{\mu(x+1)}{\mu(x+2)} + \cdots$$
$$+ \ln \frac{\mu(x+m)}{\mu(x+m+1)} + \ln \mu(x+m+1)\cdot$$

Wenn aber die ganze positive Zahl m unbegrenzt wächst, so erreicht $\ln \mu(x+m+1)$ nach (2) in voriger Nummer den Grenzwert Null. Demnach gilt für jedes ganze positive x die Entwicklung:

(4) $$\ln \mu(x) = \sum_{0}^{+\infty}{}^{m} \ln \frac{\mu(x+m)}{\mu(x+m+1)}\cdot$$

Die Ungleichung (5) von Nr. 516 liefert mithin:

$$\ln \mu(x) < \tfrac{1}{12}\left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \cdots\right]$$

oder:

$$\ln \mu(x) < \frac{1}{12x}. \tag{5}$$

Hieraus aber folgt nach (2) für jedes ganze positive x:

$$\ln \Gamma(x+1) < \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) - x + (x+\tfrac{1}{2})\ln x + \frac{1}{12x}. \tag{6}$$

Gehen wir nun in den beiden Ungleichungen (3) und (6) von den Logarithmen zu den Numeris über, so ergibt sich für jedes ganze positive x:

$$\sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} < x! < \sqrt{2\pi}\, e^{-x+\frac{1}{12x}} x^{x+\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Hiermit ist $x!$ zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, die um so weniger voneinander abweichen, je größer x wird.

519. Die Gudermannsche Reihe. Die Formel (4) der letzten Nummer geht nach (2) in Nr. 516 über in:

$$\ln \mu(x) = \sum_{0}^{+\infty}{}_m \left[(x+m+\tfrac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{x+m}\right) - 1\right]. \tag{1}$$

Setzen wir diesen Wert in die Formel (2) der letzten Nummer ein, so kommt die von *Gudermann* herrührende Entwicklung:

$$\ln \Gamma(x+1) \tag{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) - x + (x+\tfrac{1}{2})\ln x + \sum_{0}^{+\infty}{}_m \left[(x+m+\tfrac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{x+m}\right) - 1\right].$$

Diese Formel ist freilich nur unter der Voraussetzung abgeleitet worden, daß x eine ganze positive Zahl sei. Wir können nun aber ebenfalls durch Anwendung der für die Fakultät gewonnenen asymptotischen Funktion in Nr. 517 zeigen, daß die Gudermannsche Reihe nur eine Umformung der in Nr. 507 aufgestellten Reihe:

$$\ln \Gamma(x) = \sum_{1}^{+\infty}{}_m \left[(x-1)\ln\frac{m+1}{m} - \ln\frac{m+x-1}{m}\right] \tag{3}$$

ist, von der wir wissen, daß sie für jedes komplexe x, abgesehen von Null und den negativen ganzzahligen Werten, richtig ist.

Um dies zu tun, setzen wir von jetzt an voraus, *daß x eine beliebige reelle oder komplexe Zahl, abgesehen von Null und den*

negativen ganzen Zahlen, bedeute. Alsdann sei u_m das m^{te} Glied der Reihe (3), also:

$$(4) \qquad u_m = (x-1)\ln\frac{m+1}{m} - \ln\frac{m+x-1}{m}.$$

Nach (3) ist $\ln\Gamma(x)$ der Grenzwert der Summe $u_1+u_2+\cdots+u_n$ für $\lim n = +\infty$. Diese Summe aber können wir identisch in folgender Art umformen:

$$\begin{aligned} &u_1+u_2+\cdots+u_n\\ &=\tfrac{1}{2}u_1+\tfrac{1}{2}u_n+[\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)+\tfrac{1}{2}(u_2+u_3)+\cdots+\tfrac{1}{2}(u_{n-1}+u_n)]\\ &+v_1-v_n+[(v_2-v_1)+(v_3-v_2)+\cdots+(v_n-v_{n-1})]; \end{aligned}$$

wenn wir unter $v_1, v_2, \cdots v_n$ irgend welche ebenfalls stetige Funktionen von x verstehen. Denn die Glieder der letzten Zeile heben sich gegenseitig fort. Hiernach ist:

$$\sum_1^n{}^m u_m = \tfrac{1}{2}u_1+\tfrac{1}{2}u_n+v_1-v_n+\sum_1^{n-1}{}^m[\tfrac{1}{2}u_m+\tfrac{1}{2}u_{m+1}+v_{m+1}-v_m].$$

Wählen wir insbesondere

$$v_m = (x+m-1)\ln(x+m-1)-(x+m-1),$$

so sind alle Funktionen $v_1, v_2, v_3, \cdots$ stetig für jedes komplexe x, abgesehen von negativen reellen Werten, und es kommt:

$$\begin{aligned} \sum_1^n{}^m u_m &= \tfrac{1}{2}[(x-1)\ln 2-\ln x]+\tfrac{1}{2}\left[(x-1)\ln\frac{n+1}{n}-\ln\frac{x+n-1}{n}\right]\\ &+x\ln x-x-(x+n-1)\ln(x+n-1)+x+n-1+\sum_1^{n-1}{}^m w_m, \end{aligned}$$

worin w_m die Bedeutung hat:

$$\begin{aligned} w_m = (x+m-\tfrac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{x+m-1}\right)-1\\ +\tfrac{1}{2}(x-1)\ln\frac{m+2}{m}+\tfrac{1}{2}\ln(m+1)\,m. \end{aligned}$$

Aber augenscheinlich ist

$$\sum_1^{n-1}{}^m\ln\frac{m+2}{m}=\ln\frac{n(n+1)}{2},\quad \sum_1^{n-1}{}^m\ln(m+1)\,m=\ln\frac{(n!)^2}{n}=2\ln n!-\ln n,$$

so daß kommt:

[519

$$(5)\quad \sum_1^n {}_m u_m = \tfrac{1}{2}\left[(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x-1}{n}\right)\right]$$
$$+ (x-\tfrac{1}{2})\ln x + \tfrac{1}{2}(x-1)\ln n(n+1)$$
$$-(x+n-1)\ln(x+n-1) + n - 1 + \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n$$
$$+ \sum_1^{n-1} {}_m\left[(x+m-\tfrac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{x+m-1}\right) - 1\right].$$

Nun wenden wir die in Nr. 517 für $\ln n!$ gefundene asymptotische Funktion an. Setzen wir nämlich in der dort entwickelten Formel (4) für x, worunter damals eine ganze positive Zahl verstanden wurde, die ganze positive Zahl n, so erhalten wir

$$\ln n! = \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) - n + (n+\tfrac{1}{2})\ln n + \ln(1+\varepsilon),$$

wobei ε für $\lim n = +\infty$ den Grenzwert Null hat. Diesen Ausdruck führen wir in (5) für $\ln n!$ ein. Ferner hat die in (5) in der ersten Zeile stehende Summe für $\lim n = +\infty$ den Grenzwert Null, und sie sei mit η bezeichnet, so daß $\lim \eta = 0$ für $\lim n = +\infty$ ist. Alsdann erhalten wir:

$$\sum_1^n {}_m u_n = \eta + \ln(1+\varepsilon) + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) - 1 + (x-\tfrac{1}{2})\ln x$$
$$+ \tfrac{1}{2}(x-1)\ln n(n+1) - (x+n-1)\ln(x+n-1) + n\ln n$$
$$+ \sum_1^{n-1} {}_m\left[(x+m-\tfrac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{x+m-1}\right) - 1\right].$$

Die Summe der Glieder der zweiten Zeile ist gleich

$$\tfrac{1}{2}(x-1)\ln\frac{n(n+1)}{(x+n-1)^2} - n\ln\left(1+\frac{x-1}{n}\right)$$

und hat daher für $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $-(x-1)$, so daß der Grenzübergang liefert:

$$\ln \Gamma(x) = \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) + (x-\tfrac{1}{2})\ln x - x$$
$$+ \sum_1^{+\infty} {}_m\left[(x+m-\tfrac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{x+m-1}\right) - 1\right].$$

Ersetzen wir hierin x durch $x+1$, so kommt:

$$\ln \Gamma(x+1) = \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) + (x+\tfrac{1}{2})\ln(x+1) - (x+1)$$
$$+ \sum_1^{+\infty} {}_m\left[(x+m+\tfrac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{x+m}\right) - 1\right].$$

Wollen wir die letzte Summe statt von $m = 1$ an schon von $m = 0$ an erstrecken, so müssen wir noch

$$(x + \tfrac{1}{2}) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$$

abziehen. Alsdann kommt:

$$\ln \Gamma(x + 1) \tag{6}$$

$$= \tfrac{1}{2} \ln (2\pi) - x + (x + \tfrac{1}{2}) \ln x + \sum_{0}^{+\infty}{}_{m} \left[(x + m + \tfrac{1}{2}) \ln \left(1 + \frac{1}{x + m}\right) - 1\right].$$

Dies aber ist die Gudermannsche Formel (2). Wenn wir beachten, daß die Formel (3) in einem Bereiche, der frei von negativen reellen Werten, ist, nach Satz 1, Nr. 507, gleichmäßig konvergiert, so erkennen wir, daß die Entwicklung (6) in einem Bereiche, der von den reellen Stellen $x \leqq -1$ frei ist, überall gleichmäßig konvergiert. Denn obwohl in (6) auch $\ln x$ auftritt und $\ln x$ für $x = 0$ unstetig wird, ist doch zu bemerken, daß das für $m = 0$ hervorgehende Glied der Summe ebenfalls $\ln x$ enthält und sich diese beiden mit $\ln x$ behafteten Terme fortheben.

Es folgt hieraus, daß die Reihe (1), nämlich

$$\ln \mu(x) = \sum_{0}^{+\infty}{}_{m} \left[(x + m + \tfrac{1}{2}) \ln \left(1 + \frac{1}{x + m}\right) - 1\right] \tag{7}$$

in einem von der negativen reellen Achse freien Bereiche gleichmäßig konvergiert, so daß hiermit die Funktion $\mu(x)$ auch im komplexen Bereiche definiert ist, wobei nach (6) auch jetzt noch:

$$\ln \mu(x) = \ln \Gamma(x + 1) - \tfrac{1}{2} \ln (2\pi) + x - (x + \tfrac{1}{2}) \ln x, \tag{8}$$

das heißt

$$\mu(x) = \frac{\Gamma(x + 1)\, e^{x}}{\sqrt{2\pi}\, x^{x + \frac{1}{2}}} \tag{9}$$

ist. Falls x eine positive ganze Zahl bedeutet, ist dies wieder die ursprüngliche Definition (1) von $\mu(x)$ in Nr. 516.

Aus (8) folgt noch:

$$\begin{cases} \dfrac{d \ln \mu(x)}{dx} = \dfrac{d \ln \Gamma(x + 1)}{dx} - \dfrac{1}{2x} - \ln x, \\ \dfrac{d^2 \ln \mu(x)}{dx^2} = \dfrac{d^2 \ln \Gamma(x + 1)}{dx^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2}. \end{cases} \tag{10}$$

Da

$$\lim_{x=+\infty} (x + m + \tfrac{1}{2}) \ln\left(1 + \frac{1}{x+m}\right) = 1$$

ist, so folgt aus (7):

(11) $$\lim_{x=+\infty} \ln \mu(x) = 0.$$

Für ganzzahliges positives x hat sich dies auch schon in der Formel (2) von Nr. 517 ergeben. Ferner folgt aus (7) durch Differentiation nach x:

$$\frac{d \ln \mu(x)}{dx} = \sum_{0}^{+\infty}{}_m \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x+m}\right) - \frac{x+m+\frac{1}{2}}{(x+m)(x+m+1)}\right].$$

Daß diese Reihe gleichmäßig konvergiert, folgt aus der zu Anfang von Nr. 508 gemachten Bemerkung. Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck hat nun für $x = +\infty$ den Grenzwert Null. Also ist auch:

(12) $$\lim_{x=+\infty} \frac{d \ln \mu(x)}{dx} = 0.$$

520. Darstellung von $\ln \mu(x)$ für positive Werte von x vermittels eines bestimmten Integrals. Wir wollen nunmehr annehmen, *die Veränderliche x sei eine positive Zahl.* Aus Satz 2, Nr. 508, und aus der zweiten Formel (10) der letzten Nummer geht hervor, daß

$$\frac{d^2 \ln \mu(x)}{dx^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \sum_{1}^{+\infty}{}_m \frac{1}{(x+m)^2}$$

ist oder auch, wenn wir die Summe von $m = 0$ an erstrecken:

(1) $$\frac{d^2 \ln \mu(x)}{dx^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \sum_{0}^{+\infty}{}_m \frac{1}{(x+m)^2}.$$

Weil nun x positiv sein soll, können wir hierin nach (1) in Nr. 477 und nach (2) in Nr. 492

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} d\alpha, \quad \frac{1}{(x+m)^2} = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha(x+m)} d\alpha$$

für $m = 0, 1, 2, \cdots$ setzen. Alsdann ergibt sich:

$$(2)\quad \frac{d^2 \ln \mu(x)}{dx^2} = -\int_0^{+\infty} (1 + \tfrac{1}{2}\alpha)\, e^{-\alpha x}\, d\alpha + \sum_0^{+\infty} {}_m \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha(x+m)}\, d\alpha.$$

Wir können nun die Reihenfolge der Zeichen $\sum$ und $\int$ im letzten Gliede vertauschen, weil nach Satz 1, Nr. 101, und nach den Bemerkungen in Nr. 428 die Reihe

$$(3)\qquad \sum_0^{+\infty} {}_m\, \alpha e^{-\alpha(x+m)} = \alpha e^{-\alpha x} \sum_0^{+\infty} {}_m\, (e^{-\alpha})^m = \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}}$$

für $\alpha \geqq 0$ gleichmäßig konvergiert (vgl. Satz 26, Nr. 426). Demnach gibt (2):

$$\frac{d^2 \ln \mu(x)}{dx^2} = -\int_0^{+\infty} (1 + \tfrac{1}{2}\alpha)\, e^{-\alpha x}\, d\alpha + \int_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} {}_m\, \alpha e^{-\alpha(x+m)}\, d\alpha$$

oder nach (3):

$$(4)\qquad \frac{d^2 \ln \mu(x)}{dx^2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} - \tfrac{1}{2}\alpha - 1\right) e^{-\alpha x}\, d\alpha,$$

und diese Formel gilt also für $x > 0$.

Wenn wir sie hinsichtlich x von x bis X integrieren, was rechts unter dem Integralzeichen geschehen darf, und dann $\lim X = +\infty$ setzen, so folgt mit Rücksicht auf (12) in voriger Nummer:

$$\frac{d \ln \mu(x)}{dx} = -\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) e^{-\alpha x}\, d\alpha,$$

und dasselbe Verfahren gibt weiterhin mit Rücksicht auf (11) in voriger Nummer:

$$(5)\qquad \ln \mu(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) e^{-\alpha x}\, d\alpha.$$

Diese Formel gilt für $x > 0$.

521. Die Potenzreihe für $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right)$.

Um von dieser Darstellung von $\ln \mu(x)$ durch ein bestimmtes

Integral zu der in Nr. 515 angekündigten Stirlingschen Formel zu gelangen, werden wir zunächst den angegebenen Ausdruck in besonderer Art entwickeln.

Zu diesem Zwecke gehen wir auf die Formel (6) von Nr. 510 zurück, wonach für jedes komplexe x, abgesehen von den ganzzahligen Werten,

$$\ln \Gamma(1+x) + \ln \Gamma(1-x) = \ln(\pi x) - \ln \sin \pi x$$

ist. Durch Differentiation folgt hieraus mit Rücksicht auf (6) in Nr. 373:

$$(1) \qquad \frac{d \ln \Gamma(1+x)}{dx} + \frac{d \ln \Gamma(1-x)}{dx} = \frac{1}{x} - i\pi \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}.$$

Nun aber ist nach (2) in Nr. 508:

$$\frac{d \ln \Gamma(1+x)}{dx} = -\gamma + \sum_{1}^{+\infty} {}^{m} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+x}\right),$$

$$\frac{d \ln \Gamma(1-x)}{dx} = +\gamma - \sum_{1}^{+\infty} {}^{m} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m-x}\right),$$

und wir dürfen diese konvergenten Reihen gliedweise addieren, so daß aus (1) folgt:

$$(2) \qquad 2x \sum_{1}^{+\infty} {}^{m} \frac{1}{m^2 - x^2} = \frac{1}{x} - i\pi \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}.$$

Diese Gleichung ist im Grunde nichts anderes als die in Nr. 480 unter (3) gefundene Partialbruchzerlegung der Kotangens-Funktion; aber wir haben sie jetzt für beliebiges komplexes x bewiesen, wobei die ganzzahligen Werte von x ausgeschlossen sind. Setzen wir für x den Wert $i\alpha : 2\pi$, so kommt, wenn wir überdies beide Seiten der Gleichung vertauschen:

$$(3) \qquad \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = 2 \sum_{1}^{+\infty} {}^{m} \frac{1}{(2m\pi)^2 + \alpha^2}.$$

Insbesondere gilt diese Formel für jedes reelle α, da ja nur die ganzzahligen Werte von $i\alpha : 2\pi$ ausgeschlossen sind.

Nun ergibt sich durch Partialdivision:

$$\frac{1}{(2m\pi)^2 + \alpha^2} = \frac{1}{(2m\pi)^2} - \frac{\alpha^2}{(2m\pi)^4} + \cdots \pm \frac{\alpha^{2n-2}}{(2m\pi)^{2n}} \mp \Theta_m \frac{\alpha^{2n}}{(2m\pi)^{2n+2}},$$

wobei

$$\Theta_m = \frac{(2m\pi)^2}{(2m\pi)^2 + \alpha^2}$$

ist und, falls α reell ist, eine positive Zahl kleiner als Eins bedeutet. Geben wir m die Werte $1, 2, \cdots r$ und addieren alsdann alle r Formeln, so bekommt $\mp \alpha^{2n}$ den positiven Faktor:

$$\sum_1^r{}_m \Theta_m \cdot \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}} < \sum_1^r{}_m \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}}.$$

Dieser Faktor hat demnach die Form:

$$\Theta \sum_1^r{}_m \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}},$$

wobei $0 < \Theta < 1$ ist. Wir finden mithin:

$$\sum_1^r{}_m \frac{1}{(2m\pi)^2 + \alpha^2} = \sum_1^r{}_m \frac{1}{(2m\pi)^2} - \alpha^2 \sum_1^r{}_m \frac{1}{(2m\pi)^4} + \cdots$$
$$\pm \alpha^{2n-2} \sum_1^r{}_m \frac{1}{(2m\pi)^{2n}} \mp \Theta\,\alpha^{2n} \sum_1^r{}_m \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}}.$$

Die rechts stehenden Summen haben für $\lim r = +\infty$ sämtlich nach dem Beispiele in Nr. 105 bestimmte endliche Grenzwerte. Demnach ergibt sich beim Grenzübergange mit Rücksicht auf (3) die Entwicklung:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = 2\sum_1^{+\infty}{}_m \frac{1}{(2m\pi)^2} - 2\alpha^2 \sum_1^{+\infty}{}_m \frac{1}{(2m\pi)^4} + \cdots$$
$$\pm 2\alpha^{2n-2} \sum_1^{+\infty}{}_m \frac{1}{(2m\pi)^{2n}} \mp 2\Theta\alpha^{2n} \sum_1^{+\infty}{}_m \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}}.$$

Setzen wir nun allgemein:

(4) $$B_{2n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots 2n}{2^{2n-1}\,\pi^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots\right),$$

so folgt:

(5) $$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = \frac{B_2}{2!} - \frac{B_4}{4!}\alpha^2 + \cdots \pm \frac{B_{2n}}{(2n)!}\alpha^{2n-2} \mp \Theta\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\alpha^{2n},$$

wobei $0 < \Theta < 1$ ist, und zwar gilt diese von *Cauchy* gegebene Entwicklung für jedes reelle α, ja überhaupt für alle

[521

Werte von α, abgesehen von denjenigen, für die $i\alpha : 2\pi$ eine ganze Zahl ist, d. h. abgesehen von den Werten $2k\pi i$, wobei k irgend eine ganze Zahl bedeutet.

Die Entwicklung (5) ist offenbar nichts anderes als eine Mac-Laurinsche Reihe, vgl. Nr. 372. Es darf in ihr $n = +\infty$ gesetzt werden, falls

$$\lim_{n=+\infty} \frac{B_{2n+2}\,\alpha^{2n}}{(2n+2)!} = 0$$

ist, d. h. nach (4), falls $\lim (\alpha : 2\pi)^{2n} = 0$ ist. Daher gibt (5) eine Potenzreihe, die für alle komplexen Werte von α innerhalb des durch $|\alpha| < 2\pi$ bestimmten Konvergenzkreises gültig ist, nämlich:

$$(6)\qquad \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = \frac{B_2}{2!} - \frac{B_4}{4!}\alpha^2 + \frac{B_6}{6!}\alpha^4 - \frac{B_8}{8!}\alpha^6 + \cdots$$

522. Die Bernoullischen Zahlen. Die Koeffizienten $B_2, B_4, B_6, \cdots$, die in den Entwicklungen der letzten Nummer auftraten, kommen zuerst bei *Jakob Bernoulli* vor und heißen die *Bernoullischen Zahlen.* Obgleich die Definition der Zahl B_{2n} durch die Formel (4) eine Potenz von π enthält, sind doch sämtliche Bernoullische Zahlen rational. Man kann nämlich eine *Rekursionsformel* aufstellen, aus der sie nacheinander zu berechnen sind und ihre Rationalität erhellt. Denn wenn wir in der letzten Entwicklung unter α eine positive Zahl kleiner als 2π verstehen, die Gleichung mit α^2 multiplizieren, darauf Eins addieren und dann noch mit

$$\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2\alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{(1+e^{\alpha})(1-e^{-\alpha})}{2\alpha}$$

multiplizieren, so kommt:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right) = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2\alpha}\left(1+\frac{B_2}{2!}\alpha^2 - \frac{B_4}{4!}\alpha^4 + \frac{B_6}{6!}\alpha^6 - \cdots\right).$$

Ersetzen wir die Exponentialfunktionen durch ihre Reihen nach Nr. 117, so finden wir:

$$\frac{1}{2}\left(2+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\frac{\alpha^6}{6!}+\cdots\right) =$$
$$\left(1+\frac{\alpha^2}{3!}+\frac{\alpha^4}{5!}+\cdots\right)\left(1+\frac{B_2}{2!}\alpha^2 - \frac{B_4}{4!}\alpha^4+\cdots\right).$$

Da alle vorkommenden Reihen unbedingt konvergieren, so können wir rechts die Multiplikation nach Satz 17 in Nr. 110 ausführen. Alsdann gibt die Koeffizientenvergleichung auf beiden Seiten die folgenden Formeln:

$$\frac{1}{2\cdot 2!}=\frac{1}{3!}+\frac{B_2}{2!},$$

$$\frac{1}{2\cdot 4!}=\frac{1}{5!}+\frac{B_2}{3!\,2!}-\frac{B_4}{4!},$$

$$\frac{1}{2\cdot 6!}=\frac{1}{7!}+\frac{B_2}{5!\,2!}-\frac{B_4}{3!\,4!}+\frac{B_6}{6!}$$

usw. Die allgemeine Rekursionsformel lautet:

$$\frac{1}{2\cdot(2n)!}=\frac{1}{(2n+1)!}+\frac{B_2}{(2n-1)!\,2!}-\frac{B_4}{(2n-3)!\,4!}+\frac{B_6}{(2n-5)!\,6!}-\cdots$$
$$\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}B_{2n}.$$

Man sieht daher, daß sich nacheinander für B_2, B_4, B_6, $\cdots$ lauter rationale Zahlen ergeben, nämlich:

$$B_2=\tfrac{1}{6},\quad B_4=\tfrac{1}{30},\quad B_6=\tfrac{1}{42},\quad B_8=\tfrac{1}{30},\quad B_{10}=\tfrac{5}{66},$$
$$B_{12}=\tfrac{691}{2730},\quad B_{14}=\tfrac{7}{6},\quad B_{16}=\tfrac{3617}{510},\ \ldots.$$

Wenn wir wie in (3), Nr. 503:

$$(1)\qquad S_n=\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$$

setzen, so folgt aus (4) in voriger Nummer:

$$(2)\qquad B_{2n}=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}S_{2n}.$$

Weil aber $S_{2n}>1$ ist, so geht hieraus für B_{2n} eine untere Grenze hervor:

$$B_{2n}>\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}.$$

Außerdem folgt aus (2):

$$\frac{B_{2n+2}}{B_{2n}}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}\cdot\frac{S_{2n+2}}{S_{2n}}$$

und, weil S_{2n} mit wachsendem n nach Nr. 503 abnimmt:

$$(4)\qquad \frac{B_{2n+2}}{B_{2n}}<\frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}.$$

[522

Ferner ergibt sich aus (2):

$$B_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}} \; \frac{S_{2n}}{S_2} B_2,$$

also wegen $B_2 = \frac{1}{6}$ und $S_{2n} < S_2$:

$$B_{2n} < \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}} \cdot \frac{1}{6}.$$

Hiernach und nach (3) können wir also B_{2n} in zwei Grenzen einschließen:

(5) $$2\,\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} < B_{2n} < \frac{1}{12} \cdot \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n-2}}.$$

Nach den Ungleichungen (7) in Nr. 518 ist aber

$$\sqrt{2\pi}\, e^{-2n} (2n)^{2n+\frac{1}{2}} < (2n)! < \sqrt{2\pi}\, e^{-2n+\frac{1}{24n}} (2n)^{2n+\frac{1}{2}}.$$

Hieraus und aus den Ungleichungen (5) folgt weiterhin:

(6) $$2\,\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{1}{2}}}\, e^{-2n} < B_{2n} < \frac{1}{12}\, \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{5}{2}}}\, e^{-2n+\frac{1}{24n}}.$$

In diesen Ungleichungen ist das Verhältnis aus der oberen und unteren Grenze gleich

$$\tfrac{1}{6}\pi^2 e^{\frac{1}{24n}}.$$

Nach (3) ist

$$\tfrac{1}{2} B_{2n} > \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{2\pi} \cdot \frac{3}{2\pi} \cdots \frac{2n}{2\pi}.$$

Sobald $n > 3$ ist, hat das rechts stehende Produkt nur sechs Faktoren, die kleiner als Eins sind, und $2n - 6$ Faktoren, die größer als Eins sind. Demnach ist

(7) $$\lim_{n=+\infty} B_{2n} = +\infty.$$

Bis B_6 nehmen die Bernoullischen Zahlen ab; von da an wachsen sie beständig.

523. Die Stirlingsche Formel. Nachdem wir in Nr. 521 die Entwicklung (5) gewonnen habe, die insbesondere

für jedes reelle α gilt, setzen wir sie in der letzten Formel von Nr. 520 ein und finden so *für positives* x:

$$(1)\ \ln\mu(x)=\frac{B_2}{2!}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}d\alpha-\frac{B_4}{4!}\int_0^{+\infty}\alpha^2e^{-\alpha x}d\alpha+\frac{B_6}{6!}\int_0^{+\infty}\alpha^4e^{-\alpha x}d\alpha-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty}\alpha^{2n-2}e^{-\alpha x}d\alpha+(-1)^n\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^{+\infty}\Theta\alpha^{2n}e^{-\alpha x}d\alpha\,.$$

Nun aber ist nach (1) in Nr. 496:

$$\int_0^{+\infty}\alpha^{2k}e^{-\alpha x}d\alpha=\frac{\Gamma(2k+1)}{x^{2k+1}}=\frac{(2k)!}{x^{2k+1}}$$

für $k=1, 2, 3, \cdots$. Da ferner Θ eine Funktion von α bedeutet, deren Wert zwischen Null und Eins liegt, so läßt sich das letzte Integral nach dem Mittelwertsatze 21 in Nr. 420 auf die Form

$$\theta\int_0^{+\infty}\alpha^{2n}e^{-\alpha x}d\alpha \quad \text{oder} \quad \theta\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}$$

bringen, wobei jetzt θ einen gewissen Wert jener im Integral auftretenden Funktion Θ von α bedeutet, und zwar einen Wert, der von dem gewählten x abhängig sein wird. Es ist also jetzt θ eine Funktion von x, deren Wert zwischen Null und Eins liegt.

Folglich ist *für jedes positive* x:

$$\ln\mu(x)=\frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{B_6}{5\cdot 6}\cdot\frac{1}{x^5}-\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n-1)2n}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}}+\frac{(-1)^n\theta B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{1}{x^{2n+1}},$$

wobei $0<\Theta<1$ ist.

Tragen wir endlich diese Entwicklung in die Formel (8) von Nr. 519 ein, so ergibt sich *die für jedes positive* x *gültige Stirlingsche Formel:*

$$(2)\begin{cases}\ln\Gamma(x+1)=\frac{1}{2}\ln(2\pi)-x+(x+\frac{1}{2})\ln x\\ \qquad+\frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{B_6}{5\cdot 6}\cdot\frac{1}{x^5}-\cdots\\ \qquad+\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n-1)2n}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}}+\frac{(-1)^n\theta B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{1}{x^{2n+1}},\end{cases}$$

worin $0<\theta<1$ ist.

[523

Diese Stirlingsche Formel ist deshalb bemerkenswert, weil sie für $\lim n = +\infty$ eine stets *divergente* unendliche Reihe liefert, aber für endliches n trotzdem sehr gute Dienste für die angenäherte Berechnung von $\ln \Gamma(x+1)$ leistet. Daß die unendliche Reihe in der Tat für jedes positive x divergiert, folgt sofort daraus, daß nach (4) in Nr. 521 das allgemeine Glied, abgesehen vom Vorzeichen, den Wert

$$\frac{B_{2n}}{(2n-1)\,2n}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}} = \frac{1}{2\pi x}\cdot\frac{2}{2\pi x}\cdots\frac{2n-2}{2\pi x}\cdot\frac{1}{2\pi^2 x}\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots\right)$$

hat. Hier strebt der Inhalt der letzten Klammer für $\lim n = +\infty$ zwar nach Eins; aber unter den übrigen Faktoren ist für jedes bestimmt gewählte positive x nur eine von x abhängige, also *bestimmte* Anzahl von Faktoren vorhanden, die kleiner als Eins sind, während die Zahl derjenigen Faktoren, die größer als Eins sind, mit n unbegrenzt wächst, so daß die Divergenz nach Satz 4, Nr. 103, einleuchtet.

Die begrenzte Stirlingsche Formel (2) dagegen läßt sich, wie wir nunmehr zeigen wollen, sehr gut verwenden.

524. Einengung von $\Gamma(x+1)$ für positives x zwischen zwei Grenzen. Wenn wir in der Stirlingschen Formel nur die Glieder bis B_{2n} berücksichtigen, dies mit eingeschlossen, so ist der für $\ln \Gamma(x+1)$ hervorgehende Wert zu klein oder zu groß, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und zwar ist der Fehler absolut genommen kleiner als

$$(1)\qquad \frac{B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{1}{x^{2n+1}},$$

weil θ zwischen 0 und 1 liegt, also kleiner als der absolute Betrag des bei Fortsetzung der abgebrochenen Entwicklung zunächst auftretenden Gliedes. Man erhält demnach die beste Annäherung an den wahren Wert von $\ln \Gamma(x+1)$, wenn man noch dasjenige Glied mit berücksichtigt, dem das absolut genommene kleinste Glied unmittelbar folgt. Bei unbegrenzt wachsendem n streben ja die Glieder, wie wir in voriger Nummer sahen, nach $\pm\infty$, so daß es ein Glied mit dem kleinsten absoluten Betrage gibt.

Wir können mithin $\ln \Gamma(x+1)$ und folglich auch $\Gamma(x+1)$ selbst für jeden positiven Wert von x mit Hilfe der Stirlingschen Formel zwischen zwei Grenzen einschließen, die übrigens um so näher aneinander rücken, je größer x ist.

Wenn wir z. B. $n=0$ wählen, so folgt aus (1), da $B_2=\frac{1}{6}$ ist, daß der Fehler absolut genommen kleiner als $1:12x$ wird. Somit ist:

$$\tfrac{1}{2}\ln(2\pi)-x+(x+\tfrac{1}{2})\ln x<\ln\Gamma(x+1)<\tfrac{1}{2}\ln(2\pi)-x+(x+\tfrac{1}{2})\ln x+\frac{1}{12x}$$

oder, wenn wir von den Logarithmen zu den Numeris übergehen:

$$(2)\qquad \sqrt{2\pi}\,e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}<\Gamma(1+x)<\sqrt{2\pi}\,e^{-x+\frac{1}{12x}}\,x^{x+\frac{1}{2}}$$

für jedes positive x. Für ganzzahlige positive Werte von x fanden wir diese Ungleichungen schon in Nr. 518.

In Fig. 20 haben wir, um einen Begriff von dieser Annäherung zu geben, die drei in (2) auftretenden Funktionen für kleine positive Werte von x graphisch dargestellt.

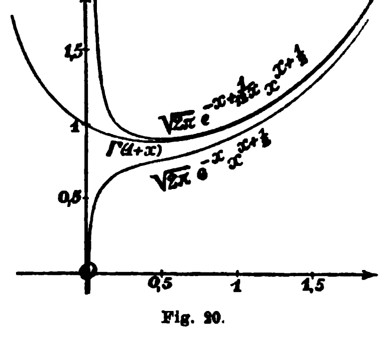


Fig. 20.

Es sei u_n der absolute Betrag des mit B_{2n} behafteten Gliedes der Stirlingschen Formel, also

$$u_n=\frac{B_{2n}}{(2n-1)\,2n}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}},$$

so daß

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{B_{2n+2}}{B_{2n}}\cdot\frac{(2n-1)\,2n}{(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{1}{x^2}$$

ist. Hieraus folgt nach (4) in Nr. 522:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{(2n-1)\,2n}{4\pi^2x^2}<\frac{n^2}{\pi^2x^2}<\left(\frac{n}{3x}\right)^2.$$

Solange $n\leq 3x$ ist, wird mithin $u_{n+1}<u_n$. Ist $x>1$, so nehmen also die Glieder der Stirlingschen Formel zuerst ihren absoluten Beträgen nach ab. Wenn x insbesondere eine ganze Zahl ist, so tritt dies sicher bis zu demjenigen Gliede ein, das zu $n=3x$ gehört.

[524

525. Der Rest der Stirlingschen Formel. Nach der Entwicklung (2) von Nr. 523 und nach (4) in Nr. 522 ist der absolute Betrag des Restes

$$R_n = \frac{(-1)^n \theta B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{1}{x^{2n+1}}$$

der Stirlingschen Formel der Ungleichung unterworfen:

$$|R_n| < \frac{B_{2n}}{4\pi^2 x^{2n+1}},$$

also nach (6) in Nr. 522 um so mehr dieser:

(1) $$|R_n| < \frac{1}{6} \frac{\sqrt{n\pi}}{x} \left(\frac{n}{e\pi x}\right)^{2n} e^{\frac{1}{24n}}.$$

Diese Grenze läßt sich leicht logarithmisch für gegebenes x und n berechnen.

Wenn x eine *ganze* positive Zahl ist, so nehmen die Glieder der Reihe, wie wir sahen, absolut genommen bis zu dem zu $n = 3x$ gehörigen Gliede ab. Wird $n = 3x$ gewählt, so folgt aus (1):

$$|R_{3x}| < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{6x - \frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{72x} - 6x}}{\sqrt{x}}.$$

Weil x mindestens gleich Eins ist, so ist um so mehr:

$$|R_{3x}| < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{2}} \frac{e^{\frac{1}{72} - 6x}}{\sqrt{x}}.$$

Es ist aber:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{2}} e^{\frac{1}{72}} < 0{,}393\,4092,$$

also:

$$|R_{3x}| < 0{,}393\,4092 \frac{1}{e^{6x}\sqrt{x}}$$

oder:

(2) $$\log |R_{3x}| < -0{,}405\,1555 - 2{,}605\,7668\,x - \tfrac{1}{2}\log x.$$

Insbesondere ist für $x = 1$ bereits:

$$\log |R_3| < -3{,}0109223, \quad \text{d. h.} \quad |R_3| < 0{,}0009752 < \frac{1}{10^3}$$

und für $x = 10$:

$$\log |R_{30}| < -26{,}9628235, \quad \text{d. h.} \quad |R_{30}| < \frac{1{,}09}{10^{27}},$$

525]

so daß also der Rest für die 26 ersten Dezimalstellen nicht mehr in Betracht kommt, wenn man die Reihe nach dem mit B_{60} behafteten Gliede abbricht.

526. Formeln für die Ableitungen von $\ln \Gamma(x+1)$. Durch Differentiation nach x lassen sich auch für die Ableitungen von $\ln \Gamma(x+1)$ Entwicklungen ähnlich der Stirlingschen Formel ableiten. Wir benutzen dabei jedoch nicht direkt die Stirlingsche Formel (2) in Nr. 523, denn in ihr ist θ eine zwar zwischen Null und Eins gelegene, aber uns unbekannte Funktion von x. Vielmehr gehen wir auf die Formel (1) von Nr. 523 für $\ln \mu(x)$ zurück, in der Θ unter dem Integralzeichen des letzten Gliedes auftritt und nach den Entwicklungen von Nr. 521 nur von α und nicht von x abhängt.

Wenn wir diese Formel r-mal nach x differenzieren, so kommt:

$$(-1)^r \frac{d^r \ln \mu(x)}{dx^r} = \frac{B^2}{2!}\int_0^{+\infty} \alpha^r e^{-\alpha x}\, d\alpha - \frac{B_4}{4!}\int_0^{+\infty} \alpha^{r+2} e^{-\alpha x}\, d\alpha + \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty} \alpha^{r+2n-2} e^{-\alpha x}\, d\alpha + (-1)^n \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^{+\infty} \Theta\alpha^{r+2n} e^{-\alpha x}\, d\alpha,$$

und hieraus folgt auf dieselbe Weise, wie wir die Formel (1) in Nr. 523 umänderten:

$$(1)\left\{\begin{aligned} &(-1)^r \frac{d^r \ln \mu(x)}{dx^r} = \frac{r!}{2!}\frac{B_2}{x^{r+1}} - \frac{(r+2)!}{4!}\frac{B_4}{x^{r+3}} + \cdots \\ &+(-1)^{n-1}\frac{(r+2n-2)!}{(2n)!}\frac{B_{2n}}{x^{r+2n-1}} + (-1)^n \theta \frac{(r+2n)!}{(2n+2)!}\frac{B_{2n+2}}{x^{r+2n+1}}, \end{aligned}\right.$$

wobei θ nunmehr eine von x abhängige, aber zwischen Null und Eins gelegene Größe ist.

Für $\lim n = +\infty$ würde hieraus wieder eine *divergente* Reihe hervorgehen. Brechen wir aber die Berechnung nach dem mit B_{2n} behafteten Gliede ab, so ist der begangene Fehler absolut genommen kleiner als der absolute Betrag des folgenden Gliedes. Insbesondere ergibt sich für $r = 1$:

$$(2)\qquad \frac{d \ln \mu(x)}{dx} = -\frac{B_2}{2x^2} + \frac{B_4}{4x^4} - \cdots + \frac{(-1)^n B_{2n}}{2nx^{2n}} + \frac{(-1)^{n+1}\theta B_{2n+2}}{(2n+2)x^{2n+2}}.$$

Die Formeln (1) und (2) gelten *für jedes positive* x.

Nach (10) in Nr. 519 ist nun:

$$(3)\qquad \frac{d\ln\Gamma(x+1)}{dx} = \ln x + \frac{1}{2x} + \frac{d\ln\mu(x)}{dx},$$

so daß aus (2) folgt:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\ln\Gamma(x+1)}{dx} = \ln x + \dfrac{1}{2x} \\ \qquad -\dfrac{B_2}{2x^2} + \dfrac{B_4}{4x^4} - \cdots + \dfrac{(-1)^n B_{2n}}{2nx^{2n}} + \dfrac{(-1)^{n+1}\theta B_{2n+2}}{(2n+2)x^{2n+2}}. \end{cases}$$

Ferner ergibt sich aus (3) durch $(r-1)$ malige Differentiation:

$$(-1)^r \frac{d^r\ln\Gamma(x+1)}{dx^r} = \frac{(r-2)!}{x^{r-1}} - \frac{(r-1)!}{2x^r} + (-1)^r \frac{d^r\ln\mu(x)}{dx^r}$$

und, wenn wir hierin die Entwicklung (1) einsetzen:

$$(5)\quad \begin{cases} (-1)^r\dfrac{d^r\ln\Gamma(x+1)}{dx^r} = \dfrac{(r-2)!}{x^{r-1}} - \dfrac{(r-1)!}{2x^r} + \dfrac{r!}{2!}\dfrac{B_2}{x^{r+1}} - \dfrac{(r+2)!}{4!}\dfrac{B_4}{x^{r+3}} + \cdots \\ \qquad + (-1)^{n-1}\dfrac{(r+2n-2)!}{(2n)!}\dfrac{B_{2n}}{x^{r+2n-1}} + (-1)^n\theta\dfrac{(r+2n)!}{(2n+2)!}\dfrac{B_{2n+2}}{x^{r+2n+1}}. \end{cases}$$

Auch die Formeln (4) und (5) gelten für jedes positive x, und in ihnen ist stets $0 < \theta < 1$.

527. Die Eulersche Konstante. Wie schon in Nr. 503 gesagt wurde, können wir die Eulersche Konstante γ nunmehr auch direkt berechnen. Wir gehen dabei von der Formel (5) in Nr. 504 aus, in der wir die ganze positive Zahl m mit $x+1$ bezeichnen wollen, so daß kommt:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} - \frac{d\ln\Gamma(x+1)}{dx}.$$

Hierin setzen wir die Entwicklung (4) der letzten Nummer ein und erhalten:

$$(1)\quad \begin{cases} \gamma = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{x} - \ln x - \dfrac{1}{2x} \\ \qquad + \dfrac{B_2}{2x^2} - \dfrac{B_4}{4x^4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{2nx^{2n}} + \dfrac{(-1)^n\theta B_{2n+2}}{(2n+2)x^{2n+2}}. \end{cases}$$

Lassen wir das letzte Glied fort, so ist der für γ hervorgehende Wert zu klein oder zu groß, je nachdem n gerade

oder ungerade ist, und der absolute Betrag des Fehlers ist kleiner als

(2) $$\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)x^{2n+2}}.$$

Setzen wir die in Nr. 522 gefundenen Werte der Bernoullischen Zahlen ein und wählen wir $n = 6$, so ergibt sich für γ der Näherungswert:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} - \ln x - \frac{1}{2x}$$
$$+ \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{120x^4} + \frac{1}{252x^6} - \frac{1}{240x^8} + \frac{1}{132x^{10}} - \frac{691}{32760x^{12}},$$

der zu klein ist. Der Fehler ist jedoch wegen $B_{14} = \frac{7}{6}$ nach (2) nicht größer als $1 : 12x^{14}$. Wird also z. B. $x = 10$ angenommen, so beträgt der Fehler weniger als neun Einheiten der sechszehnten Dezimalstelle. Die Berechnung für $x = 10$ ist ziemlich einfach. Vgl. den in Nr. 503 für γ angegebenen Wert.

528. Geometrische Darstellung der Gammafunktion für reelle Werte der Veränderlichen. Der Verlauf der Kurve

$$y = \Gamma(x)$$

für $x > 0$ ist uns nach Fig. 18, S. 210, bekannt. Nach der ersten Eigenschaft der Gammafunktion, siehe Satz 3, Nr. 509, ist nun

(1) $$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Hiernach ist $\Gamma(x)$ im Intervalle von $x = -1$ bis $x = 0$ negativ, im Intervalle von $x = -2$ bis $x = -1$ positiv, im Intervalle von $x = -3$ bis $x = -2$ negativ usw. Für $x = 0, -1, -2, -3, \cdots$ dagegen ist $\Gamma(x)$ nach Nr. 506 unendlich. Es läßt sich auch mit Hilfe der zweiten Eigenschaft, nach Satz 4, Nr. 510, aus

(2) $$\Gamma(x) = \frac{\pi}{\Gamma(1-x)\sin \pi x}$$

der Verlauf der Gammafunktion für $x < 0$ aus dem für $x > 1$ leicht ableiten. Diese Gleichung zeigt ebenfalls, daß $\Gamma(x)$ für $x = 0, -1, -2, -3, \cdots$ unendlich wird.

Die Reihenentwicklung der zweiten Ableitung von $\ln \Gamma(x)$ in Satz 2, Nr. 508, zeigt, daß

$$\frac{d^2 \ln \Gamma(x)}{dx^2} = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma''(x) - [\Gamma'(x)]^2}{[\Gamma(x)]^2}$$

und mithin auch $\Gamma(x)\,\Gamma''(x)$ für *jedes* reelle x positiv ist. Daher ist $\Gamma''(x)$ im Intervalle von $x = -1$ bis $x = 0$ negativ, im Intervalle von $x = -2$ bis $x = -1$ positiv usw. In jedem

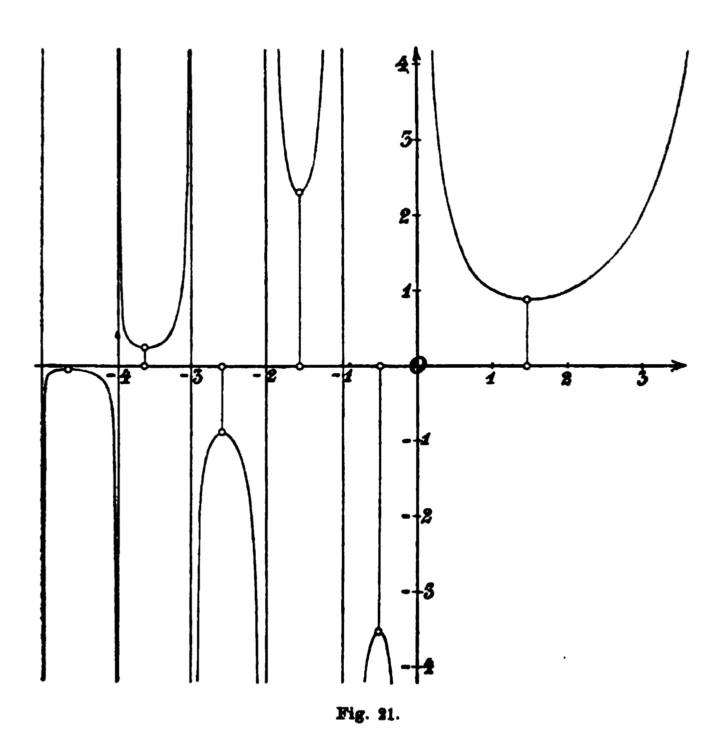


Fig. 21.

der Intervalle, die x von 0 bis -1, von -1 bis -2 usw. abnehmend durchläuft, hat also die Kurve $y = \Gamma(x)$ nur ein Maximum bzw. Minimum. Aus (2) folgt durch Differentiation im Falle $\Gamma'(x) = 0$, daß diese Maxima bzw. Minima zu denjenigen negativen Werten von x gehören, für die

$$\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = \pi \operatorname{ctg} \pi x = -\pi \operatorname{ctg} \pi(1-x)$$

ist. Setzen wir $1 - x = z$, so haben wir also, um diese

Maxima bzw. Minima zu finden, diejenigen positiven Werte von z zu berechnen, für die

$$\frac{d \ln \Gamma(z)}{d z} = \pi \operatorname{ctg} \pi z$$

ist, und dann $x = 1 - z$ zu setzen. Durch näherungsweise Auflösung dieser Gleichung findet man für die am nächsten bei $x = 0$ liegenden Maxima bzw. Minima die Werte:

$x = -0{,}50,$	$\Gamma(x) = -3{,}54$	Maximum,
$-1{,}57$	$2{,}30$	Minimum,
$-2{,}61$	$-0{,}89$	Maximum,
$-3{,}635$	$0{,}245$	Minimum

usw., worauf wir nicht näher eingehen. Die absoluten Beträge der Maxima und Minima nähern sich überdies, je größer $-x$ wird, dem Werte Null immer mehr. Die Fig. 21 gibt eine Übersicht über den Verlauf der Bildkurve von $y = \Gamma(x)$ für positives und negatives x.

529. Independente Berechnung der Bernoullischen Zahlen. In Nr. 522 leiteten wir für die Bernoullischen Zahlen $B_2, B_4, B_6, \cdots$ eine Rekursionsformel ab. Die ursprüngliche Definition (4) von B_{2n} in Nr. 521 gibt dagegen eine sog. *independente*, d. h. von der vorhergehenden Berechnung von $B_2, B_4, \cdots B_{2n-2}$ unabhängige Darstellung der Zahl B_{2n}. Aber obgleich B_{2n}, wie wir wissen, rational ist, enthält diese Darstellung die transzendente Zahl π. Es läßt sich nun auch eine von transzendenten Zahlen freie independente Darstellung der Zahl B_{2n} gewinnen; und wir wollen diese Darstellung, die allerdings etwas umständlich ist, noch als Anhang zu dem gegenwärtigen Kapitel ableiten.

Die Bernoullischen Zahlen sind die Koeffizienten in der Reihenentwicklung (6) von Nr. 521; und dieser Entwicklung können wir, indem wir $\alpha = -z$ setzen, die Form geben:

$$(1) \qquad \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2!} z - \frac{B_4}{4!} z^3 + \frac{B_6}{6!} z^5 - \cdots.$$

Sie konvergiert für jedes komplexe z, dessen absoluter Betrag kleiner als 2π ist. Nun ist identisch:

$$\frac{1}{e^z + 1} = \frac{1}{e^z - 1} - 2 \cdot \frac{1}{e^{2z} - 1}.$$

Ersetzen wir die rechts stehenden Brüche durch die Reihe (1) und durch diejenige Reihe, die aus (1) hervorgeht, wenn $2z$ statt z geschrieben wird, so kommt für $|z| < \pi$:

$$(2)\qquad \frac{1}{e^z+1} = \frac{1}{2} - \frac{(2^2-1)B_2}{2}\frac{z}{1!} + \frac{(2^4-1)B_4}{4}\frac{z^3}{3!} - \frac{(2^6-1)B_6}{6}\frac{z^5}{5!} + \cdots.$$

Dies ist also die Mac-Laurinsche Reihe für $1:(e^z+1)$, und daher muß nach Satz 24, Nr. 116, ihr allgemeiner Koeffizient

$$(3)\qquad (-1)^n\frac{2^{2n}-1}{2n}B_{2n} = \left[\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\frac{1}{e^z+1}\right]_{z=0}$$

sein.

Wir gehen also darauf aus, die rechts stehende Ableitung zu berechnen. Es ist zunächst:

$$(4)\qquad \frac{d}{dz}\frac{1}{e^z+1} = \frac{-e^z}{(e^z+1)^2},$$

und man sieht leicht, daß allgemein für den $(2n-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten eine solche Formel hervorgeht:

$$(5)\qquad \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\frac{1}{e^z+1} = \frac{A_1e^{(2n-1)z} + A_2e^{(2n-2)z} + \cdots + A_{2n-1}e^z}{(e^z+1)^{2n}},$$

worin $A_1, A_2, \cdots A_{2n-1}$ von dem Index n abhängige Konstanten bedeuten. Aus (4) sieht man ferner, daß sich die erste Ableitung nicht ändert, wenn z durch $-z$ ersetzt wird, d. h. daß sie eine *gerade Funktion* von z ist (vgl. Nr. 467). Wenn aber $f(z)$ eine gerade Funktion von z, d. h. $f(z) = f(-z)$ ist, so folgt durch zweimalige Differentiation, daß auch ihre zweite Ableitung $f''(z)$ eine gerade Funktion ist. Schluß von $2n-3$ auf $2n-1$ lehrt daher, daß alle Ableitungen (5) gerade Funktionen sind. Folglich muß

$$A_1e^{(2n-1)z} + A_2e^{(2n-2)z} + \cdots + A_{2n-1}e^z$$
$$= A_1e^z + A_2e^{2z} + \cdots + A_{2n-1}e^{(2n-1)z}$$

und also allgemein $A_{2n-k} = A_k$ sein. Mithin nimmt die Formel (5) die speziellere Gestalt an:

$$(6)\begin{cases} \dfrac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\dfrac{1}{e^z+1} = \\ \dfrac{A_1[e^{(2n-1)z}+e^z]+A_2[e^{(2n-2)z}+e^{2z}]+\cdots+A_{n-1}[e^{(n+1)z}+e^{(n-1)z}]+A_ne^{nz}}{(e^z+1)^{2n}}. \end{cases}$$

Nehmen wir z reell und positiv an, so ist e^{-z} positiv und kleiner als Eins und folglich nach Satz 1, Nr. 101:

$$\frac{1}{e^z+1} = \frac{e^{-z}}{1+e^{-z}} = e^{-z} - e^{-2z} + e^{-3z} - e^{-4z} + \cdots;$$

und da diese Reihe für jedes reelle positive z gleichmäßig konvergiert, so darf sie nach Satz 27, Nr. 427, gliedweise differenziert werden, falls die hervorgehende Reihe ebenfalls gleichmäßig konvergiert. Dies ist in der Tat bei beliebig oft wiederholter Differentiation der Fall, so daß sich ergibt:

$$\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\frac{1}{e^z+1} = -e^{-z} + 2^{2n-1}e^{-2z} - 3^{2n-1}e^{-3z} + 4^{2n-1}e^{-4z} - \cdots.$$

Ferner ist nach dem binomischen Satze:

$$(e^z+1)^{2n} = e^{2nz} + \frac{2n}{1}e^{(2n-1)z} + \frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}e^{(2n-2)z} + \cdots + \frac{2n}{1}e^z + 1.$$

Multiplizieren wir die beiden letzten Gleichungen miteinander, so folgt aus (6):

$$A_1[e^{(2n-1)z}+e^z]+A_2[e^{(2n-2)z}+e^{2z}]+\cdots+A_{n-1}[e^{(n+1)z}+e^{(n-1)z}]+A_n e^{nz}$$
$$= [-e^{-z} + 2^{2n-1}e^{-2z} - 3^{2n-1}e^{-3z} + 4^{2n-1}e^{-4z} - \cdots]$$
$$\cdot\left[e^{2nz} + \frac{2n}{1}e^{(2n-1)z} + \frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}e^{(2n-2)z} + \cdots + \frac{2n}{1}e^z + 1\right].$$

Die Ausführung der Multiplikation rechterhand liefert nur positive Potenzen von e^z, und die Vergleichung der Glieder mit gleichhohen Potenzen von e^z auf beiden Seiten ergibt zunächst $A_1 = -1$ und allgemein für den Index $k > 1$:

$$A_k = (-1)^k\left[k^{2n-1} - \frac{2n}{1}(k-1)^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}(k-2)^{2n-2} - \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{k-1}\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-k+2)}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\right].$$

Nach (3) und (6) ist aber:

$$(-1)^n\frac{2^{2n}-1}{2n}B_{2n} = \frac{A_1+A_2+\cdots+A_{n-1}+\frac{1}{2}A_n}{2^{2n-1}};$$

mithin erhalten wir zur Berechnung der Bernoullischen Zahl B_{2n} die folgende Formel:

$$(-1)^n \frac{(2^{2n}-1)\,2^{n-1}}{2n} B_{2n} =$$

$$-1 + \left[2^{2n-1} - \frac{2n}{1}\right] - \left[3^{2n-1} - \frac{2n}{1} 2^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}\right] + \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\left[(n-1)^{2n-1} - \frac{2n}{1}(n-2)^{2n-1} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{2n(2n-1)\cdots(n+3)}{1\cdot 2\cdots(n-2)}\right]$$

$$+\tfrac{1}{2}(-1)^n\left[n^{2n-1} - \frac{2n}{1}(n-1)^{2n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\right].$$

Rechts treten die $(2n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen von n, $n-1$, $n-2$ usw. auf. Indem man die Summe nach ihnen ordnet, geht schließlich hervor:

$$\frac{(2^{2n}-1)\,2^{2n-1}}{2n} B_{2n}$$

$$= \tfrac{1}{2} n^{2n-1} - \left[1 + \tfrac{1}{2}\frac{2n}{1}\right](n-1)^{2n-1}$$

$$+ \left[1 + \frac{2n}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}\right](n-2)^{2n-1}$$

$$- \left[1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2}\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right](n-3)^{2n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n+1}\left[1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{2n(2n-1)\cdots(n+3)}{1\cdot 2\cdots(n-2)} + \tfrac{1}{2}\frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\right].$$

Dies ist die gesuchte independente Darstellung der Bernoullischen Zahl B_{2n}. Die rechte Seite wird durch Multiplikation mit 2 eine *ganze* Zahl. Folglich ist

$$(2^{2n}-1)\,2^{2n-1} B_{2n}$$

ein ganzes Vielfaches von n.

Fünftes Kapitel.

Quadratur und Rektifikation von Kurven.

§ 1. Quadratur ebener Kurven.

530. Das Vorzeichen der Fläche. Unter der Fläche der Kurve $y = f(x)$ von x_0 bis X sei immer kurzweg diejenige Fläche verstanden, die von der Kurve, der Abszissenachse und den zu x_0 und X gehörigen Ordinaten eingeschlossen wird und nach Satz 7, Nr. 411, den Wert

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

hat, vorausgesetzt, daß $f(x)$ von x_0 bis X stetig ist. Differenzierbarkeit von $f(x)$ ist bekanntlich nicht erforderlich; dennoch bezeichnen wir das Bild der Funktion $y = f(x)$ der Einfachheit halber als Kurve oder Linie (entgegen der Festsetzung in Nr. 167).

Der enge Zusammenhang zwischen Quadratur und Integration ist der Grund, aus dem man öfters für die Berechnung eines Integrals das Wort *Quadratur* gebraucht (vgl. Nr. 411).

Die in Satz 7, Nr. 411, gegebene Vorzeichenregel läßt sich einfacher ausdrücken: Durchlaufen wir die Abszissenachse von x_0 bis X, hierauf anschließend die Ordinate von X bis zur Kurve, alsdann anschließend die Kurve und endlich die Ordinate, die zu x_0 gehört, bis zu ihrem Fußpunkte (siehe Fig. 22 für ver-

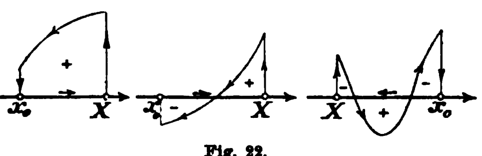


Fig. 22.

schiedene Fälle), so haben wir der Fläche einen *Umlaufssinn* gegeben. Der Umlaufssinn soll *positiv* heißen, wenn die Fläche beim Umlaufen *links* liegt, vorausgesetzt, daß die positive y-Achse — wie wir es immer annehmen — links liegt für jemanden, der längs der positiven x-Achse hinblickt. Nun sieht man: *Das Integral* (1) *stellt den Wert der Fläche dar, falls die Stücke der Fläche mit dem Plus- oder Minuszeichen versehen werden, je nachdem sie positiv oder negativ umlaufen werden.*

Nur wenn man jedem ebenen Flächenstücke zunächst einen Umlaufssinn beigelegt hat, ist seine Fläche eine bestimmte positive oder negative Zahl und zwar auch dann, wenn die Begrenzung der Fläche sich selbst schneidet; und nur bei bestimmt gewähltem Umlaufssinn kann man Flächen addieren und subtrahieren.

Jedes beliebig, wenn nur stetig, begrenzte ebene Flächenstück mit bestimmtem Umlaufssinne läßt sich durch solche Flächenstücke ausdrücken, die mittels Integrale von der Form (1) zu berechnen sind.

Fig. 23.

Z. B. mögen drei Kurven

$$y = f_1(x), \qquad y = f_2(x), \qquad y = f_3(x)$$

so beschaffen sein, daß die erste die beiden Punkte P_2, P_3, die zweite die beiden Punkte P_3, P_1 und die dritte die beiden Punkte P_1, P_2 enthält, so daß sie ein krummliniges Dreieck $P_1P_2P_3$ einschließen, siehe Fig. 23. Es seien x_1, x_2, x_3 die Abszissen der Ecken P_1, P_2, P_3. In dem Umlaufssinne $P_1P_2P_3$ gemessen ist die Fläche des Dreiecks gleich

$$(2) \qquad \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_3} f_2(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_1} f_3(x)\,dx,$$

indem jeder dieser drei Summanden eine bis an die Abszissenachse heranreichende Fläche vorstellt, die ein bestimmtes Zeichen hat, so daß sich die Flächenteile, die nicht innerhalb des Dreiecks $P_1P_2P_3$ liegen, gegenseitig fortheben. In Fig. 23 haben wir die positiven und negativen Summanden durch die Art der Schraffur (von links nach rechts steigend oder fallend) unterschieden.

Beispiel: Eine einfache Anwendung hiervon führt auf die bekannte Formel der analytischen Geometrie für den Inhalt des *geradlinig* begrenzten Dreiecks $P_1P_2P_3$. Ist nämlich P_2P_3 eine Gerade, so ist ihre Gleichung

$$y = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{x_2 - x_3} + \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\,x,$$

so daß $f_1(x)$ diese *lineare* ganze Funktion von x und

$$\int_{x_3}^{x_2} f_1(x)\,dx = x_2y_3 - x_3y_2 + \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\,\frac{x_2^2 - x_3^2}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(x_2 - x_3)\,(y_2 + y_3)$$

wird. Dies ist der Inhalt des zwischen P_2P_3 und der Abszissenachse gelegenen Trapezes, den wir auch direkt aus der Figur hätten ablesen können. Entsprechende Werte gehen für die beiden anderen Summanden in (2) hervor, und die Summe (2) läßt sich hier so schreiben:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Diese Fläche ist positiv oder negativ, je nachdem der Sinn $P_1P_2P_3$ dem des Uhrzeigers entgegen ist oder nicht.

Die Summe (2) stellt auch dann die Fläche des krummlinigen Dreiecks $P_1P_2P_3$ vor, wenn die Seiten einander außer in den drei Ecken überschneiden. So hat sie z. B. in Fig. 24 die daselbst angegebene Bedeutung: Die doppelt und entgegengesetzt schraffierten Stücke heben sich gegenseitig auf. Es verbleiben hier drei Stücke einfach schraffiert, von denen eins positiv ist und zwei negativ sind.

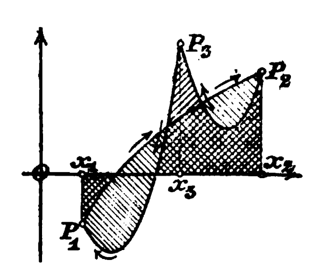


Fig. 24.

Wenn zwei der drei gewählten Kurven in eine zusammenfallen, z. B. $f_2(x) = f_3(x)$ ist, so gibt (2) die Fläche eines krummlinigen Zweiecks. Ist insbesondere alsdann $f_2(x)$ eine *lineare ganze* Funktion, so geht die Fläche zwischen einer Kurve und Sehne, also die eines *Kurvensegmentes* hervor.

531. Ersatz der Flächengrenze durch eine angenäherte Grenze. In Nr. 409 wurde die von x_0 bis X erstreckte Fläche der Kurve $y = f(x)$ in der Weise definiert, daß die Kurve zunächst durch einen noch in gewissem Maße willkürlichen treppenförmigen Linienzug ersetzt wurde, so daß eine nur geradlinig begrenzte Fläche vorlag. Der treppenförmige Zug hatte dabei die Eigenschaft, beim Übergange zu $\lim n = \infty$ nach der wahren Begrenzung hinzustreben oder, wie wir auch sagen, nach ihr zu *konvergieren*. Als Fläche der Kurve wurde alsdann der Grenzwert der Fläche des Linienzuges definiert.

Statt jenes Linienzuges lassen sich nun aber mancherlei andere ersinnen, die ebenfalls nach der Kurve konvergieren. Z. B. können wir das Intervall von x_0 bis X wieder willkürlich in n Teile teilen, die zugehörigen Kurvenpunkte bestimmen und alsdann je zwei aufeinanderfolgende von diesen Punkten durch die Sehne verbinden, so daß ein *Sehnenpolygon* $C M_1 M_2 \cdots M_{n-1} D$ hervorgeht, siehe Fig. 25. Es weicht von der Kurve um so weniger ab, je kleiner alle Einzelintervalle werden und dementsprechend die Zahl n immer größer wird. Es lassen sich aber auch manche andere, ebenso nach der Kurve konvergierende lückenlose Züge herstellen; sie brauchen auch nicht aus lauter geraden Stücken zusammengesetzt zu sein.

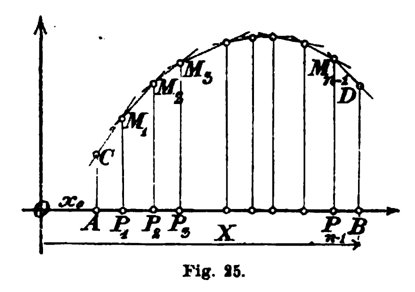


Fig. 25.

Allgemein soll nun irgend ein lückenloser Linienzug nach einem gewissen Gesetze derartig konstruiert sein, daß er noch einem Grenzübergange unterworfen werden kann, bei dem er im Intervalle von x_0 bis X nach der Kurve $y = f(x)$ konvergiert. D. h. analytisch ausgesprochen: Es soll eine *stetige* Funktion $y = \varphi(x)$ im Intervalle von x_0 bis X hergestellt sein, die noch andere und andere Formen annehmen kann und zwar so, daß, wie klein auch eine positive Zahl τ gewählt sein mag, stets eine Funktion $\varphi(x)$ existiert, für die

$$(1) \qquad f(x) - \tau \leqq \varphi(x) \leqq f(x) + \tau$$

an jeder Stelle x im Intervalle von x_0 bis X ist. Lassen wir τ nach Null streben, so können wir alsdann sagen, daß der Linienzug $y = \varphi(x)$ nach der Kurve $y = f(x)$ konvergiert.

Ist $x_0 < X$, so folgt aus (1) ohne weiteres nach Satz 14, Nr. 413:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx - \tau(X - x_0) \leqq \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx \leqq \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx + \tau(X - x_0),$$

während im Falle $x_0 > X$ das Zeichen $<$ durch das Zeichen $>$ ersetzt werden muß. Hieraus schließen wir:

$$\lim_{\tau=0} \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

sobald $X - x_0$ *endlich* ist. Wir haben also den

Satz 1: Konvergiert in einem endlichen Intervalle ein veränderlicher, aber stetiger Linienzug $y = \varphi(x)$ nach einer bestimmt gegebenen stetigen Linie $y = f(x)$, so ist auch der Grenzwert der Fläche jenes veränderlichen Linienzuges gleich der Fläche der gegebenen stetigen Linie.

Demnach läßt sich die Flächendefinition in Nr. 409 bedeutend verallgemeinern. Statt des treppenförmigen Linienzuges können wir z. B. das in Fig. 25 konstruierte Sehnenpolygon oder irgend einen anderen, nach der Kurve konvergierenden Linienzug anwenden. Da jedes ebene Flächenstück ausdrückbar ist durch solche Flächen, die nur einerseits krummlinig, andererseits durch die Abszissenachse und überdies durch zwei Ordinaten geradlinig begrenzt sind, so dürfen wir dasselbe allgemeine Verfahren auf den Rand beliebiger ebener Flächenstücke anwenden, wodurch wir zu einer Fläche gelangen, deren Grenzwert die fragliche Fläche ist. Hiervon machen wir in der Folge einige Anwendungen.

532. Quadratur in Polarkoordinaten. Ein Kurvenstück AB, siehe Fig. 26, sei in Polarkoordinaten ω, ϱ (vgl. Nr. 203) durch die im Intervalle von ω_0 bis ω_1 stetige Funktion $\varrho = f(\omega)$ gegeben. Der Fläche u zwischen der Kurve AB und den zu ω_0 und ω_1 gehörigen Radienvektoren geben wir denjenigen Umlaufssinn, der hervorgeht, wenn AB so durch-

laufen wird, daß ω die Werte von ω_0 bis ω_1 annimmt. In Fig. 26, wo $\omega_0 < \omega_1$ gewählt ist, hat diese Fläche also positiven Sinn und demnach das Pluszeichen. Es kann aber auch $\omega_0 > \omega_1$ sein. Wir setzen noch voraus, daß $\varrho = f(\omega)$ im Intervalle von ω_0 bis ω_1 nie das Zeichen wechsele, da der Pol der Polarkoordinaten eine singuläre Rolle spielt, wie in Nr. 203 hervorgehoben wurde.

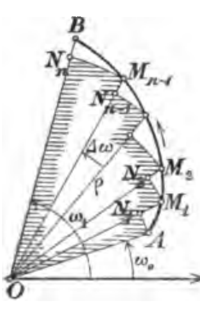


Fig. 26.

Um nun die Fläche u zu berechnen, teilen wir $\sphericalangle AOB$ in etwa n beliebige Teile, indem wir $n-1$ Radienvektoren OM_1, OM_2, $\cdots OM_{n-1}$ einschalten. Die Kreise um O durch A bzw. M_1, M_2, $\cdots M_{n-1}$ mögen die Radienvektoren OM_1 bzw. OM_2, OM_3, $\cdots OB$ in N_1 bzw. N_2, N_3, $\cdots N_n$ treffen. Jetzt können wir die Kurve nach Satz 1 durch den aus Kreisbogen und Strecken bestehenden Linienzug

$$AN_1\,M_1N_2M_2\cdots M_{n-1}N_n$$

ersetzen, da er zur Kurve konvergiert, falls alle Teilwinkel von $\sphericalangle AOB$ nach Null streben und dementsprechend ihre Anzahl n über jede Grenze wächst.

Ist $\varDelta\omega$ der allgemeine Ausdruck für einen beliebigen unter den n Teilwinkeln und ϱ der Radiusvektor auf dem Anfangsschenkel dieses Winkels, so hat die zugehörige Fläche des Kreissektors den Wert $\frac{1}{2}\varrho^2\varDelta\omega$, so daß

$$u = \lim \sum_{\omega_0}^{\omega_1} \tfrac{1}{2}\varrho^2\varDelta\omega = \tfrac{1}{2}\lim \sum_{\omega_0}^{\omega_1} [f(\omega)]^2\varDelta\omega$$

ist. Die letzte Summe hat aber dieselbe Form wie die des Satzes 4, Nr. 407, indem x, x_0, X und $f(x)$ hier durch ω, ω_0, ω_1 und $[f(\omega)]^2$ ersetzt sind. Daher kommt:

$$(1) \qquad u = \tfrac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} [f(\omega)]^2\,d\omega\,.$$

Bleibt die obere Grenze ω_1 willkürlich, bezeichnen wir sie also mit ω, so ist u eine solche Funktion von ω, für die

$$\frac{du}{d\omega} = \tfrac{1}{2}[f(\omega)]^2 = \tfrac{1}{2}\varrho^2$$

ist. Hiermit wird nachträglich der vollständige Beweis für die Formel (1) von Nr. 204 geliefert. Damals fehlte ja noch die exakte Definition der Fläche.

533. Quadratur bei Anwendung einer Hilfsveränderlichen. Es sei eine krummlinige Flächengrenze AB mittels einer Hilfsveränderlichen t durch die beiden im Intervalle von t_0 bis t_1 stetigen Funktionen von t gegeben:

(1) $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

vgl. (3) in Nr. 168, und es soll die Fläche u berechnet werden, die zwischen dieser krummen Linie und den vom Anfanspunkte O nach ihren Endpunkten A und B gezogenen Strahlen liegt. In Polarkoordinaten ω, ϱ hat diese Fläche nach der Formel (1) der letzten Nummer den Wert:

$$u = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \varrho^2\, d\omega.$$

Hierin ist $\varrho^2 = \varphi^2 + \psi^2$ und

$$\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{\psi}{\varphi}, \text{ d. h. } d\omega = \frac{\varphi\psi' - \psi\varphi'}{\varphi^2 + \psi^2}\, dt,$$

so daß sich ergibt:

(2) $$u = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (\varphi\psi' - \psi\varphi')dt.$$

Der Umlaufssinn der Fläche ist dabei derjenige, bei dem die Kurve so durchwandert wird, daß t von t_0 bis t_1 geht.

534. Beispiele von Quadraturen. Zu den in Nr. 411 gegebenen Beispielen fügen wir hier und in den folgenden Nummern noch andere hinzu.

1. Beispiel: Parabolische und hyperbolische Kurven. So nennt man diejenigen Kurven, deren Gleichungen bei passender Wahl des Achsenkreuzes die allgemeine Form

(1) $$\text{konst. } x^n + \text{konst. } y^m = 0$$

haben. Auflösung nach y gibt:

(2) $$y = ax^r,$$

wo a und r Konstanten sind. Ist $a < 0$, so vertauschen wir y mit $-y$ und kommen auf die Annahme $a > 0$, die wir daher im folgenden machen wollen. Nach Nr. 5 ist die Potenz x^r allgemein nur für positives x definiert und zwar als positive Zahl. Wir beschränken uns mithin auf *positive Werte von x und y.*

Ist $r > 0$, so heißt die Kurve *parabolisch*; sie geht durch den Anfangspunkt und hat keine Asymptote. Siehe Fig. 27 für $r = 3$ und $a = 0{,}2$. Ist dagegen $r < 0$, so heißt die Kurve *hyperbolisch*; sie geht nämlich nicht durch den Anfangspunkt,

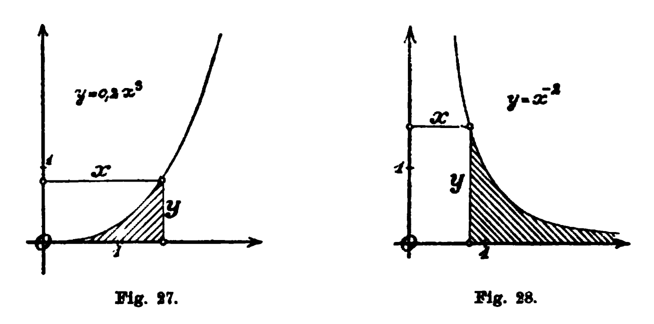


Fig. 27. Fig. 28.

hat aber die Achsen zu Asymptoten (vgl. Nr. 171). Siehe Fig. 28 für $r = -2$ und $a = 1$. Die hyperbolischen Kurven heißen auch *polytropisch* wegen ihrer Bedeutung in der Wärmetheorie. Die Kurve (1) ist hiernach parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem die Konstanten n und m dasselbe oder verschiedenes Vorzeichen haben.

Ist r zwischen -1 und $+1$ gelegen, so führt die Vertauschung von x mit y zu dem Falle, wo $r^2 > 1$ ist. Wir dürfen uns also auf die Annahmen $r > 1$ (parabolisch) und $r < -1$ (hyperbolisch) beschränken. Die von x_0 bis x erstreckte Fläche u der Kurve (2) ist:

$$u = \int_{x_0}^{x} a x^r dx = \frac{a}{r+1}\left(x^{r+1} - x_0^{\,r+1}\right) = \frac{xy - x_0 y_0}{r+1},$$

wenn y_0 die zu x_0 gehörige Ordinate bedeutet. Handelt es sich um eine *parabolische* Kurve, ist also $r > 1$, siehe Fig. 27, so können wir $x_0 = y_0 = 0$ wählen und erhalten dann $u = xy : (r+1)$, d. h. die Fläche ist der $(r+1)^{\text{te}}$ Teil der Fläche des Rechtecks

mit den Seiten x und y. Liegt dagegen eine *hyperbolische* Kurve vor, ist also $r < -1$, siehe Fig. 28, so können wir den Grenzübergang $\lim x_0 = +\infty$ machen, da dann $\lim x_0 y_0 = 0$ wird, so daß $u = xy : (r+1)$ hervorgeht. Hier ist u negativ, weil die untere Grenze größer als die obere ist. Die Fläche u zwischen der Kurve, der Abszissenachse und der zu x gehörigen Ordinate ist also, obgleich sie sich ins Unendliche erstreckt, der $-(r+1)^{\text{te}}$ Teil der Fläche des Rechtecks mit den Seiten x und y. In der Fig. 28, wo $r = -2$ gewählt ist, sind beide Flächen gleich groß.

Ist überhaupt bei einer Kurve die Fläche u von einer Anfangsabszisse x_0 bis zur Abszisse x gegeben durch die Formel

$$(3) \qquad u = \frac{xy - x_0 y_0}{r+1},$$

so folgt durch Differentiation nach x, weil $u' = y$ ist:

$$y = \frac{xy' + y}{r+1} \quad \text{oder} \quad \frac{d \ln y}{dx} = \frac{r}{x},$$

d. h. $\ln y = r \ln x +$ konst. oder $y =$ konst. x^r; es liegt also eine parabolische oder hyperbolische Kurve (2) vor.

2. Beispiel: Die *Lemniskate* ist der Ort derjenigen Punkte in der Ebene, deren Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 das konstante Produkt a^2 haben, wobei $2a$ den Abstand der beiden festen Punkte voneinander bedeutet. Im 2. Beispiele, Nr. 55, ist die Gleichung der Kurve in rechtwinkligen Koordinaten angegeben worden, wobei die Gerade der Punkte F_1 und F_2 als Abszissenachse und die Mitte von F_1F_2 als Anfangspunkt gewählt ist. In den zugehörigen Polarkoordinaten ω, ϱ lautet die Gleichung der Lemniskate so:

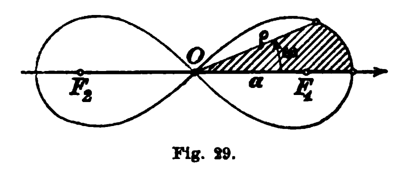


Fig. 29.

$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\omega.$$

Der Anfangspunkt ist ein Doppelpunkt, nach Nr. 189, und die zugehörigen Tangenten sind die Geraden $x \pm y = 0$. Die Kurve besteht aus zwei kongruenten Schleifen, siehe Fig. 29. Nach (1) in Nr. 532 ist

$$u = a^2 \int_0^\omega \cos 2\omega \, d\omega = \tfrac{1}{2} a^2 \sin 2\omega$$

die Fläche zwischen der Kurve und den zu 0 und ω gehörigen Radienvektoren. Für $\omega = \frac{1}{4}\pi$ ergibt sich $\frac{1}{2}a^2$ als Fläche einer halben Schleife.

3. Beispiel: Als *Cartesisches Blatt* bezeichnet man die Kurve mit der Gleichung:

(4) $$x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

sie ist augenscheinlich symmetrisch hinsichtlich der Halbierenden des Winkels der positiven Achsen. Der Anfangspunkt ist nach Nr. 189 ein Doppelpunkt, und zwar sind dort die Achsen die Tangenten. Nach (4) ist:

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\frac{a}{x^2}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

und:

$$\frac{(x+y)^3}{x^2} - \frac{3(x+y)^2}{x} + 3(x+y) - 3a\frac{x+y}{x} + 3a = 0.$$

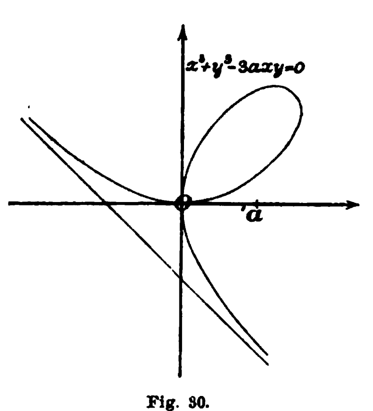


Fig. 30.

Die erste Gleichung zeigt, daß $y:x$ für $\lim x = \pm\infty$ den Grenzwert $g = -1$ hat. Ferner hat $y - gx$, d. h. $x + y$, nach der letzten Gleichung den Grenzwert $h = -a$. Es sind g und h die in dem Satze 1, Nr. 171, auftretenden Größen, und wir folgern daraus, daß die Gerade

$$x + y + a = 0$$

eine Asymptote der Kurve ist. Siehe Fig. 30. In den zugehörigen Polarkoordinaten lautet die Kurvengleichung:

$$\varrho = \frac{3a \sin\omega \cos\omega}{\sin^3\omega + \cos^3\omega},$$

dagegen die Gleichung der Asymptote:

$$\varrho = \frac{-a}{\sin\omega + \cos\omega}.$$

Nach (1) in Nr. 532 sind mithin

$$u = \frac{9}{2}a^2\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\frac{\sin^2\omega\cos^2\omega}{[\sin^3\omega+\cos^3\omega]^2}\,d\omega = \frac{3}{2}a^2\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\frac{3\,\mathrm{tg}^2\omega}{[\mathrm{tg}^3\omega+1]^2}\,\frac{d\omega}{\cos^2\omega}$$

$$= \frac{3}{2}a^2\left[\frac{1}{1+\mathrm{tg}^3\omega_0}-\frac{1}{1+\mathrm{tg}^3\omega}\right]$$

und

$$v = \frac{a^2}{2}\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{(\sin\omega+\cos\omega)^2} = \frac{a^2}{2}\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\frac{1}{(\mathrm{tg}\,\omega+1)^2}\,\frac{d\omega}{\cos^2\omega}$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left[\frac{1}{1+\mathrm{tg}\,\omega_0}-\frac{1}{1+\mathrm{tg}\,\omega}\right]$$

die Flächen zwischen den zu ω_0 und ω_1 gehörigen Strahlen und der Kurve bzw. Asymptote. Für $\omega_0 = 0$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$ ergibt die Formel für u als Fläche der Kurvenschleife den Wert $\frac{3}{2}a^2$. Da

$$v-u = \frac{a^2}{2}\left[\frac{2-\mathrm{tg}\,\omega}{1-\mathrm{tg}\,\omega+\mathrm{tg}^2\omega}-\frac{2-\mathrm{tg}\,\omega_0}{1-\mathrm{tg}\,\omega_0+\mathrm{tg}^2\omega_0}\right]$$

ist, so ergibt ferner die Annahme $\omega_0 = \frac{3}{4}\pi$ und $\omega = \pi$ als Fläche zwischen der Kurve, der negativen x-Achse und der Asymptote, — soweit diese Fläche oberhalb der x-Achse liegt —, den Wert $\frac{1}{2}a^2$, obgleich diese Fläche eine endlose Begrenzung hat. Derselbe Wert kommt wegen der Symmetrie auch der Fläche rechts von der y-Achse zwischen der Kurve und Asymptote zu und ebenso dem Dreiecke zwischen den Achsen und der Asymptote. Die gesamte Fläche zwischen der Kurve und ihrer Asymptote ist mithin gerade so groß wie die der Schleife.

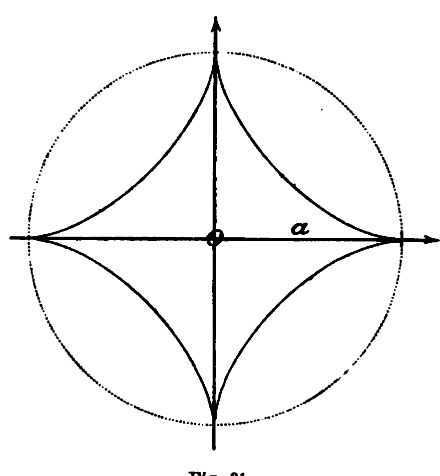


Fig. 31.

4. *Beispiel:* Um die Fläche der *Astroide* (Nr. 249):

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

zu berechnen, siehe Fig. 31, stellen wir die Kurve durch die Gleichungen

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

mittels der Hilfsveränderlichen t dar, so daß sich für das von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}\pi$ erstreckte Viertel der Gesamtfläche nach (2) in Nr. 533 ergibt:

$$\frac{3}{2} a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{3}{16} a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \cos 4t) \, dt = \frac{3}{32} \pi a^2.$$

Die Gesamtfläche ist mithin gleich drei Achteln der Fläche des Kreises vom Radius a, d. h. des Kreises durch die vier Spitzen der Kurve. Dies folgt auch daraus, daß die Astroide eine Hypozykloide ist (vgl. Nr. 249), und aus Nr. 241.

§ 2. Näherungsweise und mechanische Quadratur.

535. Einschluß der Fläche zwischen zwei Werten. Für den Fall, daß die Auswertung des Integrals, mittels dessen ein Flächenstück zu berechnen ist, Schwierigkeiten macht, und für den Fall, daß die Begrenzung des Flächenstückes nicht analytisch, sondern nur zeichnerisch gegeben ist, hat man graphische Verfahren ersonnen, die wenigstens näherungsweise den Wert der Fläche zu bestimmen gestatten.

Einige von diesen Verfahren, die hier abgeleitet werden sollen, beziehen sich insbesondere auf Flächenstücke, die von der Abszissenachse, zwei Ordinaten und einer krummen Linie umschlossen werden. In Anlehnung an diejenige Definition der Fläche als Grenzwert einer Summe, die in Nr. 409 gegeben wurde, beruhen sie darauf, daß die Fläche zunächst zeichnerisch durch eine Reihe von Ordinaten in schmale *Streifen* zerlegt wird. Dabei wählt man, um zu möglichst leicht ausführbaren Konstruktionen zu kommen, *alle Flächenstreifen gleich breit.*

Wenn die Kurve, die das Flächenstück einerseits begrenzt, gegenüber der Abszissenachse teils konvex und teils konkav ist, können wir sie zuvor durch geeignete Ordinaten in solche Teile zerlegen, in denen sie gegenüber der Abszissenachse beständig konvex oder beständig konkav ist, und dann jene Näherungs-

verfahren auf diese einzelnen Teile anwenden. Um etwas bestimmtes vor Augen zu haben, nehmen wir daher an, die begrenzende Kurve sei gegenüber der Abszissenachse *konkav*. Außerdem liege sie vollständig *oberhalb der Abszissenachse.*

Alle Streifen mögen die Breite b haben. Siehe Fig. 32. Wollen wir die Streifen durch größere *Trapeze* ersetzen, so werden wir statt der oberen krummen Grenzen Tangenten der Kurve anwenden. Die Konstruktion der Tangenten gibt jedoch bei einer gezeichnet vorliegenden Kurve Anlaß zu Fehlern. Fassen wir aber *zwei* aufeinanderfolgende Streifen zusammen und denken wir uns die Tangente im Endpunkte ihrer gemeinsamen Ordinate y_k konstruiert, wie es in Fig. 32 für die beiden ersten Streifen, also bei y_1, geschehen ist, so sehen wir: Die Tangente grenzt ein Trapez von der Breite $2b$ und der mittleren Höhe y_k ab. Das Trapez hat demnach den Inhalt $2by_k$, der sich also *ohne wirkliche Konstruktion der Tangente* angeben läßt.

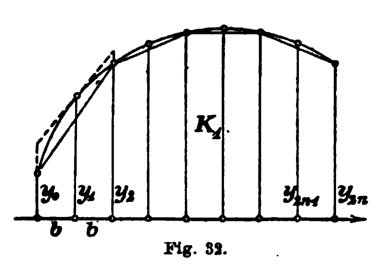


Fig. 32.

Diese Überlegung veranlaßt uns dazu, die ganze Fläche F in eine *gerade* Anzahl von gleichbreiten Streifen zu zerlegen, etwa in $2n$ Streifen. Es mögen $y_0, y_1, y_2, \cdots y_{2n}$ alle dabei vorkommenden $2n+1$ Ordinaten in ihrer Reihenfolge bedeuten. Nach dem Vorhergehenden ist nun die Fläche F kleiner als

$$G = 2by_1 + 2by_3 + \cdots + 2by_{2n-1}.$$

Bezeichnen wir die Summe aller Ordinaten mit *ungeraden* Indizes mit p:

(1) $$p = y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1},$$

so ist also

(2) $$G = 2bp > F.$$

Außerdem wollen wir die Summe aller Ordinaten mit *geraden* Indizes, abgesehen von y_0 und y_{2n}, mit q bezeichnen:

(3) $$q = y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}.$$

Zu Näherungswerten, die *kleiner* als die Fläche F sind, gelangt man, wenn man die Kurve stückweise durch Sehnen ersetzt,

also Sehnenpolygone konstruiert. Wir erwähnen insbesondere drei gebräuchliche Verfahren:

Erstens: Wir verbinden die Endpunkte der Ordinaten mit geraden Indizes

$$y_0,\ y_2,\ y_4,\ \cdots y_{2n-2},\ y_{2n}$$

aufeinanderfolgend geradlinig, wie es in Fig. 32 geschehen ist; das so entstehende Sehnenpolygon hat die Fläche:

$$K_1 = b\,(y_0 + y_2) + b\,(y_2 + y_4) + \cdots + b\,(y_{2n-2} + y_{2n})$$

oder:

$$K_1 = 2bq + b\,(y_0 + y_{2n}) < F. \tag{4}$$

Zweitens: Wir verbinden die Endpunkte der Ordinaten

$$y_0,\ y_1,\ y_3,\ y_5 \cdots y_{2n-3},\ y_{2n-1},\ y_{2n}$$

aufeinanderfolgend geradlinig, siehe Fig. 33; das so entstehende Sehnenpolygon hat die Fläche:

$$\begin{aligned} K_2 &= \tfrac{1}{2}\,b\,(y_0 + y_1) + b\,(y_1 + y_3) + b\,(y_3 + y_5) + \cdots \\ &\quad\cdot + b\,(y_{2n-3} + y_{2n-1}) + \tfrac{1}{2}\,b\,(y_{2n-1} + y_{2n}) \\ &= 2bp - \tfrac{1}{2}\,b\,(y_1 + y_{2n-1} - y_0 - y_{2n}). \end{aligned}$$

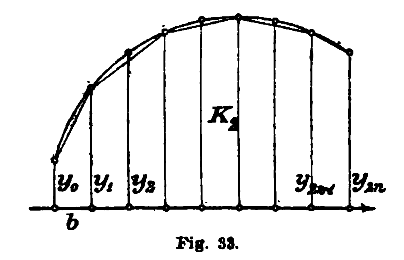


Fig. 33.

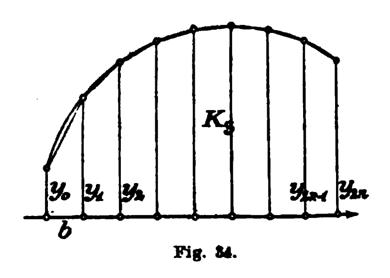


Fig. 34.

Da $K_2 < F$, dagegen $G > F$ ist, so zeigt die Vergleichung mit (2), daß die Summe:

$$m = \tfrac{1}{2}\,(y_1 + y_{2n-1} - y_0 - y_{2n}) > 0 \tag{5}$$

ist. Es kommt:

$$K_2 = 2bp - bm < F. \tag{6}$$

Drittens: Wir verbinden die Endpunkte *aller* Ordinaten

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots y_{2n-1},\ y_{2n}$$

aufeinanderfolgend geradlinig, siehe Fig. 34; das so entstehende Sehnenpolygon hat die Fläche:

$$K_3 = \tfrac{1}{2}b(y_0 + y_1) + \tfrac{1}{2}b(y_1 + y_2) + \cdots + \tfrac{1}{2}b(y_{2n-1} + y_{2n})$$

oder:

$$(7) \qquad K_3 = b(p + q) + \tfrac{1}{2}b(y_0 + y_{2n}) < F.$$

Beim ersten Verfahren sind nur $n + 1$ Ordinaten benutzt worden, beim zweiten eine mehr und beim dritten alle $2n + 1$ Ordinaten. Man darf annehmen, daß dementsprechend K_2 ein besserer Näherungswert als K_1 und ferner K_3 ein besserer als K_2 sein wird.

Bei roher Annäherung benutzt man für die graphische Flächenbestimmung den Wert K_3, die sogenannte *Trapezformel* (7).

Da jedoch der wahre Wert F zwischen G einerseits und einem der Werte K_1, K_2, K_3 andererseits liegt, so wird man bessere Näherungsformeln erhalten, wenn man zwischen diesen Grenzen Zwischenwerte wählt. Je nach der Art, wie man da vorgeht, gelangt man zu einigen oft benutzten Methoden, die wir in der nächsten Nummer auseinandersetzen wollen.

Vorher erwähnen wir noch, daß, falls die begrenzende Kurve nicht, wie wir annahmen, gegenüber der Abszissenachse konkav, sondern konvex ist, F größer als G und kleiner als jeder der drei Werte K_1, K_2, K_3 ist. Es ist also dann in dem Vorhergehenden und Folgenden nur überall $>$ mit $<$ zu vertauschen.

536. Näherungsformeln von Poncelet, Parmentier und Simpson. Liegt die Fläche F zwischen den Werten G und K, von denen G größer und K kleiner als F ist, und setzt man den Bruch aus positiven Zahlen

$$\frac{G - F}{F - K} = \frac{\beta}{\alpha},$$

so ist

$$F = \frac{\alpha G + \beta K}{\alpha + \beta},$$

d. h. F ist dasjenige *Mittel* aus G und K, das hervorgeht, wenn man G und K die *Gewichte* α und β erteilt. Es kommt in der Formel nicht auf die absoluten Werte der Gewichte, sondern nur auf ihr Verhältnis an. Da F selbst unbekannt

ist, bleibt allerdings auch der wahre Wert des Verhältnisses beider Gewichte unbekannt; aber wenn wir darüber plausibele Annahmen machen, indem wir α oder β größer wählen, je nachdem F anscheinend näher bei G oder bei K liegt, werden wir die Formel zur Herstellung eines Näherungswertes für F benutzen können. Unter G verstehen wir die in voriger Nummer unter (2) gewonnene obere Grenze von F und unter K eine der drei ebenda abgeleiteten unteren Grenzen von F.

Da die Werte von α und β, die wir benutzen, nur schätzungsweise ausgewählt werden, also nicht notwendig die wahren sind, müssen wir, um die Güte der zu gewinnenden Formel festzustellen, noch den größten Wert bestimmen, den der absolute Betrag ε des Fehlers erreichen kann. Weil der wahre Wert zwischen G und K liegt, so ist dies Maximum die größere der beiden Zahlen

$$G - \frac{\alpha G + \beta K}{\alpha + \beta}, \qquad \frac{\alpha G + \beta K}{\alpha + \beta} - K$$

oder

$$\frac{\beta}{\alpha + \beta}(G - K), \qquad \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(G - K),$$

also die erste oder zweite, je nachdem $\beta > \alpha$ oder $\alpha > \beta$ ist. Im Falle $\alpha = \beta$, d. h. wenn als Näherungswert das arithmetische Mittel von G und K genommen wird, sind beide Extreme natürlich gleich groß.

Insbesondere sind folgende Annahmen bemerkenswert:

Erstens: G und K_1 haben gleiche Gewichte. Dann ergibt sich der Näherungswert:

$$(1) \qquad F_1 = \tfrac{1}{2}(G + K_1) = b(p + q) + \tfrac{1}{2}b(y_0 + y_{2n}),$$

und der absolute Betrag des Fehlers ist:

$$(1') \qquad \varepsilon_1 \leqq b(p - q - \tfrac{1}{2}y_0 - \tfrac{1}{2}y_{2n}).$$

Die Formel (1) ist nichts anderes als die *Trapezformel*, da ihre rechte Seite gleich K_3 ist. K_3 ist demnach das arithmetische Mittel von G und K_1.

Zweitens: G und K_2 haben gleiche Gewichte. Es ergibt sich die *Ponceletsche Näherungsformel*:

$$(2) \qquad F_2 = \tfrac{1}{2}(G + K_2) = 2bp - \tfrac{1}{2}bm.$$

Dabei ist der absolute Betrag des Fehlers:

(2′) $$\varepsilon_2 \leqq \tfrac{1}{2} b m = \tfrac{1}{4} b(y_1 + y_{2n-1} - y_0 - y_{2n}).$$

Drittens: Wenn wir aus der Figur schließen, daß der wahre Wert näher bei G als bei K_2 liegen wird, kommen wir zu der Annahme, G und K_2 die Gewichte 2 und 1 zu erteilen. So geht die *Parmentiersche Näherungsformel* hervor:

(3) $$F_3 = \tfrac{1}{3}(2G + K_2) = 2bp - \tfrac{1}{3} b m$$

mit der Fehlerabschätzung:

(3′) $$\varepsilon_3 \leqq \tfrac{2}{3} b m.$$

Liegt der wahre Wert wirklich näher bei G als bei K, so ist der Fehler sogar absolut genommen kleiner als $\frac{1}{3} b m$.

Viertens: Entnehmen wir der Figur die Vermutung, daß der wahre Wert F näher bei K_3 als bei G liegt, so kommen wir dazu, G und K_3 die Gewichte 1 und 2 zu geben. Weil K_3 das arithmetische Mittel von G und K_1 ist, so geht dieselbe Annahme hervor, wenn wir G und K_1 die Gewichte 2 und 1 erteilen. Wir gelangen so zu der sogenannten *Simpsonschen Regel:*

(4) $$F_4 = \tfrac{1}{3}(G + 2K_3) = \tfrac{1}{3}(2G + K_1)$$
$$= \tfrac{2}{3} b(2p + q) + \tfrac{1}{3} b(y_0 + y_{2n})$$

mit der Fehlerabschätzung:

(4′) $$\varepsilon_4 \leqq \tfrac{2}{3} b(p - q - \tfrac{1}{2} y_0 - \tfrac{1}{2} y_{2n}),$$

so daß hier das Maximum nur $\frac{2}{3}$ des Maximums bei der Trapezformel beträgt, ja sogar nur $\frac{1}{3}$, falls wirklich F näher bei K_3 als bei G liegt. Hiernach ist jedenfalls die Simpsonsche Näherungsformel besser als die Trapezformel.

537. Andere Ableitung der Simpsonschen Regel. Die Simpsonsche Regel kann ausführlich so geschrieben werden:

(1) $$F_4 = \tfrac{1}{3} b[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots$$
$$+ (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})].$$

Hiernach kommt diese Regel auf die Annahme hinaus, daß allgemein zwei aufeinanderfolgende Flächenstreifen von

der Breite b und mit den drei Ordinaten y_0, y_1, y_2 zusammen angenähert die Fläche

(2) $$\frac{1}{3}b(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

haben.

Zu derselben Annahme und damit auch zur Simpsonschen Regel (1) führt die folgende rechnerische Überlegung: Die krumme Grenze der Fläche sei durch $y = f(x)$ gegeben, und wir wollen voraussetzen, daß $f(x)$ in dem betrachteten Intervalle bestimmte endliche Ableitungen bis zur dritten Ordnung habe. Wir fassen nun zwei bei der Abszisse x_0 beginnende Flächenstreifen von der Breite b ins Auge. Ihre Fläche ist:

$$F = \int_{x_0}^{x_0+2b} f(x)dx = \int_0^{2b} f(x_0 + h)dh,$$

wenn wir durch die Substitution $x = x_0 + h$ die neue Veränderliche h einführen. Die Funktion von h:

$$\int_0^h f(x_0 + h)dh$$

hat nun die Ableitungen $f(x_0 + h)$, $f'(x_0 + h)$ usw., während sie für $h = 0$ verschwindet. Also ist nach Satz 19, Nr. 112:

$$\int_0^h f(x_0 + h)dh = \frac{h}{1!}f(x_0) + \frac{h^2}{2!}f'(x_0) + \frac{h^3}{3!}f''(x_0 + \theta h),$$

wobei θ einen positiven echten Bruch bezeichnet. Für $h = 2b$ ergibt sich somit:

(3) $$F = 2bf(x_0) + 2b^2f'(x_0) + \frac{4}{3}b^3f''(x_0 + 2\theta b).$$

Setzen wir nun andererseits:

$$y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(x_0 + b), \qquad y_2 = f(x_0 + 2b),$$

so ist ebenfalls nach Satz 19, Nr. 112:

$$y_1 = f(x_0) + bf'(x_0) + \frac{1}{2}b^2f''(x_0 + \vartheta b),$$
$$y_2 = f(x_0) + 2bf'(x_0) + 2b^2f''(x_0 + 2\eta b),$$

wobei ϑ und η positive echte Brüche bedeuten.

Wir wollen nun drei Zahlen α, β, γ so bestimmen, daß der Ausdruck

(4) $$\Phi = b(\alpha y_0 + \beta y_1 + \gamma y_2)$$

um so weniger von dem wahren Werte (3) der Fläche abweicht, je kleiner die Streifenbreite b gewählt wird, d. h. daß die Differenz $\Phi - F$ in möglichst hoher Ordnung mit b verschwindet. Es ist:

$$\Phi = b\{(\alpha + \beta + \gamma)f(x_0) + b(\beta + 2\gamma)f'(x_0) \\ + b^2[\tfrac{1}{2}\beta f''(x_0 + \vartheta b) + 2\gamma f''(x_0 + 2\eta b)]\},$$

folglich nach (3):

$$(5) \quad \frac{\Phi - F}{b} = (\alpha + \beta + \gamma - 2)f(x_0) + b(\beta + 2\gamma - 2)f'(x_0) \\ + b^2[\tfrac{1}{2}\beta f''(x_0 + \vartheta b) + 2\gamma f''(x_0 + 2\eta b) - \tfrac{4}{3}f''(x_0 + 2\theta b)].$$

Also verschwindet $\Phi - F$ mit b in mindestens dritter Ordnung, wenn $\alpha + \beta + \gamma$ und $\beta + 2\gamma$ gleich 2 sind. Da ferner $f''(x_0 + \vartheta b)$, $f''(x_0 + 2\eta b)$ und $f''(x_0 + 2\theta b)$ für $\lim b = 0$ den Grenzwert $f''(x_0)$ haben, so verschwindet $\Phi - F$ mit b in mindestens *vierter* Ordnung, wenn überdies $\frac{1}{2}\beta + 2\gamma$ gleich $\frac{4}{3}$ ist. Aus diesen drei Forderungen folgt $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}$ und $\gamma = \frac{1}{3}$, d. h. der Wert (4) von Φ geht gerade in den Wert (2) über.

Die Simpsonsche Regel für die Summe der Flächen je zweier aufeinanderfolgender Streifen gibt also gerade denjenigen Näherungswert, dessen Abweichung von dem wahren Werte mit der Streifenbreite in der höchsten, nämlich der *vierten* Ordnung verschwindet. Wir werden in nächster Nummer sehen, daß sie sogar in der *fünften* Ordnung verschwindet.

Wenn insbesondere der zweite Differentialquotient von $f(x)$ konstant, also $f(x)$ eine ganze quadratische Funktion von x ist, so folgt aus (5), daß bei Annahme der für α, β, γ gefundenen Werte auch für endliches b die Differenz $F - \Phi = 0$ ist, d. h. die Simpsonsche Regel ist insbesondere für die Fläche einer *Parabel*

$$(6) \qquad y = \text{konst} + \text{konst} \cdot x + \text{konst} \cdot x^2$$

völlig exakt. Hiermit kommen wir zur Erwähnung der dritten und gebräuchlichsten Art der Ableitung der Simpsonschen Regel. Sie besteht darin, daß man die Kurve für je zwei aufeinanderfolgende Streifen durch eine solche Parabel ersetzt. Man kann nämlich die Konstanten in (6) so wählen, daß die Parabel durch drei vorgeschriebene Punkte geht.

[527

538. Korrektionsglied der Simpsonschen Regel. Wenn man, wie es in der letzten Nummer geschah, für $f(x)$ die Taylorsche Entwicklung noch bis zu einer höheren Ordnung benutzt, kann man für die Simpsonsche Regel ein *Korrektionsglied* gewinnen, dessen Mitberücksichtigung allgemein gesprochen eine größere Genauigkeit der Formel verbürgt.

Die Simpsonsche Regel kommt ja darauf hinaus, daß man die Summe F der Flächen zweier aufeinanderfolgender Streifen, des Streifens von x_0 bis $x_0 + b$ und desjenigen von $x_0 + b$ bis $x_0 + 2b$, durch den Wert

$$(1) \qquad \Phi = \tfrac{1}{3} b\,[f(x_0) + 4f(x_0 + b) + f(x_0 + 2b)]$$

ersetzt, während die wahre Summe F mittels der Taylorschen Entwicklung so dargestellt werden kann:

$$F = 2bf(x_0) + 2b^2 f'(x_0) + \tfrac{4}{3} b^3 f''(x_0) + \tfrac{2}{3} b^4 f'''(x_0) + \tfrac{4}{15} b^5 f^{\mathrm{IV}}(x_0 + 2\theta b),$$

wo θ einen positiven echten Bruch bedeutet. Wir haben nämlich die Formel (3) der vorigen Nummer um zwei Glieder weiter entwickelt unter der Annahme, daß $f(x)$ bis zur vierten Ordnung bestimmte endliche Ableitungen habe. Entwickeln wir $f(x_0 + b)$ und $f(x_0 + 2b)$ ebensoweit, so erhalten wir aus (1) einen Wert für Φ, und es kommt:

$$\frac{\Phi - F}{b^5} = \frac{1}{18} f^{\mathrm{IV}}(x_0 + \vartheta b) + \frac{2}{9} f^{\mathrm{IV}}(x_0 + 2\eta b) - \frac{4}{15} f^{\mathrm{IV}}(x_0 + 2\theta b),$$

worin auch ϑ und η positive echte Brüche sind. Man sieht hieraus, daß $\Phi - F$ sogar in der *fünften* Ordnung mit b verschwindet, was wir schon in voriger Nummer ankündigten. Ferner ergibt sich, wenn $f^{\mathrm{IV}}(x)$ stetig ist:

$$\lim_{b=0} \frac{\Phi - F}{b^5} = \frac{1}{90} f^{\mathrm{IV}}(x_0).$$

Hieraus schließen wir, daß bei geringen Breiten der Streifen mit großer Annäherung $\Phi - F$ gleich $\frac{1}{90} b^5 f^{\mathrm{IV}}(x_0)$ sein wird. Daher dürfen wir

$$\Phi - \tfrac{1}{90} b^5 f^{\mathrm{IV}}(x_0)$$

als einen im allgemeinen besseren Näherungswert als Φ betrachten. Weil

$$f^{\mathrm{IV}}(x_0) = \lim_{b=0} \frac{f'''(x_0 + 2b) - f'''(x)}{2b}$$

ist, so werden wir für hinreichend kleines b auch den Näherungswert

$$\Phi - \tfrac{1}{180} b^4 [f'''(x_0 + 2b) - f'''(x_0)]$$

benutzen können.

Wenn wir nun zu jedem der Glieder

$$\tfrac{1}{3} b (y_k + 4 y_{k+1} + y_{k+2})$$

der vollständigen Simpsonschen Regel (1) in Nr. 537 das so gewonnene Korrektionsglied hinzufügen, so heben sich die Korrekturen zum großen Teile fort, und es ergibt sich die neue Näherungsformel:

$$(2) \quad \begin{aligned} F_5 = \tfrac{1}{3} b [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_5 + \cdots + 4y_{2n-1} + y_{2n}] \\ + \frac{b^4}{180} (y_0''' - y_{2n}''') \end{aligned}$$

oder:

$$(3) \quad F_5 = \tfrac{2}{3} b (2p + q) + \tfrac{1}{3} b (y_0 + y_{2n}) + \tfrac{1}{180} b^4 (y_0''' - y_{2n}''').$$

Natürlich läßt sich diese Formel nicht anwenden, wenn die Begrenzung der Fläche gezeichnet vorliegt, vielmehr nur dann, wenn sie analytisch in der Form $y = f(x)$ gegeben ist.

539. Ein Zahlenbeispiel. In Nr. 535 erwähnten wir schon, was hier noch einmal wiederholt werden mag: Die abgeleiteten Formeln gelten sowohl für solche Kurven, die gegenüber der x-Achse konkav, als auch für solche, die gegenüber der x-Achse konvex sind. Im letzteren Falle sind überall im vorhergehenden die Zeichen $>$ und $<$ miteinander zu vertauschen.

Z. B. wollen wir die fünf in Nr. 536 und Nr. 538 gewonnenen Näherungswerte $F_1, \cdots F_5$ für die *gleichseitige Hyperbel* $y = 1 : x$ von $x = 1$ bis $x = 2$ berechnen, indem wir zehn Teile annehmen, also $n = 10$ setzen. Die Werte p und q, vgl. (1) und (3) in Nr. 535, sind hier

$$p = 3{,}459\ 539\ 43, \quad q = 2{,}728\ 174\ 60,$$

während der wahre Wert F der Fläche gleich $\ln 2$ ist (vgl. 1. Beispiel, Nr. 411). Es ist also:

$$F = 0{,}693\ 147\ 18.$$

Die Rechnung liefert auf 8 Dezimalen genau:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 0{,}693\ 771\ 40, & F_1 - F &= +\,0{,}000\ 624\ 22,\\
F_2 &= 0{,}693\ 522\ 7\bar{2}, & F_2 - F &= +\,0{,}000\ 375\ 5\bar{4},\\
F_3 &= 0{,}692\ 984\ 44, & F_3 - F &= -\,0{,}000\ 162\ 7\bar{4},\\
F_4 &= 0{,}693\ 150\ 23, & F_4 - F &= +\,0{,}000\ 003\ 05,\\
F_5 &= 0{,}693\ 147\ 1\bar{1}, & F_5 - F &= -\,0{,}000\ 000\ 07.
\end{aligned}
$$

Im vorliegenden Beispiele also ist die Simpsonsche Regel (siehe F_4) den drei andern entschieden überlegen; und die Simpsonsche Regel mit dem Korrektionsglied (siehe F_5) gibt sogar den Wert von ln 2 genau bis auf einen Fehler von nur 7 Einheiten der 8. Dezimalstelle.

540. Die von einer Strecke überstrichene Fläche. Man hat Apparate ersonnen, mit deren Hilfe man rein mechanisch den Inhalt von gezeichnet vorliegenden ebenen Flächenstücken bestimmen kann. Der wichtigste und praktischste ist das sogenannte *Polar-Planimeter*. Um die Wirkungsweise dieses Instrumentes zu verstehen, betrachten wir zunächst die Fläche, die ein Stab von konstanter Länge l überstreicht, wenn er sich irgendwie auf der Ebene bewegt.

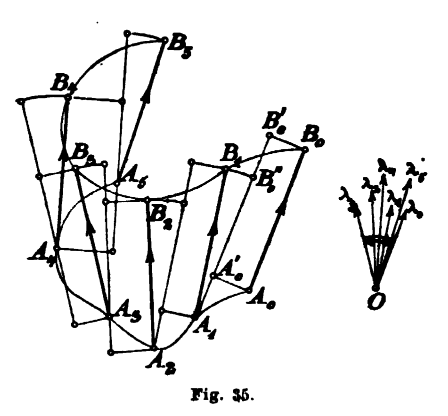


Fig. 35.

Zunächst ersetzen wir die wahre Bewegung des Stabes durch die folgende: Von den verschiedenen Lagen, die der Stab nach und nach erhält, wählen wir eine beliebige Anzahl heraus. Es seien dies die Lagen A_0B_0, A_1B_1, $\cdots$ A_nB_n, siehe Fig. 35. Alsdann verschieben wir A_0B_0 parallel mit sich und so, daß A_0 und B_0 die Senkrechten zu A_0B_0 beschreiben, also ein Rechteck überstrichen wird, und zwar so weit, bis die A_0B_0 gegenüberliegende Seite des Rechtecks, die wir $A_0'B_0'$ nennen wollen, durch A_1 geht (wenn nötig, ihre Verlängerung). Darauf wird $A_0'B_0'$ längs der Geraden, auf der $A_0'B_0'$ liegt, soweit

verschoben, bis das Ende A_0' in A_1 hineinrückt, so daß $A_1 B_0''$ die neue Lage ist. Schließlich drehen wir $A_1 B_0''$ um A_1 in die Lage $A_1 B_1$. Dasselbe Verfahren wenden wir an, um $A_1 B_1$ in die Lage $A_2 B_2$ überzuführen, usw. Es ergeben sich so als Grenzen einer Ersatzfläche außer den Endlagen $A_0 B_0$ und $A_n B_n$ zwei stetige Linienzüge:

$$A_0 A_0' A_1 A_1' A_2 \cdots A_n \text{ und } B_0 B_0' B_0'' B_1 B_1' B_1'' B_2 \cdots B_n,$$

von denen der erste aus lauter Strecken, der zweite aus Strecken und Kreisbogen besteht. Wählen wir als Zwischenlagen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $\cdots A_{n-1} B_{n-1}$ zwischen der Anfangslage $A_0 B_0$ und der Endlage $A_n B_n$ immer mehr von den bei der wirklichen Bewegung durchlaufenen Zwischenlagen derart, daß schließlich der Unterschied der Lage zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stäben $A_k B_k$ und $A_{k+1} B_{k+1}$ nach Null strebt, so strebt auch die Summe der Flächen aller konstruierten Rechtecke und Kreissektoren zum wahren Werte der Fläche, nach Nr. 531.

Bezüglich des Vorzeichens setzen wir fest: Geht der Stab aus einer Lage $A_k B_k$ in eine neue Lage $A_{k+1} B_{k+1}$ über, so sollen diejenigen Flächenteile, die dabei links von der Richtung von A_k nach B_k liegen, positiv, die andern negativ gerechnet werden. Die wahre Gesamtfläche hat alsdann denjenigen Umlaufssinn, der durch den Weg von A_0 nach B_0 gekennzeichnet wird (vgl. Nr. 530).

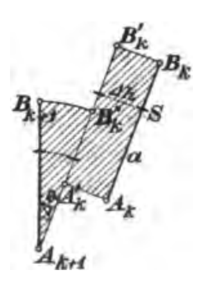


Fig. 36.

Betrachten wir nun allgemein das Rechteck mit der Anfangsseite $A_k B_k$ und den darauf folgenden Kreissektor, siehe Fig. 36. Die zur Grundlinie $A_k B_k$ oder l gehörige Höhe des Rechtecks sei gleich Δh und zwar positiv oder negativ, je nachdem A_k' links oder rechts von $A_k B_k$ liegt. Ferner sei $\sphericalangle B_k'' A_{k+1} B_{k+1}$, gemessen im positiven Drehsinne (dem des Uhrzeigers entgegen) gleich $\Delta\varphi$. Alsdann ist $l\Delta h$ die Rechtecksfläche und $\frac{1}{2} l^2 \Delta\varphi$ die Sektorfläche. Die wahre Gesamtfläche, die der Stab überstreicht, ist folglich der Grenzwert

$$F = \lim\left(\sum l\Delta h + \sum \tfrac{1}{2} l^2 \Delta\varphi\right)$$

[540

oder, da l konstant ist:

(1) $$F = l \lim \sum \varDelta h + \tfrac{1}{2} l^2 \lim \sum \varDelta \varphi.$$

Der Grenzwert ist dabei in der oben auseinandergesetzten Bedeutung zu verstehen.

Wir wollen durch irgend einen Punkt O der Ebene zu allen Richtungen A_0B_0, A_1B_1, $\cdots A_nB_n$ die Parallelen λ_0, λ_1, λ_2, $\cdots \lambda_n$ in entsprechendem Sinne ziehen, siehe Fig. 35 auf S. 282. Alsdann ist:

(2) $$\sum \varDelta \varphi = \sphericalangle (\lambda_0, \lambda_n).$$

Diese Formel (2) gilt ebenso wie die Formel (1) für positive und negative Werte der Einzelwinkel $\varDelta \varphi$. Nach (1) und (2) ist jetzt:

(3) $$F = l \lim \sum \varDelta h + \tfrac{1}{2} l^2 \sphericalangle (\lambda_0, \lambda_n).$$

Selbstverständlich ist der Winkel in Bogenmaß zu messen.

541. Das Planimeter von Amsler. Wir wollen jetzt annehmen, der Stab l oder AB liege nicht auf der Ebene auf, sondern sei durch eine geeignete Vorrichtung immer in demselben Abstande *über* der Ebene und *parallel zu ihr* gehalten. Ferner trage er an einer Stelle S, die von A die Entfernung a habe, eine Kreisscheibe, deren Ebene zu l und demnach auch zur Zeichenebene senkrecht ist, so daß sich die Scheibe um ihre Mitte S drehen kann. Ihr Radius sei so groß gewählt, daß die Scheibe die Zeichenebene berührt und infolge der Reibung bei der Bewegung des Stabes in Drehung versetzt wird. Wenn sich nun der Stab l aus der Lage A_kB_k, siehe Fig. 36, S. 283, in die Lage $A_k'B_k'$ verschiebt, so legt ein Punkt auf dem Umfange der Scheibe infolge der Reibung den Weg $\varDelta h$ zurück. Dieser Weg $\varDelta h$ ist ein Bogen auf dem Umfange der Scheibe und positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem sich die Scheibe von A_k aus betrachtet im positiven Sinne (entgegen dem Uhrzeiger) oder im negativen Sinne dreht. Wird der Stab weiterhin aus der Lage $A_k'B_k'$ in die Lage $A_{k+1}B_k''$ verschoben, so dreht sich die Scheibe gar nicht. Wird endlich der Stab aus der Lage $A_{k+1}B_k''$ um A_{k+1} herum in die Lage $A_{k+1}B_{k+1}$ gedreht, so hat der Umkreis der Scheibe da, wo er

auf der Zeichenebene ruht, beständig dieselbe Tangente wie der Kreisbogen im Kreissektor mit dem Radius a. Also dreht sich jetzt die Scheibe um den Weg $a \Delta \varphi$, wieder gemessen als Bogen auf dem Umfange der Scheibe. Insgesamt legt ein Punkt auf diesem Umfange bei der in Fig. 36 dargestellten Bewegung mithin den Bogen $\Delta h + a \Delta \varphi$ zurück. Demnach ist sein Gesamtweg, wenn die Überführung des Stabes l aus der Anfangslage $A_0 B_0$ in die Endlage $A_n B_n$ vollendet ist, gegeben durch:

$$s = \lim \sum (\Delta h + a \Delta \varphi) = \lim \sum \Delta h + a \lim \sum \Delta \varphi$$

oder nach (2) in voriger Nummer durch:

$$(1) \qquad s = \lim \sum \Delta h + a \sphericalangle (\lambda_0, \lambda_n).$$

Hiernach ist

$$\lim \sum \Delta h = s - a \sphericalangle (\lambda_0, \lambda_n).$$

Setzen wir diesen Wert in die Formel (3) der letzten Nummer ein, so kommt:

$$(2) \qquad F = ls + (\tfrac{1}{2} l^2 - la) \sphericalangle (\lambda_0, \lambda_n).$$

Können wir es nun so einrichten, daß $\sphericalangle (\lambda_0, \lambda_n) = 0$ wird, indem sich die positiven und negativen Summanden $\Delta \varphi$ gegenseitig aufheben, so folgt aus (2) sehr einfach:

$$(3) \qquad F = ls.$$

Dies wird erreicht, *wenn die Endlage $A_n B_n$ des Stabes mit seiner Anfangslage $A_0 B_0$ zusammenfällt*, wohlbemerkt aber so, daß der Stab nicht etwa inzwischen eine volle Umdrehung um vier Rechte gemacht hat. D. h. in der Nebenfigur zu Fig. 35, S. 282, soll das Winkelfeld, das *alle* möglichen Lagen λ_0, λ_1, λ_2, $\cdots$ λ_n enthält, kleiner als vier Rechte sein.

In Fig. 37 ist eine solche Bewegung angedeutet. Dabei sind nur wahre Zwischenlagen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $\cdots$ nicht aber die eingeschalteten Lagen $A_0' B_0'$, $A_1 B_0''$, $\cdots$ angegeben. Beachtet man die den Flächenstücken erteilten Vorzeichen, so sieht man, daß die Fläche F, die der Stab insgesamt überstrichen hat, eine Summe aus teils positiven und teils negativen Stücken ist. In der Figur sind die positiven durch nach rechts steigende, die negativen durch nach rechts fallende Schraffuren gekennzeichnet.

Ferner ist der Umlaufssinn, wie in voriger Nummer bemerkt wurde, derjenige, der sich ergibt, wenn wir von A_0 nach B_0 wandern und dann die Bahn $B_0 B_1 B_2 \cdots B_n A_n A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_1 A_0$ zurücklegen.

Hierbei wird der Ort β der Punkte B in einem gewissen Sinne durchlaufen. Da er eine geschlossene Linie ist, enthält er einen bestimmten Flächenraum B mit bestimmten Vorzeichen (in Fig. 37 mit dem Pluszeichen). Dasselbe gilt von dem Orte α der Punkte A, genommen in dem soeben benutzten Fortschreitungssinne $A_n A_{n-1} \cdots A_1 A_0$. Sein Flächenraum sei A

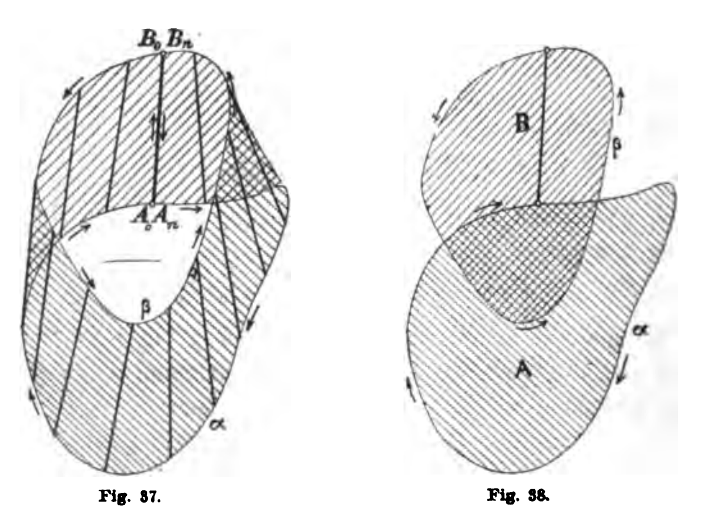


Fig. 37. Fig. 38.

(in Fig. 37 ist A negativ). In Fig. 38 sind dieselben Flächen A und B entsprechend ihren Vorzeichen schraffiert. Bilden wir die Summe $A + B$, so heben sich die Teile, die beide Schraffuren aufweisen, gegenseitig fort. Dasselbe gilt in Fig. 37 von Teilen der Fläche F, und man sieht, *daß die Summe $A + B$ genau die Fläche F ist.*

Aus (3) folgt demnach:

(4) $$B = ls - A.$$

Das *Amslersche Polar-Planimeter* setzt sich nun aus dem beschriebenen Stabe l oder AB und einem daran in A angeknüpften, ebenfalls zur Zeichenebene parallel geführten Stabe AC zusammen, der in A mittels eines Gelenkes vollständig gegen-

541]

über l drehbar ist. Der Endpunkt oder Pol C trägt einen Stift und wird mittels des Stiftes auf der Ebene festgehalten, siehe Fig. 39, während man den Endpunkt B eine geschlossene Kurve β beschreiben läßt. Dabei wird die Lage von C außerhalb β so gewählt, daß der Endpunkt A nur hin- und hergehende Bewegungen um C ausführt, ohne eine volle Umkreisung um C zu machen. Die Kurve α, die A beschreibt, ist dann ein Kreisbogen, dessen Teile aber einmal im einen, dann im anderen Sinne beschrieben werden, so daß der Kreisbogen als eine geschlossene (doppelt zu denkende) Kurve aufzufassen ist, deren Flächeninhalt $A = 0$ ist. Aus (4) folgt nun noch einfacher:

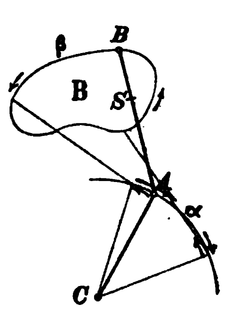


Fig. 39.

(5) $$B = ls,$$

d. h. *die Fläche B der umfahrenen geschlossenen Kurve β ist gleich der Länge l des Stabes AB, multipliziert mit dem Gesamtbogen s, den ein Punkt auf dem Umfange der Kreisscheibe S wegen der Reibung zurücklegt.*

Beim Planimeter ist an der Kreisscheibe S eine Vorrichtung angebracht, mittels deren man nicht den Bogen s, sondern sein Produkt mit l, also direkt die Größe der umfahrenen Fläche B ablesen kann.

Zu dieser Entwicklung der Theorie des Planimeters ist noch hinzuzufügen: Wir haben von kinematischen Vorstellungen Gebrauch gemacht, nämlich bei der Untersuchung der Drehung der Kreisscheibe. Es leuchtet ein, daß wir auf die genaue Begründung dieser Vorstellungen hier nicht eingehen können.

§ 3. Rektifikation von Kurven.

542. Definition der Bogenlänge einer ebenen Kurve. Die Berechnung der Bogenlänge einer Kurve heißt ihre *Rektifikation* (vgl. Nr. 202). Schon in Nr. 193 haben wir von der Bogenlänge einer ebenen Kurve gesprochen und eine Formel für ihr Differential abgeleitet, die wir anwanden, um für eine Reihe von ebenen Kurven die Rektifikation auszuführen, vgl. z. B. Nr. 224. Wir hoben jedoch schon in Nr. 193

hervor: Alle diese Ergebnisse waren noch nicht genügend begründet, weil wir noch keine scharfe Definition für die Bogenlänge geben konnten und uns vielmehr mit der landläufigen Vorstellung davon begnügten, um nicht jene einfachen Rektifikationen zu lange aufschieben zu müssen.

Es liegt uns daher jetzt ob, die Bogenlänge einer ebenen Kurve exakt zu definieren und alsdann zu zeigen, daß die grundlegende Formel (2) in Nr. 193 für das Differential der Bogenlänge aus der Definition folgt. Ist dies geschehen, so müssen wir noch eine zweite Lücke ausfüllen: In Nr. 193 haben wir nämlich bemerkt, daß wir in der Integralrechnung zeigen werden, daß das Verhältnis eines Bogens zu seiner Sehne den Grenzwert Eins hat, falls der Bogen oder die Sehne nach Null strebt. Auch dies ist mithin noch zu beweisen.

Wir gehen von den in Nummer 193 schon formulierten Voraussetzungen aus:

In rechtwinkligen Koordinaten sei eine Kurve durch die Funktion

(1) $$y = f(x)$$

gegeben, *die in dem betrachteten Intervalle nebst ihrer ersten Ableitung* $f'(x)$ *stetig sei.* Hier also verlangen wir auch die Existenz einer stetigen Ableitung, was bei den Quadraturen nicht nötig war (vgl. Nr. 404 u. f.).

Fig. 40.

Insbesondere sollen die gemachten Voraussetzungen in dem Intervalle von x_0 bis X gelten, so daß zu dem zugehörigen Intervalle AB der Abszissenachse, siehe Fig. 40, ein Stück CD der Kurve gehört. Wie in Nr. 404 teilen wir das Intervall AB in n beliebig große Teile, indem wir Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{n-1}$ einschalten und die zugehörigen Punkte $M_1, M_2, M_3, \ldots M_{n-1}$ der Kurve ins Auge fassen. Alsdann konstruieren wir das *Sehnenpolygon* $CM_1M_2M_3 \ldots M_{n-1}D$. Unter der *Länge* dieses Sehnenpolygons verstehen wir die Summe der Längen aller einzelnen Sehnen $CM_1, M_1M_2, \ldots M_{n-1}D$.

542]

Wir setzen $X > x_0$ voraus und bringen alle diese Längen positiv in Rechnung. Nun behaupten wir, daß die Länge des Sehnenpolygons einen und nur einen bestimmten endlichen Grenzwert hat, wenn *alle* Teilintervalle AP_1, P_1P_2, ... $P_{n-1}B$ nach Null streben und dementsprechend ihre Anzahl n über jede Zahl wächst. Ist dies bewiesen, *so nennen wir den Grenzwert die Bogenlänge s der Kurve von C bis D oder im Intervalle von x_0 bis $X > x_0$.*

Ein beliebiger der Teilpunkte M_k der Kurve habe die Koordinaten x, y, und es seien $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die Koordinaten des folgenden Teilpunktes M_{k+1}. Die Sehne M_kM_{k+1} hat alsdann die Länge:

$$M_kM_{k+1} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

wobei auch die zweite Wurzel positiv ist, da $\Delta x > 0$ ist (wegen $X > x_0$). Aus dem Mittelwertsatze 3 von Nr. 28 folgt nun nach (1):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x + \theta \Delta x),$$

wobei θ ein positiver echter Bruch ist. Demnach kommt:

$$(2) \qquad M_kM_{k+1} = \Delta x \sqrt{1 + [f'(x + \theta\Delta x)]^2}.$$

Da $f'(x)$ im Intervalle von x_0 bis X stetig ist, also auch die Quadratwurzel aus $1 + [f'(x)]^2$, so können wir Δx nach Satz 3, Nr. 20, so klein wählen, daß die in (2) auftretende Quadratwurzel von dieser Wurzel um weniger als eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl σ abweicht. Bilden wir die Gesamtlänge

$$S = \sum M_kM_{k+1}$$

des Sehnenpolygons, so folgt, *daß S von der Summe*

$$(3) \qquad \sum \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\Delta x$$

um weniger als $\sigma \sum \Delta x$ abweicht, d. h. um weniger als $\sigma(X - x_0)$.

Wenn wir

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = F(x)$$

setzen und die Abszissen von A, P_1, P_2, ... P_{n-1} mit x_0, x_1, x_2, ... x_{n-1} bezeichnen, so hat die Summe (3) ausführlich geschrieben die Form:

$$F(x_0)(x_1 - x_0) + F(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + F(x_{n-1})(X - x_{n-1}).$$

Nach Nr. 410 ist mithin ihr Grenzwert, falls alle Differenzen Δx oder $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... $X - x_{n-1}$ nach Null streben und dementsprechend n über jede Zahl wächst, gleich dem bestimmten Integrale:

$$\int_{x_0}^{X} F(x)dx \quad \text{oder} \quad \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Nun aber erreichen wir diesen Grenzübergang, wenn wir die positive Zahl σ immer kleiner wählen, wobei auch $\sigma(X - x_0)$ nach Null strebt, wenn $X - x_0$ endlich ist. Also ergibt sich:

$$\text{(4)} \qquad \lim S = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Dieselbe Schlußfolgerung können wir unter der Annahme $x_0 > X$ machen. Da wir alsdann nach der Festsetzung in Nr. 169 die Kurve von C bis D im negativen Sinne durchlaufen, werden wir dann alle Sehnen mit dem Minuszeichen versehen. Weil Δx jetzt negativ ist, ist die Wurzel in (2) nach wie vor positiv zu wählen, mithin auch die in (4).

Wir haben somit den

Satz 2: Ist eine Kurve in einem endlichen Intervalle von x_0 bis X durch eine Funktion $y = f(x)$ mit einer stetigen Ableitung $f'(x)$ gegeben, so haben die Längen aller der Kurve von der Stelle x_0 bis zur Stelle X eingeschriebenen Sehnenpolygone den bestimmten endlichen Grenzwert

$$\int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx,$$

falls alle Sehnenlängen einzeln nach Null streben und dementsprechend ihre Anzahl über jede Zahl wächst. Werden die Sehnenlängen positiv oder negativ gerechnet, je nachdem $x_0 < X$ oder $x_0 > X$ ist, so ist die Quadratwurzel stets positiv anzunehmen.

Das Vorhergehende liefert uns also, falls die obere Grenze X willkürlich gelassen und daher mit x bezeichnet wird, die Bogenlänge

$$\text{(5)} \qquad s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

der Kurve von x_0 bis x. Diese Bogenlänge s ist eine Funktion von x und hat die Ableitung:

$$(6) \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Hiermit ist die Formel (1) von Nr. 193 exakt bewiesen.

543. Definition der Bogenlänge einer Raumkurve. Genau dasselbe Schlußverfahren läßt sich anwenden, wenn eine ebene Kurve mittels einer Hilfsveränderlichen t in der Form

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

gegeben ist, wobei φ und ψ im Intervalle von t_0 bis T stetige Ableitungen haben sollen. Wir wollen dies aber sogleich verallgemeinern, nämlich eine *Raumkurve*:

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t)$$

ins Auge fassen (vgl. Nr. 251). Dabei sollen φ, χ, ψ im Intervalle von t_0 bis T stetige Ableitungen haben.

Gehören nämlich zu t_0 und T die Endpunkte C und D eines Kurvenbogens, so schalten wir von t_0 bis T beliebige $n - 1$ Zwischenwerte $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ ein, zu denen wie in der früheren Figur 40, S. 288, $n - 1$ Kurvenpunkte $M_1, M_2, \ldots M_{n-1}$ gehören, die wir aufeinanderfolgend durch Sehnen verbinden. Wenn allgemein t einer der Werte, etwa für M_k, ist und zum nächsten Punkte M_{k+1} der Wert $t + \Delta t$ gehört, so ist die Länge der Polygonseite

$$(2) \quad M_k M_{k+1} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta t \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}.$$

wo die Wurzeln positiv sein sollen, also $M_k M_{k+1}$ positiv oder negativ gerechnet wird, je nachdem $t_0 < T$ oder $t_0 > T$ ist, was mit der Festsetzung in Nr. 252 über den Fortschreitungssinn der Kurven in Einklang steht. Dabei bedeuten natürlich Δx, Δy, Δz die Zunahmen der Koordinaten x, y, z, wenn wir vom Punkte M_k zum Punkte M_{k+1} übergehen. Nach dem Mittelwertsatze 3 von Nr. 28 ist nun

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \varphi'(t + \theta_1 \Delta t),$$

wo θ_1 einen positiven echten Bruch bedeutet, und analog

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \chi'(t + \theta_2 \Delta t), \qquad \frac{\Delta z}{\Delta t} = \psi'(t + \theta_3 \Delta t),$$

wo auch θ_2 und θ_3 positive echte Brüche sind. Aus der Stetigkeit von

$$(3) \qquad \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

folgt, daß wir $|\Delta t|$ so klein wählen können, daß die in (2) auftretende Wurzel, nämlich

$$\sqrt{[\varphi'(t + \theta_1 \Delta t)]^2 + [\chi'(t + \theta_2 \Delta t)]^2 + [\psi'(t + \theta_3 \Delta t)]^2},$$

von der Wurzel (3) um weniger als eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl σ abweicht. Dann aber weicht die Summe

$$S = \sum M_k M_{k+1}$$

aller Polygonseiten von der Summe

$$\sum \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \Delta t$$

um weniger als $\sigma \sum \Delta t$, d. h. als $\sigma(T - t_0)$ ab. Somit gibt der Grenzübergang zu $\lim \sigma = 0$, wobei $\lim \Delta t = 0$ ist, daß S den Grenzwert

$$\int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$$

hat. Es gilt also der

Satz 3: Ist eine Raumkurve in einem endlichen Intervalle von t_0 bis T mittels einer Hilfsveränderlichen t durch die drei Funktionen:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t)$$

gegeben, die stetige Ableitungen $\varphi'(t)$, $\chi'(t)$, $\psi'(t)$ haben, und werden zwischen t_0 und T beliebige $n - 1$ Zwischenwerte t_1, t_2, .., t_{n-1} eingeschaltet, so daß zu t_0, t_1, t_2, ... t_{n-1}, T aufeinanderfolgende Kurvenpunkte gehören, die durch ein Sehnenpolygon verbunden werden können, so hat die Länge des Polygons, falls alle Seiten des Polygons nach Null streben und dementsprechend ihre Anzahl n über jede Zahl wächst, den bestimmten endlichen Grenzwert

$$\int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Werden die Längen der Polygonseiten positiv oder negativ gerechnet, je nachdem $t_0 < T$ oder $t_0 > T$ ist, so ist die Quadratwurzel stets positiv.

Der so gefundene Grenzwert heißt die *Bogenlänge* der Kurve von t_0 bis T.

Wieder folgt hieraus sofort die Richtigkeit der Formel (3) von Nr. 257 für den Differentialquotienten der zum Intervalle von t_0 bis t gehörigen Bogenlänge s, nämlich:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{4}$$

Insbesondere kommen wir bei der Annahme, daß $z = \psi(t) = 0$ sei, zur Bogenlänge der *ebenen* Kurve, womit dann auch die letzten Formeln (3) und (4) in Nr. 193 exakt bewiesen sind.

Da wir die Bogenlänge als Grenzwert der Länge des Sehnenpolygons definiert haben, so folgt ohne weiteres, daß wir bei ein und derselben Kurve für ein bestimmtes Stück stets dieselbe Bogenlänge erhalten, in welcher Weise wir auch analytisch die Kurve geben. Z. B. wollen wir in (1) vermöge

$$\tau = \omega(t) \tag{5}$$

eine neue Hilfsveränderliche τ einführen, die so beschaffen ist, daß erstens τ von $t = t_0$ bis $t = T$ eine beständig wachsende oder abnehmende stetige Funktion von t mit einer stetigen Ableitung ist, die etwa für t_0 und T die Werte τ_0 und T hat. Zweitens soll umgekehrt vermöge (5) auch t als eine solche stetige Funktion von τ im Intervalle von τ_0 bis T definiert sein, die eine stetige Ableitung hat. Alsdann gehe die Darstellung (1) der Kurve in diese über:

$$x = \Phi(\tau), \qquad y = X(\tau), \qquad z = \Psi(\tau).$$

Nun folgt aus dem Vorhergehenden, daß

$$s = \int_{\tau_0}^{\mathrm{T}} \sqrt{[\Phi'(\tau)]^2 + [X'(\tau)]^2 + [\Psi'(\tau)]^2}\, d\tau$$

auch direkt aus

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$$

hervorgeht, wenn wir hierin vermöge (5) die neue Veränderliche τ einführen.

Allerdings gilt dies nicht stets auch für das Vorzeichen, vielmehr nur dann, wenn τ mit t beständig wächst. Andernfalls ist das Vorzeichen zu ändern.

Man drückt dies Ergebnis auch so aus: *Die Bogenlänge ist — abgesehen von ihrem Vorzeichen — ein Begriff, der gegenüber der Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen invariant ist.*

544. Grenzwert des Verhältnisses des Bogens zur Sehne. Wie wir in Nr. 542 ankündigten, werden wir jetzt den Beweis eines Satzes nachholen, der in Nr. 193 und Nr. 195 für ebene Kurven und in Nr. 257 und späterhin für Raumkurven benutzt wurde.

Es werde die Kurve:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

betrachtet unter der Voraussetzung, daß φ, χ, ψ im Intervalle von t bis $t + \Delta t$ stetige Ableitungen haben. Die Länge der zu diesem Intervalle gehörigen *Sehne* ist gleich der Quadratwurzel aus $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, wenn Δx, Δy, Δz die Zunahmen sind, die x, y, z erfahren, sobald t um Δt wächst. Die zum Intervalle gehörige Bogenlänge sei Δs. Dann ist:

$$\frac{\text{Bogen}}{\text{Sehne}} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta t}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}},$$

woraus für $\lim \Delta t = 0$ folgt:

$$\lim \frac{\text{Bogen}}{\text{Sehne}} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

Aber nach (4) in Nr. 543 ist dieser Bruch gleich Eins. Also folgt

Satz 4: Ist eine Kurve

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

gegeben und haben φ, χ, ψ in der Umgebung eines Wertes t stetige Ableitungen, so ist in dieser Umgebung der Grenzwert des

Verhältnisses aus einem Kurvenbogen zur zugehörigen Sehne für den Fall, daß die Sehne nach Null strebt, gleich Eins.

545. Rektifikation in Polarkoordinaten. Ist in der Ebene eine Kurve mittels Polarkoordinaten ω, ϱ in der Form

$$\varrho = f(\omega)$$

gegeben und hat $f(\omega)$ in der Umgebung eines Wertes ω eine stetige Ableitung, so ist die Kurve in der Form:

$$x = \varrho \cos \omega = f(\omega) \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega = f(\omega) \sin \omega$$

mittels der Hilfsveränderlichen ω ausgedrückt. Dabei sind x und y solche Funktionen von ω, die in der Umgebung des betrachteten Wertes ω ebenfalls stetige Ableitungen haben. Hieraus folgt ohne weiteres nachträglich die Richtigkeit der in Nr. 205 schon gefundenen Formeln:

$$(1) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = \varrho^2 d\omega^2 + d\varrho^2, \qquad \frac{ds}{d\omega} = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2},$$

wobei die Quadratwurzel positiv ist, falls die Kurve im Sinne wachsender Werte von ω durchlaufen wird.

Ganz ebenso ergibt sich nachträglich die exakte Herleitung des in Nr. 258 für das Bogendifferential ds in räumlichen Polarkoordinaten r, θ, ψ gegebenen Ausdrucks:

$$(2) \qquad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\,\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta\, d\psi^2}.$$

§ 4. Rektifikation einiger Kurven mittels elliptischer Integrale.

546. Ellipsen- und Hyperbelbogen. Indem wir an die in Nr. 222 und Nr. 223 für die Bogendifferentiale gefundenen Ausdrücke erinnern, sehen wir:

Der Bogen s_e der *Ellipse:*

$$(1) \qquad x = \sin \varphi, \quad y = \sqrt{1 - k^2} \cos \varphi$$

mit der halben Hauptachse 1 und der halben Nebenachse $\sqrt{1 - k^2}$, d. h. mit der Exzentrizität $k < 1$, wird gegeben durch:

$$(2) \qquad s_e = \int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - k^2 \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi},$$

wenn wir wie in Nr. 448 unter $\varDelta\varphi$ die positive Quadratwurzel verstehen:

$$(3)\qquad \varDelta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}.$$

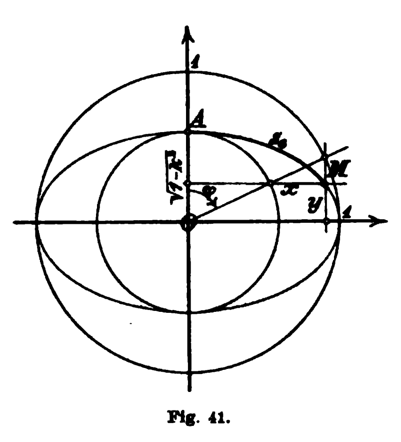


Fig. 41.

Dabei hat φ die aus Fig. 41 einleuchtende Bedeutung, und s_e ist der von $\varphi = 0$ an erstreckte Bogen AM der Ellipse.

Bei der *Hyperbel*

$$(4)\qquad \begin{cases} x = (1 - k^2)\,\mathrm{tg}\,\varphi, \\ y = \dfrac{k\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}{\cos\varphi}, \end{cases}$$

mit der halben Hauptachse k und der halben Nebenachse $\sqrt{1 - k^2}$, d. h. mit der Exzentrizität $1 : k > 1$, wird der Bogen s_h gegeben durch:

$$(5)\qquad s_h = \int_0^\varphi \frac{(1-k^2)\,d\varphi}{\cos^2\varphi \cdot \varDelta\varphi} = k^2 \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta\varphi} - k^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \mathrm{tg}\,\varphi \cdot \varDelta\varphi.$$

Wir haben nämlich in den Formeln von Nr. 223 für a den Wert $\sqrt{1 - k^2}$ zu setzen. Die Hyperbel hat die y-Achse zur Hauptachse, siehe Fig. 42. Der Winkel φ kann beliebig gewählt werden, und aus ihm läßt sich, wie die Figur schon deutlich genug zeigt, der zugehörige Kurvenpunkt M konstruieren. Der Bogen s_h ist von $\varphi = 0$ an erstreckt, d. h. der Bogen AM. Der letzte Summand in (5) ist die Länge t der in M konstruierten Tangente, gemessen bis zum Fußpunkte P des Lotes von O auf die Tangente.

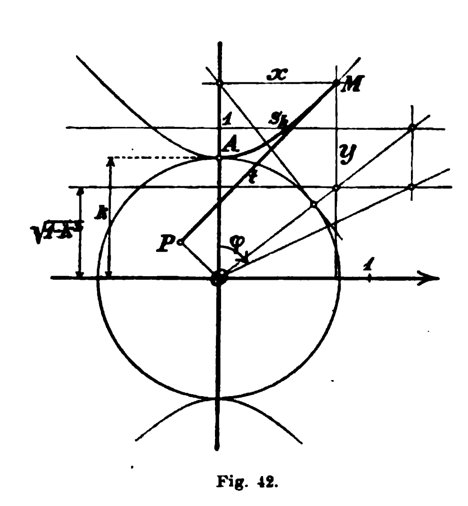


Fig. 42.

Nach § 3 des 2. Kap. gehören die hier auftretenden

Integrale zu den elliptischen. Gerade der Umstand, daß die Bogenlänge auf der Ellipse durch ein solches Integral ausgedrückt wird, war ja der Anlaß zur Bezeichnung jener Klasse von Integralen als *elliptische Integrale* (vgl. Nr. 440.). Insbesondere zeigen die Formeln (2) und (5), daß sich s_e und s_h durch die *elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung* darstellen lassen, nämlich durch die Integrale u und v von Nr. 448.

Nach *Legendre* bezeichnet man das elliptische Normalintegral *erster* Gattung mit $F(\varphi)$ oder auch, da es außer von φ noch vom Modul k abhängt, mit $F(k, \varphi)$; man setzt also:

$$(6) \qquad F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Ferner benutzte *Legendre* für dasjenige elliptische Integral, das den Ellipsenbogen s_e angibt, die Bezeichnung $E(\varphi)$. Wollen wir auch den auftretenden Wert des Moduls k kenntlich machen, so schreiben wir $E(k, \varphi)$, also:

$$(7) \qquad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi.$$

Aus (2) folgt, daß das elliptische Normalintegral *zweiter* Gattung durch $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ in der Form

$$(8) \qquad \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k^2}\left[F(k, \varphi) - E(k, \varphi)\right]$$

darstellbar ist. Aus (2) und (5) ergeben sich die Werte des Ellipsen- und Hyperbelbogens in den neuen Bezeichnungen so:

$$(9) \qquad s_e = E(k, \varphi), \quad s_h = (1 - k^2)F(k, \varphi) - E(k, \varphi) + \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta\varphi.$$

547. Reihenentwicklungen für $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$. In Nr. 446 haben wir die Normalintegrale erster und zweiter Gattung in Reihen entwickelt. Machen wir darin wie in Nr. 448 die Substitution $x = \sin\varphi$, so gehen Reihen hervor, mittels derer $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ darstellbar sind. Aber ebenso bequem ist es, diese Darstellungen direkt abzuleiten.

Nach der Binomialformel (4) in Nr. 125 ist nämlich:

$$\frac{1}{\Delta\varphi} = 1 + \tfrac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi + \cdots,$$

$$\Delta\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi - \cdots$$

und zwar konvergieren diese Reihen, da sie Potenzreihen von $k^2\sin^2\varphi$ sind und $k^2 < 1$ ist, für jeden Wert von φ gleichmäßig (vgl. Nr. 428). Nach Satz 26 von Nr. 426 dürfen wir sie gliedweise integrieren. So ergibt sich:

$$(1)\begin{cases} F(k,\varphi) = \varphi + \tfrac{1}{2}k^2\int\limits_0^\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\int\limits_0^\varphi \sin^4\varphi\, d\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\int\limits_0^\varphi \sin^6\varphi\, d\varphi + \cdots, \\ E(k,\varphi) = \varphi - \tfrac{1}{2}k^2\int\limits_0^\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi - \frac{1}{2\cdot 4}k^4\int\limits_0^\varphi \sin^4\varphi\, d\varphi - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\int\limits_0^\varphi \sin^6\varphi\, d\varphi - \cdots. \end{cases}$$

Die hierin auftretenden Integrale lassen sich nach Nr. 459 berechnen.

Ist insbesondere $\varphi = \tfrac{1}{2}\pi$, so entnehmen wir aus (4) in Nr. 477:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

so daß sich ergibt:

$$(2)\begin{cases} F(k,\tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi\left[1 + (\tfrac{1}{2}k)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^2\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^3\right)^2 + \cdots\right], \\ E(k,\tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi\left[1 - (\tfrac{1}{2}k)^2 - 3\left(\frac{1}{2\cdot 4}k^2\right)^2 - 5\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^3\right)^2 - \cdots\right]. \end{cases}$$

Nach (9) in voriger Nummer ist $E(k, \tfrac{1}{2}\pi)$ die Länge des Ellipsenquadranten mit der halben großen Achse 1 und der Exzentrizität k.

Die Werte $F(k, \tfrac{1}{2}\pi)$ und $E(k, \tfrac{1}{2}\pi)$ bezeichnet man auch mit $F_1(k)$ und $E_1(k)$:

$$(3)\qquad F_1(k) = F(k, \tfrac{1}{2}\pi), \quad E_1(k) = E(k, \tfrac{1}{2}\pi).$$

548. Transformation des Moduls k von $F(k, \varphi)$. Wenn wir wie bisher unter k eine Zahl zwischen 0 und 1 und unter $\Delta\varphi$ die positive Quadratwurzel aus $1 - k^2\sin^2\varphi$ ver-

stehen, so gibt es einen Winkel φ_1, der den beiden Gleichungen genügt:

$$(1)\qquad \sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin\varphi, \quad \cos(2\varphi_1 - \varphi) = \Delta\varphi,$$

weil die Summe der Quadrate ihrer rechten Seiten gleich Eins ist. Dabei ist φ_1 eine stetige Funktion von φ und verschwindet mit φ, denn wir können, weil $\Delta\varphi > 0$ ist, vorschreiben, *daß* $2\varphi_1 - \varphi$ *zwischen* $-\frac{1}{2}\pi$ *und* $+\frac{1}{2}\pi$ *liege.* Variiert φ von 0 bis $+\infty$, so gilt dasselbe von φ_1, ebenso wenn φ von 0 bis $-\infty$ variiert. Wird umgekehrt φ_1 gegeben, so gibt es also, wenn wir vorschreiben, daß $2\varphi_1 - \varphi$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen soll, auch nur einen zugehörigen Winkel φ. Es ist daher auch φ eine stetige Funktion von φ_1. Insbesondere gehört zu $\varphi = \pi$ der Wert $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$.

Multiplizieren wir die Gleichungen (1) mit $-\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ oder mit $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ und addieren sie alsdann jedesmal, so kommt:

$$\cos 2\varphi_1 = \cos\varphi\Delta\varphi - k\sin^2\varphi, \quad \sin 2\varphi_1 = \sin\varphi(k\cos\varphi + \Delta\varphi).$$

Hieraus folgt weiter:

$$(2)\qquad \begin{cases} 2\sin^2\varphi_1 = 1 + k\sin^2\varphi - \cos\varphi\Delta\varphi, \\ 2\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = \sin\varphi(k\cos\varphi + \Delta\varphi), \\ 2\cos^2\varphi_1 = 1 - k\sin^2\varphi + \cos\varphi\Delta\varphi. \end{cases}$$

Ferner ist nach der ersten Gleichung (1):

$$(3)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 2\varphi_1}{k + \cos 2\varphi_1}$$

und

$$(4)\qquad \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1) = \frac{1-k}{1+k}\operatorname{tg}\varphi_1.$$

Setzen wir nun

$$(5)\qquad k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \Delta_1\varphi_1 = \sqrt{1 - k_1^2\sin^2\varphi_1},$$

wo beide Wurzeln *positiv* sein sollen, so liefert die erste Gleichung (2):

$$(\Delta_1\varphi_1)^2 = \left(\frac{k\cos\varphi + \Delta\varphi}{1+k}\right)^2.$$

Nun ist aber

$$(\Delta\varphi)^2 - k^2\cos^2\varphi = 1 - k^2 > 0,$$

so daß also, weil $\Delta\varphi > 0$ ist, *der Ausdruck* $k\cos\varphi + \Delta\varphi$ *stets positiv ist.* Mithin ergibt sich:

$$\Delta_1\varphi_1 = \frac{k\cos\varphi + \Delta\varphi}{1+k}. \tag{6}$$

Setzen wir den hieraus folgenden Wert von $k\cos\varphi + \Delta\varphi$ in die zweite Gleichung (2) ein, so geht eine Formel für $\sin\varphi$ hervor. Aus (3) können wir darauf auch $\cos\varphi$ berechnen. Die letzte Gleichung liefert uns schließlich auch $\Delta\varphi$. So kommt:

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\varphi = \frac{2\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{(1+k)\Delta_1\varphi_1}, \quad \cos\varphi = \frac{1-\frac{2}{1+k}\sin^2\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}, \\ &\Delta\varphi = \frac{1-\frac{2k}{1+k}\sin^2\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Differentiation der ersten Gleichung (1) gibt mit Rücksicht auf die zweite:

$$\frac{2\,d\varphi_1}{k\cos\varphi + \Delta\varphi} = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

oder nach (6):

$$\frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{1+k}{2}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}. \tag{8}$$

Weil φ_1 mit φ verschwindet, folgt hieraus:

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{1+k}{2}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}. \tag{9}$$

Benutzen wir die in Nr. 546 eingeführte Bezeichnung (6), so gibt (9) die von *Legendre* aufgestellte *Transformationsgleichung:*

$$F(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k}{2}F(k, \varphi). \tag{10}$$

Dabei bestehen zwischen φ und φ_1 die Beziehungen (1), während k_1 den in (5) angegebenen Wert hat.

Vermöge dieser Formel wird ein elliptisches Normalintegral erster Gattung durch ein elliptisches Normalintegral erster Gattung mit anderem Modul ausgedrückt.

Insbesondere setzen wir noch $\varphi = \pi$. Da

$$F(k, \pi) = \int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2F(k, \tfrac{1}{2}\pi)$$

ist und φ_1 für $\varphi = \pi$ den Wert $\frac{1}{2}\pi$ hat, so liefert (10):

(11) $$F(k_1, \tfrac{1}{2}\pi) = (1 + k)F(k, \tfrac{1}{2}\pi)$$

oder, wenn wir die Bezeichnungen (3) in Nr. 547 benutzen:

(12) $$F_1(k_1) = (1 + k)F_1(k).$$

549. Reduktion von $F(k, \varphi)$. Indem wir die Transformationsgleichung (10) wiederholt benutzen, können wir ein elliptisches Normalintegral erster Gattung auf ein anderes zurückführen, dessen Modul der Null oder der Eins beliebig nahe kommt. Zwischen k und k_1 besteht nämlich die Beziehung

(1) $$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k},$$

aus der folgt

$$\sqrt{1 - k_1^2} = \frac{1 - k}{1 + k},$$

wo die Wurzel positiv ist, weil k zwischen 0 und 1 liegt. Demnach ergibt sich die positive Wurzel:

$$\sqrt{k} = \frac{k_1}{1 + \sqrt{1 - k_1^2}} < k_1.$$

Wenn wir nun in der *Rekursionsformel*

(2) $$k_{i+1} = \frac{2\sqrt{k_i}}{1 + k_i},$$

worin $\sqrt{k_i}$ positiv sein soll, für i alle positiven und negativen ganzen Zahlen setzen, indem wir unter k_0 den Modul k selbst verstehen, so können wir eine beiderseits endlose Zahlenreihe bilden:

(3) $$\ldots\; k_{-2},\; k_{-1},\; k,\; k_1,\; k_2,\; \ldots$$

in der für positiven Index i aus $k_i > \sqrt{k_{i-1}}$ folgt:

$$k_i > \sqrt[2^i]{k},$$

dagegen für negativen Index i aus $k_{-i} < k^2_{-i+1}$ folgt:

$$k_{-i} < k^{2^i}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{i=+\infty} k_i = 1, \qquad \lim_{i=+\infty} k_{-i} = 0.$$

Die Zahlenreihe (3) erstreckt sich also von Null bis Eins. Wählt man i hinreichend groß, so wird k_{-i} beliebig wenig größer als Null und k_i beliebig wenig kleiner als Eins.

Da nun nach (10) in voriger Nummer allgemein für jedes ganzzahlige positive oder negative i

$$(4) \qquad F(k_{i+1},\ \varphi_{i+1}) = \frac{1+k_i}{2} F(k_i,\ \varphi_i)$$

ist, wenn wir außer der Rekursionsformel (2) noch analog den Formeln (1) von Nr. 548 festsetzen, daß

$$(5) \quad \begin{cases} \sin(2\varphi_{i+1} - \varphi_i) = k_i \sin\varphi_i, \quad \cos(2\varphi_{i+1} - \varphi_i) = \Delta_i\varphi_i, \\ \Delta_i\varphi_i = \sqrt{1 - k_i^2 \sin^2\varphi_i} \end{cases}$$

sein und $2\varphi_{i+1} - \varphi_i$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen soll, so erkennen wir, *daß sich jedes elliptische Normalintegral erster Gattung $F(k, \varphi)$ durch ein anderes $F(k_{-i}, \varphi_{-i})$ oder $F(k_i, \varphi_i)$ ausdrücken läßt, in dem der Modul k_{-i} beliebig wenig von Null bzw. der Modul k_i beliebig wenig von Eins abweicht.*

Wenden wir dies Ergebnis z. B. auf $F(k, \frac{1}{2}\pi)$ oder also auf $F_1(k)$ an, so folgt aus (12) in voriger Nummer:

$$(6) \qquad F_1(k_{i+1}) = (1 + k_i) F_1(k_i),$$

mithin:

$$\begin{aligned} F_1(k) &= (1 + k_{-1}) F_1(k_{-1}) \\ &= (1 + k_{-1})(1 + k_{-2}) F_1(k_{-2}) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (1 + k_{-1})(1 + k_{-2})(1 + k_{-3}) \cdots (1 + k_{-i}) F_1(k_{-i}). \end{aligned}$$

Weil nun k_{-i} für $\lim i = +\infty$ nach Null und folglich

$$F_1(k_{-i}) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_{-i}^2 \sin^2\varphi}}$$

nach $\frac{1}{2}\pi$ strebt, so geht die folgende bemerkenswerte Entwicklung von $F_1(k)$ in ein unendliches Produkt hervor:

$$(7) \qquad F_1(k) = \tfrac{1}{2}\pi(1 + k_{-1})(1 + k_{-2})(1 + k_{-3}) \cdots.$$

Die gewonnene Reduktion eines elliptischen Normalintegrals erster Gattung auf ein solches, dessen Modul beliebig wenig größer als Null ist, gestattet uns nach (2) in Nr. 547 die

Entwicklung von $F(k, \varphi)$ in eine unendliche Reihe, in der statt der Potenzen von k Potenzen eines Moduls stehen, der so wenig von Null abweicht, als man will, so daß wir zu einer schnell konvergierenden Reihe gelangen.

550. Reduktion von $E(k, \varphi)$. Aus der Gleichung (8) von Nr. 548 folgt durch Multiplikation mit $\sin^2\varphi_1$ und Anwendung der ersten Gleichung (2) von Nr. 548:

$$\frac{\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \tfrac{1}{4}k(1+k)\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} + \tfrac{1}{4}(1+k)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \tfrac{1}{4}(1+k)\cos\varphi\, d\varphi$$

und hieraus durch Integration:

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \tfrac{1}{4}k(1+k)\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} + \tfrac{1}{4}(1+k)F(k, \varphi)$$
$$- \tfrac{1}{4}(1+k)\sin\varphi,$$

also nach (8) in Nr. 546 mit Rücksicht auf (5) und (10) in Nr. 548:

(1) $\quad (1+k)E(k_1, \varphi_1) = E(k, \varphi) - \frac{1-k^2}{2}F(k, \varphi) + k\sin\varphi.$

Da $k < k_1{}^2$ ist, so zeigt diese Formel, daß sich auch $E(k_1, \varphi_1)$ auf elliptische Integrale reduzieren läßt, in denen der Modul k näher bei Null liegt, und durch wiederholte Anwendung dieser Reduktion läßt sich der Wert des Moduls beliebig nahe an Null heranbringen.

551. Die Landensche Transformation. Die zuletzt abgeleitete Formel (1) hat eine merkwürdige geometrische Bedeutung. Aus ihr folgt nämlich nach (9) in Nr. 546, wenn s_e und s_h wie in Nr. 546 den Ellipsen- und Hyperbelbogen bezeichnen und s_{e_1} und s_{h_1} die entsprechende Bedeutung bei derjenigen Ellipse bzw. Hyperbel haben, bei der k durch k_1 und φ durch φ_1 ersetzt ist:

(1) $\qquad s_h = s_e - 2(1+k)\, s_{e_1} + 2k\sin\varphi + \operatorname{tg}\varphi\, \Delta\varphi.$

Jeder Hyperbelbogen läßt sich also durch zwei Ellipsenbogen ausdrücken. Man kann aus den entwickelten Gleichungen auch leicht erkennen, *daß sich jeder Ellipsenbogen durch zwei Hyperbelbogen ausdrücken läßt.*

Diese Beziehungen wurden vor der Entwicklung einer eigentlichen Theorie der elliptischen Integrale schon von *Landen* gefunden und sind unter dem Namen der *Landenschen Transformation* bekannt. Andere hierhergehörende Sätze fanden *Fagnano*, *Euler* und schließlich *Legendre*.

552. Eine Beziehung zwischen den Umfängen dreier Ellipsen. Wir wollen hier noch ein von *Legendre* herrührendes Ergebnis ableiten: Wird in (1), Nr. 550, $\varphi = \pi$, also $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$ (vgl. Nr. 548) gesetzt, so kommt:

$$(1) \qquad (1 + k)\, E_1(k_1) = 2\, E_1(k) - (1 - k^2)\, F_1(k).$$

Gehen wir von den elliptischen Integralen, die zu k und k_1 gehören, zu den beiden zurück, die zu k_{-1} und k gehören (vgl. Nr. 549), so kommt ebenso:

$$(1 + k_{-1})\, E_1(k) = 2\, E_1(k_{-1}) - (1 - k_{-1}^2)\, F_1(k_{-1}).$$

Da aber nach (6) und (2) in Nr. 549

$$F_1(k_{-1}) = \frac{F_1(k)}{1 + k_{-1}}, \qquad k_{-1} = \frac{2 - k^2 - 2\sqrt{1 - k^2}}{k^2}$$

ist, so geht die letzte Gleichung über in:

$$\sqrt{1 - k^2}\, E_1(k) = \sqrt{1 - k^2}\,(1 + \sqrt{1 - k^2})\, E_1(k_{-1}) - (1 - k^2)\, F_1(k).$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von (1) fällt $F_1(k)$ heraus, und es bleibt:

$$(2) \qquad \sqrt{1 - k^2}\,(1 + \sqrt{1 - k^2}) E_1(k_{-1}) + (1 + k)\, E_1(k_1) = (2 + \sqrt{1 - k^2})\, E_1(k).$$

Es sind aber $E_1(k_{-1})$, $E_1(k)$ und $E_1(k_1)$ die Längen der Quadranten dreier Ellipsen, mit der großen Halbachse Eins und den Exzentrizitäten k_{-1}, k und k_1, nach Nr. 547. Also enthält die Gleichung (2) einen Satz über die Umfänge dieser drei Ellipsen.

Wenn wir mittels der Rekursionsformel (2) von Nr. 549 die nach beiden Seiten endlose Zahlenreihe $\cdots k_{-2}, k_{-1}, k, k_1, k_2, \cdots$ bilden und mit U_i den Umfang derjenigen Ellipse bezeichnen, deren große Halbachse gleich Eins und deren Exzentrizität gleich k_i ist, so gilt analog (2) die Beziehung:

$$(3) \quad \sqrt{1 - k_i^2}\,(1 + \sqrt{1 - k_i^2})\, U_{i-1} + (1 + k_i)\, U_{i+1} = (2 + \sqrt{1 - k_i^2})\, U_i.$$

553. Rektifikation der Lemniskate. Diese Kurve hat in Polarkoordinaten ω, ϱ nach dem 2. Beispiele, Nr. 534, die Gleichung

(1) $$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\omega.$$

Hieraus folgt:

$$\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 = \frac{2a^2}{\cos 2\omega},$$

also nach (1) in Nr. 545 für das Bogendifferential:

$$ds = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\omega}}\, d\omega.$$

Die Wurzeln sind ebenso wie a positiv. Da ϱ für $\omega = \pm\frac{1}{4}\pi$ gleich Null wird, so beschränken wir ω auf das Intervall von $-\frac{1}{4}\pi$ bis $+\frac{1}{4}\pi$, betrachten also nur die rechte Schleife der Lemniskate, siehe Fig. 29, S. 269. Die von 0 bis ω erstreckte Bogenlänge:

$$s = \int_0^\omega \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\omega}}\, d\omega$$

läßt sich leicht durch ein elliptisches Integral ausdrücken. Führen wir nämlich vermöge der Substitution

(2) $$\sin\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi$$

einen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegenen Winkel φ als neue unabhängige Veränderliche ein, so kommt:

$$s = a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

d. h. *der Lemniskatenbogen ist ein elliptisches Normalintegral erster Gattung mit dem Modul* $1:\sqrt{2}$ (nach Nr. 448).

554. Rektifikation der zweiteiligen Cassinischen Kurve. Die Lemniskate ist ein besonderer Fall der *Cassinischen Kurve*, nämlich des geometrischen Ortes derjenigen Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 ein konstantes Produkt b^2 haben. Dabei sei $2a$ die Entfernung der beiden festen Punkte voneinander. Ist insbesondere $b = a$, so liegt eine Lemniskate vor.

Benutzen wir die Mitte O von F_1F_2 als Pol der Polarkoordinaten ω, ϱ und OF_1 als Anfangsstrahl, so hat die Cassinische Kurve die Gleichung:

(1) $$\varrho^4 - 2a^2\varrho^2 \cos 2\omega + a^4 = b^4.$$

Ist $b < a$, so zerfällt die Kurve in zwei symmetrische Ovale, von denen jedes einen der beiden festen Punkte umschließt, siehe Fig. 43; und wir wollen in dieser Nummer bei der Annahme $b < a$ bleiben. Es gibt dann einen gewissen Winkel α zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$, für den b^2 gleich $a^2 \sin 2\alpha$ ist. Setzen wir diesen Wert von b^2 in (1) ein, so kommt:

(2) $$\varrho^2 = a^2\left(\cos 2\omega \pm \sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}\right).$$

Hiernach gehören zu jedem Werte von ω zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ *zwei positive* Werte von ϱ. Sie liefern Punkte des rechten Ovals. Wird ω zwischen α und $\frac{1}{2}\pi$ oder zwischen $-\alpha$ und $-\frac{1}{2}\pi$ gewählt, so wird ϱ^2 imaginär. Für $\omega = \alpha$ und ebenso für $\omega = -\alpha$ fallen die beiden Werte von ϱ zusammen. Daher sind α und $-\alpha$ die Winkel, die von der Geraden OF_1 mit den beiden von O aus an das Oval gehenden Tangenten gebildet werden. Es ergeben sich alle Punkte dieses Ovals, wenn wir ω auf das Intervall von $-\alpha$ bis $+\alpha$ beschränken.

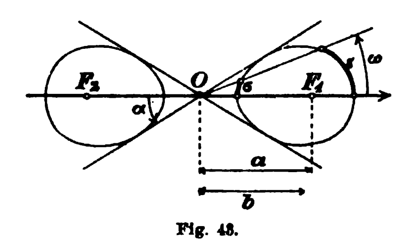


Fig. 43.

Zu jedem solchen Werte von ω gehören zwei Bogenstücke s und σ der Kurve im Intervalle von 0 bis ω. Es sei s das äußere, σ das innere. Beide werden positiv im Sinne wachsender Werte von ω gerechnet; jedes einzelne darf also höchstens bis $\omega = \alpha$ oder $\omega = -\alpha$ erstreckt werden. Nach (1) in Nr. 545 ist:

$$s = a \sin 2\alpha \int_0^\omega \frac{\sqrt{\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}\, d\omega,$$

$$\sigma = a \sin 2\alpha \int_0^\omega \frac{\sqrt{\cos 2\omega - \sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}\, d\omega,$$

so daß sich ergibt:

(3) $$s + \sigma = a\sqrt{2}\sin 2\alpha \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega - \cos 2\alpha}},$$

(4) $$s - \sigma = a\sqrt{2}\sin 2\alpha \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega + \cos 2\alpha}}.$$

In diesen Formeln sind alle Wurzeln positiv.

Es gibt nun einen Winkel φ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ derart, daß

(5) $$\sin\omega = \sin\alpha \sin\varphi$$

ist, weil ω zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ gelegen ist. Weil α zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$ liegt, gibt es ferner einen Winkel ψ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ derart, daß

(6) $$\sin\omega = \cos\alpha \sin\psi$$

ist. In die Formel (3) führen wir vermöge (5) die neue Veränderliche φ und in die Formel (4) vermöge (6) die neue Veränderliche ψ ein. Alsdann kommt:

(7) $$\begin{cases} s + \sigma = a\sin 2\alpha \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}}, \\ s - \sigma = a\sin 2\alpha \displaystyle\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \sin^2\psi}}. \end{cases}$$

Hierfür können wir nach (6) in Nr. 546 schreiben

(8) $$F(\sin\alpha, \varphi) = \frac{s + \sigma}{a\sin 2\alpha}, \quad F(\cos\alpha, \psi) = \frac{s - \sigma}{a\sin 2\alpha}.$$

Jedes elliptische Normalintegral erster Gattung $F(k, \varphi)$ oder $F(k, \psi)$ ist daher, welchen Wert sein Modul k auch haben mag, ausdrückbar durch die Summe oder Differenz zweier zwischen denselben Strahlen gelegener Bogen des einen Ovals einer zweiteiligen Cassinischen Kurve. Da ferner

(9) $$\begin{cases} s = \frac{1}{2}a\sin 2\alpha \cdot [F(\sin\alpha, \varphi) + F(\cos\alpha, \psi)], \\ \sigma = \frac{1}{2}a\sin 2\alpha \cdot [F(\sin\alpha, \varphi) - F(\cos\alpha, \psi)] \end{cases}$$

ist, so läßt sich jeder Bogen dieses Ovals, der am Strahle OF_1 beginnt, durch die Summe oder Differenz zweier elliptischer

Normalintegrale ausdrücken, deren Moduln $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ sind, so daß die Summe der Quadrate der Moduln gleich Eins ist.

Ist S die Summe der Umfänge beider Ovale der Cassinischen Kurve, so ist $S = 4(s + \sigma)$, wenn wir φ in der ersten Formel (7) gleich $\frac{1}{2}\pi$ wählen, also nach der Bezeichnung (3) von Nr. 547:

(10) $$S = 4\,a \sin 2\,\alpha\, F_1(\sin\alpha).$$

555. Rektifikation der geschlossenen Cassinischen Kurve. Wir setzen jetzt voraus, daß $b > a$ sei. Alsdann ist die Cassinische Kurve eine einzige, beide feste Punkte F_1 und F_2 umschließende Kurve, siehe Fig. 44. Es gibt jetzt einen zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$ gelegenen Winkel α derart, daß a^2 gleich $b^2 \sin 2\alpha$ ist, und aus (1) in voriger Nummer folgt:

(1) $$\varrho^2 = b^2 \sin 2\alpha\left(\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}\right).$$

Hier ist aber nunmehr die Wurzel ausschließlich positiv anzunehmen, denn wenn sie negativ wäre, so würde $\varrho^2 < 0$ sein. Der zu ω gehörige Radiusvektor ϱ soll, wie immer, positiv angenommen werden (vgl. Nr. 203).

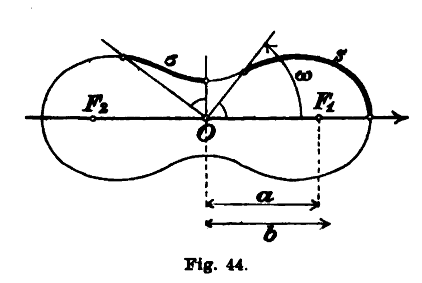


Fig. 44.

Geben wir ω einen bestimmten Wert, so möge s den zum Intervalle von 0 bis ω gehörigen Bogen bezeichnen, dagegen σ den zum Intervalle von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\omega + \frac{1}{2}\pi$ gehörigen Bogen, also denjenigen Bogen, dessen Begrenzungsstrahlen aus denen des Bogens s durch positive Drehung um einen rechten Winkel hervorgehen. Beide Bogen s und σ werden im Sinne wachsender Werte der Amplitude positiv gerechnet. Alsdann folgt aus (1) in Nr. 545:

$$s = \frac{a}{\sin 2\,\alpha}\int_0^{\omega} \frac{\sqrt{\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}}\,d\omega,$$

$$\sigma = \frac{a}{\sin 2\,\alpha}\int_0^{\omega} \frac{\sqrt{-\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}}\,d\omega$$

und weiterhin:

$$(2)\qquad s+\sigma=\frac{a\sqrt{2}}{\sin 2\alpha}\int\limits_0^{\omega}\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}2\alpha+\sqrt{\cos^2 2\omega+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}}\,d\omega,$$

$$(3)\qquad s-\sigma=\frac{a\sqrt{2}}{\sin 2\alpha}\int\limits_0^{\omega}\frac{\sqrt{-\operatorname{ctg}2\alpha+\sqrt{\cos^2 2\omega+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}}\,d\omega.$$

Alle Wurzeln sind hierbei positiv.

Wir können ω auf das Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ beschränken. Da ferner α zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$ liegt, so gibt es im Intervalle von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ solche Winkel φ und ψ, für die

$$(4)\qquad \sqrt{\cos^2 2\omega+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}=\frac{1-2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{\sin 2\alpha},$$

$$(5)\qquad \sqrt{\cos^2 2\omega+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}=\frac{1-2\cos^2\alpha\sin^2\psi}{\sin 2\alpha}$$

ist. Substituieren wir die neue Veränderliche φ in (2) und die neue Veränderliche ψ in (3), so kommt:

$$(6)\qquad \begin{cases} s+\sigma=b\displaystyle\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}},\\[2ex] s-\sigma=b\displaystyle\int\limits_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\sin^2\psi}},\end{cases}$$

wobei die Wurzeln positiv sind. Übrigens lassen sich die Definitionsgleichungen (4) und (5) für φ und ψ vereinfachen. Bedeutet nämlich ω' den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegenen Winkel, für den

$$\sin 2\omega'=\sin 2\alpha\sin 2\omega$$

ist, so nehmen sie die Form an:

$$(7)\qquad \sin\omega'=\sin\alpha\sin\varphi,\qquad \sin\omega'=\cos\alpha\sin\psi,$$

so daß die Analogie mit (5) und (6) in voriger Nummer auffällt. Nach (6) in Nr. 546 können wir die Formeln (6) so schreiben:

$$(8)\qquad F(\sin\alpha,\,\varphi)=\frac{s+\sigma}{b},\qquad F(\cos\alpha,\,\psi)=\frac{s-\sigma}{b}.$$

Dann lassen sich ebensolche Schlüsse wie in voriger Nummer machen.

Für $\omega = \frac{1}{4}\pi$ ist $s + \sigma$ der Bogen eines Quadranten der Cassinischen Kurve. Alsdann ist φ nach (4) gleich $\frac{1}{2}\pi$, so daß

(9) $$S = 4b\,F_1(\sin\alpha)$$

der gesamte Umfang der Kurve ist.

556. Andere Verallgemeinerung der Lemniskate. Daß nicht nur die Lemniskate, sondern allgemeiner jede Cassinische Kurve mittels elliptischer Integrale rektifizierbar ist, erkannte zuerst *A. Serret.* Von ihm rührt auch die Entdeckung einer ausgedehnten anderen Familie von Kurven her, die als speziellen Fall die Lemniskate enthält, und bei der die Rektifikation in analoger Weise zu elliptischen Integralen führt. Die einfachsten Kurven von dieser neuen Art lassen sich geometrisch wie folgt definieren:

Es seien $OP = a$ und $PM = b$ zwei gegebene und in P gegeneinander bewegliche Strecken; der Endpunkt O sei fest. Der Punkt M soll sich so bewegen, daß seine Tangente durch den Mittelpunkt K desjenigen Kreises geht, der dem beweglichen Dreiecke OPM umschrieben ist. Siehe Fig. 45.

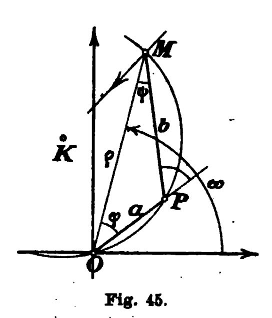


Fig. 45.

Wir wählen O zum Anfangspunkte und benutzen für den Kurvenpunkt M sowohl rechtwinklige Koordinaten x, y als auch die zugehörigen Polarkoordinaten ω, ϱ. Als unabhängige Veränderliche wollen wir den Winkel φ wählen, den das bewegliche Dreieck OPM an der festen Ecke O hat. Alsdann ist

(1) $$\varrho^2 + a^2 - 2\varrho a\cos\varphi = b^2,$$

d. h.

(2) $$\varrho = a\cos\varphi + b\Delta\varphi.$$

wenn

(3) $$\Delta\varphi = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi}$$

gesetzt wird. Diese Wurzel kann sowohl positiv als auch negativ sein. Ferner ist $x = \varrho\cos\omega$ und $y = \varrho\sin\omega$, während

der Punkt P die Koordinaten $a\cos(\omega-\varphi)$ und $a\sin(\omega-\varphi)$ hat. Sind nun $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Koordinaten des Mittelpunktes K des Kreises durch O, P und M, so folgt daraus, daß dieser Punkt auf den Mittelsenkrechten von a und ϱ liegen muß, sofort:

$$\mathfrak{x}\cos(\omega-\varphi)+\mathfrak{y}\sin(\omega-\varphi)=\tfrac{1}{2}a,$$
$$\mathfrak{x}\cos\omega+\mathfrak{y}\sin\omega=\tfrac{1}{2}\varrho,$$

d. h.

(4) $$\frac{\mathfrak{y}-y}{\mathfrak{x}-x}=-\frac{a\cos\omega-\varrho\cos(\omega+\varphi)}{a\sin\omega-\varrho\sin(\omega+\varphi)}.$$

Andrerseits folgt aus

$$x=\varrho\cos\omega,\qquad y=\varrho\sin\omega,$$

weil ϱ und ω als Funktionen von φ aufzufassen sind:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varrho\cos\omega\cdot\omega'+\sin\omega\cdot\varrho'}{\varrho\sin\omega\cdot\omega'-\cos\omega\cdot\varrho'}.$$

Da verlangt wird, daß die Kurventangente nach dem Punkte K gehen soll, so muß dieser Wert gleich dem Werte (4) sein. Hieraus ergibt sich:

$$(a-\varrho\cos\varphi)\,\varrho'=\varrho^2\sin\varphi\cdot\omega'.$$

Nach (2) und (3) ist aber:

(5) $$\varrho'=-\frac{a\varrho\sin\varphi}{b\Delta\varphi},$$

so daß kommt:

(6) $$\omega'=\frac{a(\varrho\cos\varphi-a)}{b\varrho\Delta\varphi}\cdot$$

oder, wenn wir ϱ aus (2) einsetzen und den Bruch umformen:

$$\omega'=\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{ab}{a^2-b^2}\,\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Nun ist aber:

$$\int\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}=\int\frac{d(\sin\varphi)}{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi}}=\frac{b}{a}\arcsin\left(\frac{a}{b}\sin\varphi\right),$$

so daß sich ergibt:

(7) $$\omega=\frac{a^2}{a^2-b^2}\,\varphi-\frac{b^2}{a^2-b^2}\arcsin\left(\frac{a}{b}\sin\varphi\right)\cdot$$

Die additive Konstante durften wir bei der Integration fortlassen, weil ja die Richtung der x-Achse passend gewählt werden kann.

Die Formel (7) läßt sich, wenn wir den Winkel des veränderlichen Dreiecks OPM an der Ecke M mit ψ bezeichnen, auch so schreiben:

$$(8) \qquad \omega = \frac{a^2}{a^2 - b^2}\varphi - \frac{b^2}{a^2 - b^2}\psi.$$

Die in Rede stehende Kurve kann demnach auch so definiert werden: *Das veränderliche Dreieck OPM mit der festen Ecke O und den konstanten Seitenlängen $OP = a$ und $PM = b$ soll sich so bewegen, daß sich der Winkel ω der veränderlichen Seite $OM = \varrho$ mit einer festen Richtung durch die Dreieckswinkel φ und ψ bei O und M in der Form (8) ausdrückt.* Alsdann beschreibt M die gesuchte Kurve.

Die Gleichungen der Kurve, ausgedrückt mittels der Hilfsveränderlichen φ, gehen sofort hervor, wenn wir in $\varrho \cos\omega$ und $\varrho \sin\omega$ die Werte (2) und (7) einsetzen:

$$(9)\begin{cases} x = (a\cos\varphi + b\varDelta\varphi)\cos\left[\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\varphi - \dfrac{b^2}{a^2-b^2}\arcsin\left(\dfrac{a}{b}\sin\varphi\right)\right], \\ y = (a\cos\varphi + b\varDelta\varphi)\sin\left[\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\varphi - \dfrac{b^2}{a^2-b^2}\arcsin\left(\dfrac{a}{b}\sin\varphi\right)\right]. \end{cases}$$

Andrerseits geben (2) und (7) zusammen die Darstellung der Kurve in Polarkoordinaten.

Nach (1) in Nr. 545 ist das Quadrat der Ableitung der Bogenlänge s der Kurve nach der Veränderlichen φ gegeben durch:

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \varrho^2\omega'^2 + \varrho'^2.$$

Setzen wir hierin die Werte (5) und (6) ein und berücksichtigen wir die Formel (1), so kommt:

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{a}{\varDelta\varphi}\right)^2.$$

Messen wir den Bogen von $\varphi = 0$ an positiv im Sinne wachsender Werte von φ, so ist also:

$$(10) \qquad s = \pm a\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = \pm a\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi}},$$

wobei das Plus- oder Minuszeichen zu wählen ist, je nachdem $\varDelta\varphi$ positiv oder negativ angenommen wurde. Ist $a < b$, so

ist hiermit s durch ein *elliptisches Normalintegral erster Gattung mit dem Modul* $a:b$ dargestellt.

Ist dagegen $a > b$, so führen wir statt φ den vorhin erwähnten Winkel ψ als unabhängige Veränderliche ein. Es ist nämlich

$$\sin\varphi = \frac{b}{a}\sin\psi, \qquad \cos\varphi = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\sin^2\psi}, \qquad \varDelta\varphi = \cos\psi,$$

so daß kommt:

$$s = \pm b\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\sin^2\psi}},$$

also ein *elliptisches Normalintegral erster Gattung mit dem Modul* $b:a$.

In der Anfangslage $\varphi = 0$ ist das Dreieck OPM in eine gerade Linie zusammengefallen. Von ihr aus wollen wir den Sektor rechnen, den der Radiusvektor ϱ überstreicht und dessen Fläche der nach (1) in Nr. 532 durch

$$S = \tfrac{1}{2}\int_0^\varphi \varrho^2\omega' d\varphi$$

gegeben wird. Wir bemerken dabei, daß der Inhalt des Dreiecks OPM den Wert

$$D = \tfrac{1}{2}a\varrho\sin\varphi$$

hat, so daß nach (5) und (6)

$$\frac{dD}{d\varphi} = \tfrac{1}{2}\varrho^2\omega'$$

ist, also S dieselbe Ableitung wie D hat. Weil in der Anfangslage auch $D = 0$ ist, so folgt:

$$S = D.$$

Der Sektor, den der Radiusvektor von 0 *bis* ω *überstreicht, ist also gerade so groß wie die Fläche des zu* ω *gehörigen Dreiecks* OPM.

Wenn insbesondere $b = a\sqrt{2}$ ist, so findet man, daß die Kurve die in Nr. 553 betrachtete *Lemniskate* ist; jedoch ist dabei der Anfangspunkt in einen der beiden festen Punkte (vgl.

2. Beispiel, Nr. 534) verlegt. Die Kurve, die wir betrachten, ist demnach in der Tat eine *Verallgemeinerung der Lemniskate.*

Die übersichtlichste Darstellung der Kurve geht aus (2) und (8) hervor, wenn wir ϱ und ω durch die beiden Veränderlichen φ und ψ ausdrücken:

$$\varrho = a\cos\varphi + b\cos\psi, \quad \omega = \frac{a^2}{a^2-b^2}\varphi + \frac{b^2}{b^2-a^2}\psi, \tag{11}$$

wobei dann zwischen φ und ψ die Beziehung besteht:

$$a\sin\varphi - b\sin\psi = 0. \tag{12}$$

Quadrieren wir die erste Formel (11) und die Formel (12) und addieren sie dann, so kommt:

$$\varrho = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos t}, \tag{13}$$

wenn $\varphi + \psi = t$ gesetzt wird. Außerdem gibt (12), wenn darin $t - \varphi$ statt ψ eingesetzt wird:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b\sin t}{a+b\cos t},$$

so daß aus der zweiten Gleichung (11) folgt:

$$\omega = \frac{b^2}{b^2-a^2}t + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{b\sin t}{a+b\cos t}. \tag{14}$$

In (13) und (14) liegt eine neue Darstellung der Kurve vor, indem die Polarkoordinaten ϱ und ω darin als Funktionen der Veränderlichen t gegeben werden. Dabei bedeutet $t = \varphi + \psi$ den Außenwinkel des Dreiecks OPM bei P. Die Bogenlänge stellt sich jetzt nach (10) so dar:

$$s = \int_0^t \frac{ab\,dt}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos t}}.$$

Führen wir den halben Winkel t als neue Veränderliche τ ein, so kommt:

$$s = \frac{2ab}{a+b}\int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2\tau}},$$

so daß die Bogenlänge abermals durch ein elliptisches Normalintegral erster Gattung dargestellt ist, dessen Modul jetzt aber $2\sqrt{ab} : (a+b)$ ist. Dieser Modul ist stets zwischen 0 und 1 gelegen, ob nun a oder b die längere von beiden Strecken ist.

Im Falle $a = b$, in dem der größte Teil der aufgestellten Formeln versagt, geht eine Kurve hervor, die sich in Polarkoordinaten ω, ϱ so schreiben läßt:

$$\omega = \arccos \frac{\varrho}{2a} - \frac{\sqrt{4a^2 - \varrho^2}}{2\varrho}$$

oder auch mit Hilfe der Veränderlichen φ so:

$$\varrho = 2a \cos \varphi, \qquad \omega = \varphi - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Der Anfangspunkt ist ein asymptotischer Punkt der Kurve (vgl. Nr. 246), und die Kurve verläuft vollständig innerhalb des Kreises um den Anfangspunkt mit dem Radius $2a$.

Auch im allgemeinen Falle $a \neq b$ ist ϱ natürlich nie größer als $a + b$. Man kann insbesondere a und b so wählen, daß sich eine *algebraische* Kurve ergibt, nämlich wenn man

$$a = c\sqrt{n}, \qquad b = c\sqrt{n+1}$$

setzt, wo n eine ganze positive Zahl bedeuten soll. Wir gehen hierauf jedoch nicht näher ein. Daß sich insbesondere für $n = 1$ die *Lemniskate* ergibt, wissen wir schon.

§ 5. Durch Kreisbogen rektifizierbare rationale Kurven.

557. Umkehrung der Aufgabe der Rektifikation. Sind die Koordinaten x, y der Punkte einer Kurve als Funktionen einer Hilfsveränderlichen t gegeben:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

so ist die von $t = 0$ an gerechnete Bogenlänge s der Kurve nach Nr. 543 bestimmt durch die Formel:

$$s = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Da jedoch die Auswertung dieses Integrals wegen der vorkommenden Quadratwurzel allgemein geredet sehr schwierig ist, so daß die Ausführung der Rektifikation nur bei einer geringen Anzahl von vorgelegten Kurven möglich ist, wird man die Stellung der Aufgabe nach dem Vorgange von *Euler* so umkehren:

Nicht die Kurve sei gegeben, sondern die Bogenlänge s als Funktion der Hilfsveränderlichen t. Alsdann sollen x und y so als Funktionen von t bestimmt werden, daß

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \tag{1}$$

ist. Da hier *zwei* Funktionen x und y von t gesucht werden, die nur einer Bedingung (1) genügen sollen, so kann man noch beschränkende Voraussetzungen treffen, z. B. die, daß x und y *rationale* Funktionen von t sein sollen. Eine Kurve, deren Koordinaten x und y rationale Funktionen einer Hilfsveränderlichen sind, heißen *rationale Kurven*; man erkennt leicht, daß alle rationale Kurven algebraisch (Nr. 187) sind. Ein Problem, das rationale Kurven betrifft, soll im folgenden behandelt werden.

558. Die Serretschen Kurven. *A. Serret* stellte und löste eine Aufgabe, die für die einfachsten Fälle schon von *Euler* behandelt worden war, nämlich diese:

Es sollen die rechtwinkligen Koordinaten x und y der Punkte einer Kurve als rationale Funktionen einer Hilfsveränderlichen t so bestimmt werden, daß die von $t = 0$ an gerechnete Bogenlänge s gleich demjenigen Bogen eines Kreises ist, dessen Zentriwinkel den Wert t zum Tangens hat.

Ist k der Kreisradius, so soll also

$$s = k \operatorname{arc\,tg} t \tag{1}$$

sein. Daß sich diese Aufgabe lösen läßt, beruht auf dem Umstande, daß hier

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{k}{1+t^2}\right)^2 = \frac{k}{(t+i)^2} \cdot \frac{k}{(t-i)^2}$$

ist, während auch

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt} - i\frac{dy}{dt}\right)$$

ist, so daß sich im vorliegenden Falle beide Seiten der Gleichung (1) der vorigen Nummer in zwei Faktoren zerlegen lassen. Es folgt nämlich hieraus:

$$\left[\frac{(t+i)^2}{k}\frac{d(x+iy)}{dt}\right]\left[\frac{(t-i)^2}{k}\frac{d(x-iy)}{dt}\right] = 1. \tag{2}$$

Da x und y rationale Funktionen von t sein sollen, gilt dasselbe von $x+iy$ und $x-iy$ und von ihren Ableitungen nach t, also auch von den beiden in (2) links stehenden Faktoren. Nach Nr. 378 können wir daher den ersten Faktor in der Form annehmen:

$$c\frac{(t-a_0)^{\alpha_0}(t-a_1)^{\alpha_1}\ldots(t-a_n)^{\alpha_n}}{(t-b_0)^{\beta_0}(t-b_1)^{\beta_1}\ldots(t-b_m)^{\beta_m}}$$

wo c eine Konstante ist und alle $n+m+2$ Konstanten a_0, a_1, $\ldots a_n$, b_0, b_1, $\ldots b_m$ voneinander verschieden sind, während α_0, α_1, $\ldots \alpha_n$, β_0, β_1, $\ldots \beta_m$ positive ganze Zahlen bedeuten. Der zweite Faktor der linken Seite von (2) ist der hierzu reziproke Wert. Also folgt:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d(x+iy)}{dt}=\dfrac{kc}{(t+i)^2}\dfrac{(t-a_0)^{\alpha_0}(t-a_1)^{\alpha_1}\ldots(t-a_n)^{\alpha_n}}{(t-b_0)^{\beta_0}(t-b_1)^{\beta_1}\ldots(t-b_m)^{\beta_m}}, \\ \dfrac{d(x-iy)}{dt}=\dfrac{k}{c(t-i)^2}\dfrac{(t-b_0)^{\beta_0}(t-b_1)^{\beta_1}\ldots(t-b_m)^{\beta_m}}{(t-a_0)^{\alpha_0}(t-a_1)^{\alpha_1}\ldots(t-a_n)^{\alpha_n}}. \end{cases}$$

Da die linke Seite der einen Gleichung in die der andern übergeht, wenn i durch $-i$ ersetzt wird, müssen wir dasselbe von den rechten Seiten verlangen. Hieraus schließen wir *erstens*, daß $1:c$ zu c konjugiert komplex ist, woraus nach Nr. 373 ohne Mühe folgt, daß c die Form $e^{i\lambda}$ hat, wobei λ eine *reelle* Konstante bedeutet. *Zweitens* folgern wir, daß jede der Zahlen a_0, a_1, $\ldots a_n$ zu einer der Zahlen b_0, b_1, $\ldots b_m$ konjugiert komplex sein muß und umgekehrt, so daß also $m=n$ ist und z. B. b_0 zu a_0, b_1 zu a_1, $\ldots b_n$ zu a_n konjugiert komplex sein mag. Hieraus folgt *drittens* noch, daß $\alpha_0=\beta_0$, $\alpha_1=\beta_1$, $\ldots \alpha_n=\beta_n$ sein muß. Wir haben also jetzt:

$$(4)\qquad \frac{d(x+iy)}{dt}=\frac{ke^{i\lambda}}{(t+i)^2}\frac{(t-a_0)^{\alpha_0}(t-a_1)^{\alpha_1}\ldots(t-a_n)^{\alpha_n}}{(t-b_0)^{\alpha_0}(t-b_1)^{\alpha_1}\ldots(t-b_n)^{\alpha_n}},$$

wobei b_0 zu a_0, b_1 zu a_1, $\ldots b_n$ zu a_n konjugiert komplex ist.

Es ist nun zu beachten, daß zwar a_0, a_1, $\ldots a_n$, b_0, b_1, $\ldots b_n$ voneinander verschieden sind, jedoch der Faktor $t+i$, der im Nenner vorkommt, sehr wohl auch im Zähler auftreten kann. Wir wollen daher, um den allgemeinsten Fall zu er-

[558

halten, insbesondere $a_0 = -i$ annehmen, so daß $b_0 = +i$ wird. Alle anderen a und b sind alsdann von i und $-i$ verschieden.

Es soll $x + iy$ eine rationale Funktion von t sein. In Nr. 431 wurden die Bedingungen dafür gewonnen, daß die Integration einer rational gebrochenen Funktion (4) eine rationale Funktion liefert, und zwar auch für den Fall des Vorkommens komplexer Zahlen (vgl. Nr. 432, 433). Die erste Bedingung war die, daß der Nenner der rationalen Funktion (4) keine einfachen Nullstellen haben darf. Daher sind $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ notwendig ganze Zahlen größer als Eins, wenn sie nicht verschwinden. Wäre $\alpha_0 = 1$, so wäre wegen $b_0 = i$ die Stelle $t = i$ eine einfache Nullstelle des Nenners. Also ist α_0 entweder gleich Null oder eine ganze Zahl größer als Eins. Im zweiten Falle setzen wir $\alpha_0 - 2 = r$, so daß sich ergibt:

$$(5) \qquad \frac{d(x+iy)}{dt} = \frac{k e^{i\lambda}(t+i)^r}{(t-i)^{r+2}} \cdot \frac{(t-a_1)^{\alpha_1} \cdots (t-a_n)^{\alpha_n}}{(t-b_1)^{\alpha_1} \cdots (t-b_n)^{\alpha_n}},$$

im ersten Falle dagegen, wo $\alpha_0 = 0$ ist, führen wir $-t$ als neue unabhängige Veränderliche ein, woraus hervorgeht, daß sich dieser Fall der Annahme (5) für $r = 0$ unterordnet.

In (5) bedeuten k und λ reelle Konstanten, $r, \alpha_1, \cdots \alpha_n$ lauter ganze positive Zahlen, von denen nur r gleich Eins sein darf, während alle anderen von Eins verschieden sind, aber ebenso wie r gleich Null sein dürfen. Ferner sind a_1 und b_1 konjugiert komplexe Konstanten, ebenso a_2 und b_2, usw., schließlich auch a_n und b_n. Überdies sind alle Zahlen $a_1, \cdots a_n, b_1, \cdots b_n$ von einander und von i und $-i$ verschieden. Hierin liegt, nebenbei bemerkt, daß keine der Zahlen $a_1, \cdots a_n, b_1, \cdots b_n$ reell sein darf. Denn wäre z. B. a_1 reell, so wäre b_1, die konjugiert komplexe Zahl, gleich a_1.

559. Die einfachsten Serretschen Kurven. Das auseinandergesetzte Verfahren liefert alle rationalen Kurven, deren Bogenlänge sich in der Form $s = k \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$ darstellen läßt, wo t die Hilfsveränderliche, d. h. die Veränderliche in den rationalen Funktionen bedeutet. Zu jedem Werte von t liefern die Gleichungen der Kurven ohne weiteres die zugehörigen Kurvenpunkte, und der zugehörige Bogen s läßt sich nach der

Formel (1) der letzten Nummer sofort als Bogen eines Kreises vom Radius k darstellen.

Wir wollen jedoch die allgemeine Untersuchung nicht weiter durchführen, sondern nur noch den einfachsten Fall ins Auge fassen.

Werden alle α gleich Null gewählt, so ergibt sich aus (5) in voriger Nummer und aus derjenigen Gleichung, in die (5) übergeht, wenn i durch $-i$ ersetzt wird, ohne Mühe, daß die Kurve ein *Kreis* ist. Am bequemsten ist es dabei, den Bruch $(t+i):(t-i)$ als neue Veränderliche zu benutzen.

Sehen wir hiervon ab, so wird also der einfachste Fall der sein, in dem $n = 1$ gesetzt wird. Dann haben wir

(1) $$\frac{d(x+iy)}{dt} = \frac{ke^{i\lambda}(t+i)^r(t-a)^\alpha}{(t-i)^{r+2}(t-b)^\alpha},$$

wobei die ganze Zahl $\alpha > 1$ ist und a und b konjugiert komplex, aber weder reell noch gleich i oder $-i$ sind. Setzen wir nun:

(2) $$a = p + iq, \quad b = p - iq, \quad \frac{p^2 + (q-1)^2}{p^2 + (q+1)^2} = m$$

und führen wir die neue Veränderliche

(3) $$z = \frac{p+iq-i}{p+iq+i} \cdot \frac{t+i}{t-i}$$

ein, so kommt:

(4) $$\frac{d(x+iy)}{dz} = A\,\frac{z^r(z-1)^\alpha}{(z-m)^\alpha},$$

wobei A eine leicht zu berechnende komplexe Konstante bedeutet, während m nach (2) reell ist.

Da $x+iy$ eine rationale Funktion von t sein soll und nach (3) sowohl z eine rationale Funktion von t als auch t eine rationale Funktion von z ist, so haben wir zu fordern, daß $x+iy$ rational in z sei. Nach (1) in Nr. 431 liefert jedoch die Integration von (4) dann und nur dann eine rationale Funktion von z, wenn $z = m$ eine Wurzel der Gleichung $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades

(5) $$\frac{d^{\alpha-1}z^r(z-1)^\alpha}{dz^{\alpha-1}} = 0,$$

aber weder gleich Null noch gleich Eins ist. Denn für $m = 0$ wäre $a = i$ und für $m = 1$ wäre a reell.

Setzen wir nun für m eine von Null und Eins verschiedene Wurzel der Gleichung (5) in (4) ein, so liefert die Integration für $x + iy$ eine rationale Funktion von z. Darin führen wir alsdann wieder den Wert (3) ein, so daß für $x + iy$ eine rationale Funktion von t mit komplexen Koeffizienten hervorgeht. Wird darin i überall durch $-i$ ersetzt, so geht auch für $x - iy$ eine solche Funktion hervor. Aus beiden ergeben sich schließlich durch Addition bzw. Subtraktion für x und y rationale Funktionen von t mit *reellen* Koeffizienten, so daß damit die Gleichungen der *einfachsten Serretschen Kurven* gefunden sind.

560. Eulersche Kurven. Wenn wir noch spezieller $r = 1$ setzen, so gelangen wir zu Kurven, die schon *Euler* gefunden hat. In diesem Falle gibt die Gleichung (1) der letzten Nummer:

$$(1) \qquad \frac{d(x+iy)}{dt} = \frac{ke^{i\lambda}(t+i)(t-a)^{\alpha}}{(t-i)^{3}(t-b)^{\alpha}},$$

während sich die Gleichung (5) auf die quadratische Gleichung

$$(\alpha - 1)(z-1)^{2} + 2z(z-1) = 0$$

reduziert, die außer $z = 1$ nur die Wurzel:

$$(2) \qquad m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

hat. Setzen wir diesen Wert in der letzten Gleichung (2) der vorigen Nummer ein, so haben wir die drei Gleichungen:

$$(3) \qquad a = p + iq, \quad b = p - iq, \quad p^{2} + q^{2} + 1 = 2\alpha q.$$

Die ganze Zahl α ist größer als Eins zu wählen. Dann sind p und q als solche reelle Zahlen zu wählen, die der letzten Gleichung genügen, so daß die beiden ersten Gleichungen a und b geben. Doch darf q nicht gleich Null sein. Nunmehr gibt die Integration von (1) eine rationale Funktion von t, die also ein Bruch aus zwei ganzen rationalen Funktionen ist, und zwar ist der Nenner dieses Bruches nach Nr. 430 gleich $(t-i)^{2}(t-b)^{\alpha-1}$, der Zähler dagegen von höchstens $(\alpha+1)^{\text{tem}}$ Grade. Bezeichnen wir diesen Zähler mit $G(t)$, so muß also

$$\frac{d}{dt}\frac{G(t)}{(t-i)^{2}(t-b)^{\alpha-1}}$$

den Wert (1) haben, d. h. es ist:

$$(t-i)(t-b)G'(t)-[2(t-b)+(\alpha-1)(t-i)]G(t)=ke^{i\lambda}(t+i)(t-a)^{\alpha}.$$

Wird das Integral insbesondere von $t=a$ an erstreckt, so ist $G(a)=0$. Die vorstehende Gleichung lehrt dann, daß $G'(t)$ mit $t-a$ in der α^{ten} Ordnung verschwindet, daher $G(t)$ selbst in der $(\alpha+1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Weil $G(t)$ nun aber von höchstens $(\alpha+1)^{\text{tem}}$ Grade ist, hat diese Funktion notwendig die Form Konst. $(t-a)^{\alpha+1}$. Die Konstante läßt sich nach Nr. 373 in der Form $he^{i\mu}$ darstellen. Mithin kommt:

$$x+iy=\frac{he^{i\mu}(t-a)^{\alpha+1}}{(t-i)^2(t-b)^{\alpha-1}}+\text{konst.}$$

Hierbei sind h und μ reelle Konstanten. Durch passende Wahl des Anfangspunktes können wir die additive Konstante zum Verschwinden bringen. Also haben wir, da b zu a konjugiert komplex ist:

$$(4)\qquad x+iy=\frac{he^{i\mu}(t-a)^{\alpha+1}}{(t-i)^2(t-b)^{\alpha-1}},\quad x-iy=\frac{he^{-i\mu}(t-b)^{\alpha+1}}{(t+i)^2(t-a)^{\alpha-1}}.$$

Wir führen nun Polarkoordinaten ω, ϱ vermöge $x=\varrho\cos\omega$, $y=\varrho\sin\omega$ ein. Aus (3) und (4) folgt dann durch Multiplikation:

$$(5)\qquad \varrho=h\,\frac{(t-p)^2+q^2}{1+t^2},$$

und ferner folgt aus

$$e^{2i\omega}=\frac{\cos\omega+i\sin\omega}{\cos\omega-i\sin\omega}=\frac{x+iy}{x-iy}$$

sofort:

$$(6)\qquad e^{i\omega}=e^{i\mu}\,\frac{t+i}{t-i}\left(\frac{t-a}{t-b}\right)^{\alpha}.$$

Nehmen wir hier beiderseits den Logarithmus, so kommt:

$$\omega=\mu-\frac{1}{i}\ln\frac{1+it}{1-it}+\frac{\alpha}{i}\ln\frac{1+i\,\dfrac{t-p}{q}}{1-i\,\dfrac{t-p}{q}}-i(\alpha+1)\ln(-1)$$

oder nach (1), Nr. 377, und da $\ln(-1)$ nach (1) in Nr. 376 gleich $i\pi$ gesetzt werden kann:

$$\omega=\mu-2\operatorname{arc\,tg}t+2\alpha\operatorname{arc\,tg}\frac{t-p}{q}+(\alpha+1)\pi.$$

Durch passende Drehung des Achsenkreuzes erreichen wir, daß die additive Konstante $\mu + (\alpha + 1)\pi$ wegfällt. Hiernach und nach (5) werden also die Eulerschen Kurven bei passender Wahl des Achsenkreuzes in Polarkoordinaten ω, ϱ so dargestellt:

$$(7)\qquad \begin{cases} \omega = \dfrac{p^2 + q^2 + 1}{q} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{t - p}{q} - 2 \operatorname{arc\,tg} t, \\ \varrho = h \dfrac{(t - p)^2 + q^2}{1 + t^2}. \end{cases}$$

Wir haben hierin den Wert von α aus (3) eingeführt. Die Konstanten p und q müssen so gewählt werden, daß $(p^2 + q^2 + 1) : 2q$ eine ganze Zahl größer als Eins wird, während h eine beliebig zu wählende Konstante bedeutet, die wir *positiv* annehmen können, damit $\varrho > 0$ wird (vgl. Nr. 203).

In (7) liegt alsdann eine Kurve vor, deren rechtwinklige Koordinaten x und y rationale Funktionen von t sind und deren Bogenlänge s, von $t = 0$ an gerechnet, nach (1) in Nr. 558 die Form hat:

$$(8)\qquad s = k \operatorname{arc\,tg} t.$$

Indem wir dies verifizieren, können wir leicht den Wert der Konstanten k feststellen. Denn mittels der Formel (1) von Nr. 545 oder also:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \varrho^2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2$$

ergibt sich aus (7):

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = h^2 \left[(p^2 + q^2 - 1)^2 + 4p^2\right] \frac{1}{1 + t^2},$$

so daß

$$(9)\qquad k = h\sqrt{(p^2 + q^2 - 1)^2 + 4p^2}$$

ist.

Wollen wir x und y als Funktionen des Radiusvektors ϱ darstellen, so gehen wir am besten auf die Formel (6) zurück. Darin war jedoch $\mu = -(\alpha + 1)\pi$ gewählt, so daß $e^{i\mu} = (-1)^{\alpha+1}$ ist. Es ist also:

$$(10)\qquad \cos\omega + i \sin\omega = (-1)^{\alpha+1} \frac{t + i}{t - i} \left(\frac{t - p - iq}{t - p + iq}\right)^{\alpha}.$$

Hierin ist der aus der zweiten Gleichung (7) folgende Wert von t einzusetzen. Wenn wir dabei die positive Konstante h,

von deren Wert ja nur die Größe, nicht die Gestalt der Kurve beeinflußt wird, gleich $1:q$ wählen, was geschehen darf, da wir in (7) offenbar $q > 0$ annehmen dürfen, so ergibt sich:

$$t = \frac{p + qT}{1 - q\varrho}, \tag{11}$$

wenn zur Abkürzung:

$$T = \sqrt{-\varrho^2 + 2\alpha\varrho - 1} \tag{12}$$

gesetzt wird. Man muß dabei beachten, daß α den in (3) angegebenen Wert hat. Führen wir den Wert (11) in (10) ein, indem wir dabei überall die Relation

$$p^2 = 2\alpha q - 1 - q^2$$

benutzen, so finden wir:

$$\cos\omega + i\sin\omega = \frac{(\alpha q - 1 + ip)(\alpha - q + ip)^\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\alpha+1} q} \cdot \frac{(\varrho - \alpha + iT)(1 - \alpha\varrho + iT)^\alpha}{\varrho^\alpha}.$$

Hieraus ergibt sich durch Multiplikation mit ϱ:

$$x + iy = ge^{i\nu} \frac{(\varrho - \alpha + iT)(1 - \alpha\varrho + iT)^\alpha}{\varrho^{\alpha-1}},$$

wobei der konstante Faktor, der ja eine komplexe Zahl ist, mit $ge^{i\nu}$ bezeichnet worden ist. Bei passender Wahl der Längeneinheit können wir $g = 1$ machen, und bei passender Drehung des Achsenkreuzes erreichen wir die Annahme $\nu = 0$. Also hat sich ergeben:

Jede Eulersche Kurve ist ähnlich mit einer derjenigen Kurven, deren rechtwinklige Koordinaten x, y als Funktionen des Radiusvektors ϱ durch

$$x \pm iy = \frac{(\varrho - \alpha \pm iT)(1 - \alpha\varrho \pm iT)^\alpha}{\varrho^{\alpha-1}} \tag{13}$$

dargestellt werden. Dabei ist α eine ganze Zahl größer als Eins und T die Quadratwurzel (12). Aus (13) folgt sofort, daß x und y einzeln solche Formen:

$$x = \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^{\alpha-1}}, \quad y = \frac{\psi(\varrho)}{\varrho^{\alpha-1}} T$$

haben, in denen φ und ψ ganze rationale Funktionen von ϱ sind.

Im einfachsten Falle $\alpha = 2$ kommt:

$$x = \frac{\varrho^3 + 6\varrho - 2}{\varrho}, \quad y = \frac{\varrho^2 + 2\varrho - 2}{\varrho}\sqrt{-\varrho^2 + 4\varrho - 1},$$

im Falle $\alpha = 3$ dagegen, wenn wir den Maßstab auf ein Achtel verkleinern und die positiven mit den negativen Achsen vertauschen:

$$x = \frac{\varrho^4 + 14\varrho^2 - 8\varrho + 1}{\varrho^2}, \quad y = \frac{(\varrho - 1)(\varrho^2 + 4\varrho - 1)}{\varrho^2} \sqrt{-\varrho^2 + 6\varrho - 1}.$$

§ 6. Rektifikation ohne Integration.

561. Gleichzeitige explizite Darstellung der Koordinaten und der Bogenlänge einer ebenen Kurve. Eine beliebig ausgewählte ebene Kurve c hat unzählig viele Evolventen, und es sei die Kurve m eine dieser Evolventen. Vgl. Nr. 199. Auf der Evolute c wählen wir zwei Punkte C_0 und C_1 aus; es seien M_0 und M_1 die zugehörigen Punkte der Evolvente m. Nach Satz 15, Nr. 200, ist alsdann der Bogen C_0C_1 von c gleich der Differenz $R_1 - R_0$ der Krümmungsradien R_1 und R_0 der Evolvente m in den entsprechenden Punkten M_1 und M_0. Hiervon machen wir im folgenden Gebrauch.

Die Evolvente m sei mittels einer Hilfsveränderlichen t in der Form

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

gegeben. Nach (2) in Nr. 197 hat sie in dem zu t gehörigen Kurvenpunkte M den Krümmungsradius

$$R = \frac{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}^3}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}, \tag{1}$$

wobei die Wurzel positiv ist. Ferner hat der zu M gehörige Punkt C der Evolute c, d. h. der zugehörige Krümmungsmittelpunkt C, nach (5) in Nr. 197, worin nach (6), Nr. 169,

$$\sin\nu = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \quad \cos\nu = -\frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}$$

zu setzen ist, die Koordinaten:

$$x = \varphi - \psi' \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}, \quad y = \psi + \varphi' \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}. \tag{2}$$

Also folgt: Eine beliebige Kurve c können wir uns in der Form (2) gegeben denken, indem darin x und y Funktionen einer Hilfsveränderlichen t sind. Alsdann hat die Bogenlänge

s dieser Kurve von der Stelle (t_0) bis zur Stelle (t) nach (1) den Wert

$$(3) \qquad s = \left[\frac{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}^3}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}\right]_{t_0}^{t},$$

wobei die Wurzel positiv ist und die Bogenlänge positiv gerechnet ist im Sinne wachsender Werte von t. Dabei ist jedoch nach Satz 15, Nr. 200, vorausgesetzt, daß die Evolute auf dem zugehörigen Stücke keinen Wendepunkt, singulären Punkt oder Scheitel habe.

Indem wir in (2) für φ und ψ irgend welche Funktionen setzen, erhalten wir also mit Leichtigkeit *explizite Darstellungen von Kurven, deren Bogenlänge nach (3) ohne jede Integration ebenfalls explizite angegeben werden kann.*

562. Kurven, deren Koordinaten als Funktionen des Tangentenwinkels gegeben sind. Besonders einfach gestaltet sich dieselbe Betrachtung, wenn wir uns die Evolvente in der in Nr. 213 angenommenen Form (3) gegeben denken, in der τ ihr Tangentenwinkel ist. Die Evolute ist ebenda unter (8) angegeben. Der Tangentenwinkel der Evolute ist jedoch $\tau + \frac{1}{2}\pi$. Wenn wir diesen Wert mit τ bezeichnen, so haben die Punkte der Evolute die Koordinaten:

$$(1) \quad x = f'(\tau)\sin\tau + f''(\tau)\cos\tau, \quad y = -f'(\tau)\cos\tau + f''(\tau)\sin\tau.$$

Nach (6) ebenda ist dann der Krümmungsradius der Evolvente:

$$R = f(\tau) + f''(\tau).$$

Also ist auch

$$(2) \qquad s = f(\tau) + f''(\tau) + \text{konst.}$$

die Bogenlänge der Kurve (1), von einer gewissen Stelle an gerechnet, von der es abhängt, welchen Wert die Konstante hat.

Allerdings ist hier s nicht stets positiv gerechnet im Sinne wachsender Werte von τ, sondern nur dann, wenn $f'(\tau) + f'''(\tau)$ positiv ist. Im andern Falle hat man den Wert (2) noch mit -1 zu multiplizieren.

Sechstes Kapitel.

Kubatur, Komplanation und mehrfache Integrale.

---

§ 1. Kubatur durch einfache Integrale.

563. Volumen einer Körperschicht. Unter *Kubatur* versteht man die Ausmessung der Volumina, weil die Volumina als Vielfache der Einheit, nämlich des Würfels oder Kubus von der Kantenlänge Eins, darzustellen sind. Die elementare Stereometrie definiert nur die Volumina *ebenflächig* begrenzter Körper. Liegt ein *krummflächig* begrenzter Körper vor, so ersetzen wir ihn daher durch einen ebenflächig begrenzten Körper, der so verändert werden kann, daß sich seine Oberfläche überall der des gegebenen Körpers beliebig stark nähert. Als das Volumen des gegebenen Körpers bezeichnen wir alsdann den Grenzwert, dem das Volumen des Ersatzkörpers bei dieser Annäherung zustrebt.

Erst im zweiten Paragraphen wird gezeigt werden, daß man in dieser Weise stets zu demselben Volumenwerte gelangt, wie auch der Ersatzkörper beschaffen sein mag.

Zunächst betrachten wir einen *Zylinder* von der Höhe h, dessen Grundfläche ein ebenes Flächenstück E ist. Der Kurve k, die das Flächenstück E umrandet, und von der wir natürlich voraussetzen, daß sie stetig sei, schreiben wir irgend ein Vieleck ein, indem wir beliebige Punkte auf k auswählen und ihrer Reihenfolge nach geradlinig verbinden. Die Fläche des Polygons sei E'. Das Prisma, dessen Grundfläche E' und dessen Höhe h ist und das dieselbe Richtung wie der gegebene Zylinder hat, ist ein Ersatzkörper, dessen Oberfläche überall nach der des Zylinders strebt, sobald immer neue Punkte von k

als Polygonecken derart eingeschaltet werden, daß die Längen aller Polygonseiten nach Null streben. Zugleich strebt E' nach E, nach Satz 1, Nr. 531. Das Prismenvolumen aber hat nach den Sätzen der elementaren Stereometrie den Wert $E'h$. Folglich ist *das Volumen des Zylinders gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe.*

Wir gehen zu einer allgemeineren Betrachtung über: Es werde ein ebenes Flächenstück E so bewegt, daß die Ebene stets der ursprünglichen Lage E_0 parallel bleibt, während jedoch das Flächenstück E dabei nach irgend einem Gesetze veränderlich sei nach Größe und Umriß. Das Flächenstück E beschreibt alsdann, wenn wir das Verfahren bis zu einer Endlage E_1 fortsetzen, einen Körper, siehe Fig. 46. Wir wollen sein Volumen berechnen unter der Annahme, daß uns der Flächeninhalt E in jeder Lage bekannt sei. Diese Annahme ist so zu erfüllen: Wir benutzen eine zu allen Ebenen senkrechte Gerade als x-Achse, positiv im Sinne der auszuführenden Bewegung, so daß zur Anfangsebene ein Wert x_0 und zur Endebene E_1 ein Wert X der Abszisse gehört und $X > x_0$ ist. Zu einer beliebigen Abszisse x, die zwischen x_0 und X liegt, gehört eine Ebene, in der das Flächenstück E den Inhalt $u(x)$ haben möge. Wir setzen voraus, $u(x)$ sei im Intervalle von x_0 bis X eine *stetige* Funktion.

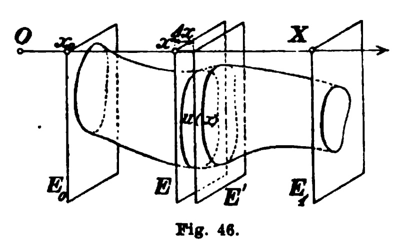


Fig. 46.

Betrachten wir die zu den Abszissen x und $x + \Delta x$ gehörigen Ebenen E und E'. Zwischen E und E' liegt eine Körperschicht von der Dicke Δx. Wir ersetzen sie durch denjenigen geraden Zylinder von der Höhe Δx, dessen Grundfläche das Flächenstück E und dessen Volumen also nach dem Vorgehenden gleich $u(x)\Delta x$ ist, weil E den Flächeninhalt $u(x)$ hat.

Wenn wir das ganze Intervall von x_0 bis X durch eingeschaltete Ebenen E irgendwie zerteilen, also den Körper in Schichten von beliebigen Dicken Δx zerschneiden und wie soeben jede Schicht durch einen Zylinder ersetzen, so wird auch die Oberfläche des Körpers durch eine neue ersetzt. Die

neue Oberfläche weicht von der eigentlichen um so weniger ab, je kleiner *alle* Schichtenstärken Δx angenommen werden. Demnach ist das Volumen des Körpers zu definieren als der Grenzwert der Summe

$$\sum_{x_0}^{X} u(x)\Delta x$$

für $\lim \Delta x = 0$, und diese Summe ist gerade so zu verstehen wie die Summe (2) in Nr. 404, so daß der Grenzwert, weil $u(x)$ stetig ist, nach Satz 4, Nr. 407 den Wert

$$V = \int_{x_0}^{X} u(x)dx \tag{1}$$

hat.

Hiermit sind wir zu einer einfachen *Volumenformel* gelangt. Sie besagt nebenbei noch: Wenn zwischen der Anfangs- und Endlage der Ebene *zwei* Körper liegen, die so beschaffen sein sollen, daß jede der parallelen Zwischenebenen beide Körper in zwei gleich großen Querschnitten trifft, so haben beide Körper dasselbe Volumen. Dieser Satz ist bekannt als das *Cavalierische Prinzip.*

Beispiel: Die Spitze eines *Kegels* sei als Anfangspunkt O gewählt, das Lot von O auf die Grundfläche des Kegels sei die positive x-Achse. Die Grundfläche habe den Inhalt B, und die Kegelhöhe sei gleich h. Eine Ebene E senkrecht zur x-Achse mit einer zwischen 0 und h gelegenen Abszisse x schneidet den Kegel in einem Flächenstücke $u(x)$, das sich aus der Proportion

$$u(x) : B = x^2 : h^2$$

sofort ergibt:

$$u(x) = \frac{B}{h^2}x^2.$$

Nach (1) ist demnach das Volumen des Kegels:

$$V = \int_0^h \frac{B}{h^2}x^2 dx = \tfrac{1}{3}Bh,$$

womit wir zu einem bekannten Satze gelangt sind.

564. Volumen eines Ellipsoid-Segmentes. Wir schicken voraus: In Nr. 220 ergab sich für die Fläche der Ellipse

mit den Halbachsen a und b der Wert πab. Es ist aber das Produkt irgend zweier konjugierter Halbmesser der Ellipse mit dem Sinus ihres Winkels gleich dem Produkte ab. Also folgt: sind a und b nicht die Halbachsen, sondern konjugierte Halbmesser der Ellipse und ist α ihr Winkel, so ist $\pi ab \sin\alpha$ die *Fläche der Ellipse.*

Aus einem *Ellipsoid*, von dem a, b, c drei konjugierte Halbmesser seien, möge nun durch zwei zur Ebene von b und c parallele Ebenen E_0 und E_1 ein Segment ausgeschnitten sein, dessen Volumen V berechnet werden soll. Nehmen wir a, b, c als Achsen für *schiefwinklige* Koordinaten x', y', z' an, so ist bekanntlich die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{y'^2}{b^2\left(1 - \frac{x'^2}{a^2}\right)} + \frac{z'^2}{c^2\left(1 - \frac{x'^2}{a^2}\right)} = 1,$$

so daß eine zwischen E_0 und E_1 eingeschaltete parallele Ebene mit der Abszisse x' das Ellipsoid in einer Ellipse mit den konjugierten Halbmessern

$$b\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2}}, \qquad c\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2}}$$

schneidet. Die Fläche dieser Ellipse ist:

$$u = \pi bc \sin\alpha\left(1 - \frac{x'^2}{a^2}\right),$$

wenn α den Winkel von b und c bedeutet. Bildet die Ebene von b und c mit a den Winkel A, so hat das Lot x von O auf die Ebene $x' =$ konst. die Länge $x = x' \sin A$, so daß $dx = \sin A\, dx'$ ist. Das Einsetzen dieser Werte und des Wertes u in die Volumenformel (1) der vorigen Nummer gibt

$$\begin{aligned} V &= \int_{x'_0}^{X'} \pi bc \sin\alpha\left(1 - \frac{x'^2}{a^2}\right) \sin A\, dx' \\ &= \pi bc \sin\alpha \sin A\left(X' - x_0' - \frac{X'^3 - x_0'^3}{3a^2}\right), \end{aligned}$$

wenn die Ebenen E_0 und E_1 die Abszissen x_0' und X' haben. Für $x_0' = -a$, $X' = a$ geht das Volumen $\frac{4}{3}\pi abc \sin\alpha \sin A$ des ganzen Ellipsoids hervor, also das $\frac{4}{3}\pi$-fache des Volumens des Parallelepipeds mit den Kanten a, b, c.

[564

Eine ähnliche Rechnung gibt die Volumina der Segmente der andern von Flächen zweiter Ordnung umschlossenen Körper.

565. Volumen eines Segmentes eines hyperbolischen Paraboloids. In rechtwinkligen Koordinaten ist

(1) $$xy = az$$

die Gleichung eines gewissen hyperbolischen Paraboloids, das die x- und y-Achse enthält. Wir wollen das Volumen V berechnen, das zwischen der Fläche, dem positiven Quadranten der xy-Ebene und der Ebene

(2) $$x + y + z = a$$

gelegen ist. Siehe Fig. 47.

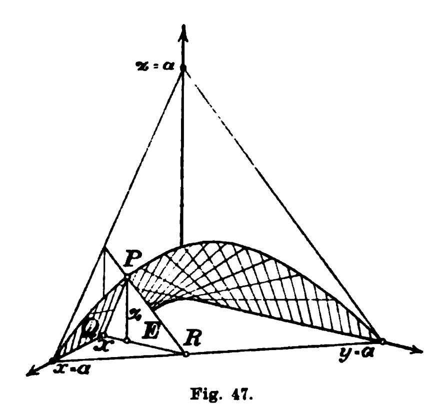


Fig. 47.

Eine zur x-Achse senkrechte Ebene E mit der Abszisse x schneidet das Volumen in einem Dreiecke PQR mit der Grundlinie $QR = a - x$. Die Dreieckshöhe ist der Wert von z, der aus (1) und (2) durch Elimination von y hervorgeht, nämlich $x(a - x)$, dividiert durch $a + x$, so daß die Fläche des Dreiecks den Wert

$$u(x) = \frac{x(a - x)^2}{2(a + x)}$$

hat. Die äußersten Lagen der Ebene E haben die Abszissen $x = 0$ und $x = a$. Nach (1) in Nr. 563 ist mithin:

$$V = \int_0^a \frac{x(a-x)^2}{2(a+x)}\,dx = \int_0^a \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}ax + 2a^2 - \frac{2a^3}{a+x}\right)dx = \left(\frac{17}{12} - \ln 4\right)a^3.$$

566. Volumen eines Rotationskörpers. Dreht sich die in der xy-Ebene gelegene *Meridiankurve*

(1) $$y = f(x)$$

um die x-Achse, so entsteht eine *Rotationsfläche*, vgl. Nr. 348. Es soll das Volumen V berechnet werden, das von ihr und zwei zur Drehachse senkrechten Ebenen mit den Abszissen x_0 und X eingeschlossen wird.

Eine zur Drehachse senkrechte Ebene, deren Abszisse x irgend einen Wert zwischen x_0 und X hat, schneidet die Rotationsfläche in einem *Breitenkreise* vom Radius $y = f(x)$, so daß $u(x) = \pi y^2$ seine Fläche ist und demnach aus (1) in Nr. 563 folgt:

$$(2) \qquad V = \pi \int_{x_0}^{X} y^2 \, dx,$$

worin y die durch (1) gegebene Funktion von x ist.

Liegen *zwei* Meridiankurven

$$(3) \qquad y_1 = f_1(x) \quad \text{und} \quad y_2 = f_2(x)$$

vor, wobei $y_2 > y_1$ sei, so gehören zu ihnen zwei Rotationsflächen. Das zwischen beiden gelegene Volumen von x_0 bis X ist die Differenz der Volumina:

$$V_2 = \pi \int_{x_0}^{X} y_2^2 \, dx \quad \text{und} \quad V_1 = \pi \int_{x_0}^{X} y_1^2 \, dx$$

d. h. es hat den Wert:

$$(4) \qquad V = \pi \int_{x_0}^{X} (y_2^2 - y_1^2) \, dx.$$

Demnach ist es gerade so groß wie das Volumen des zur Meridiankurve:

$$y = \sqrt{y_2^2 - y_1^2} = \sqrt{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2}$$

gehörigen Rotationskörpers.

1. Beispiel: Ein Kreis mit dem Radius a liege in der xy-Ebene, seine Mitte auf der y-Achse, doch so, daß der Kreis die x-Achse *nicht* schneide, also die Ordinate b der Mitte größer als a sei. Die Drehung des Kreises um die x-Achse liefert dann einen *Kreisring*. Eine Ebene $x =$ konst., deren Abszisse x zwischen $-a$ und $+a$ liegt, schneidet die Oberfläche des Kreisringes in *zwei* Breitenkreisen, für deren Radien y_1 und y_2 nach Fig. 48 die Beziehungen gelten:

$$(5) \quad y_2 + y_1 = 2b, \quad y_2 - y_1 = 2\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{d. h.} \quad y_2^2 - y_1^2 = 4b\sqrt{a^2 - x^2}.$$

[566

Dasjenige Segment des Kreisringes, das zwischen den Ebenen $x = x_0$ und $x = X > x_0$ liegt, hat also nach (4) das Volumen:

$$V = 4\pi b \int_{x_0}^{X} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx, \tag{6}$$

wobei die Grenzen natürlich im Intervalle von $-a$ bis $+a$ zu wählen sind. Zwischen den beiden Ebenen liegt auch ein gewisses Segment v des erzeugenden Kreises, siehe die Figur; und die Fläche dieses Segmentes ist nach Nr. 409 das Integral

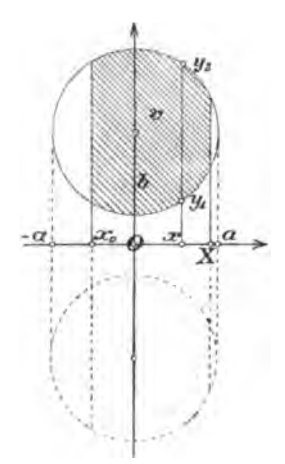


Fig. 48

$$v = \int_{x_0}^{X} (y_2 - y_1)\, dx,$$

so daß aus (6) und der zweiten Formel (5) folgt:

$$V = 2\pi b v.$$

Das Volumen des Kreisring-Segmentes ist demnach gleich dem Volumen desjenigen Zylinders, dessen Grundfläche das Kreissegment v und dessen Höhe der Weg $2\pi b$ ist, den die Mitte des erzeugenden Kreises beschreibt. Das Volumen des ganzen Kreisringes ist also gleich $\pi a^2 \cdot 2\pi b$ oder $2\pi^2 a^2 b$.

2. Beispiel: Rollt ein Kreis vom Radius a in der xy-Ebene auf der x-Achse, so beschreibt irgend ein Punkt seines Umfanges eine *Zykloide*, deren Gleichungen nach (1) in Nr. 231 sind:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi). \tag{7}$$

Dabei ist der Anfangspunkt eine Spitze der Kurve und der Punkt mit den Koordinaten $x = 2a\pi$, $y = 0$ die nächste Spitze. Diese beiden Punkte gehören zu den Werten 0 und 2π der Hilfsveränderlichen φ, die nach Nr. 231 den beim Rollen zurückgelegten Drehwinkel bezeichnet. Nach (7) ist:

$$dx = a(1 - \cos\varphi)\, d\varphi. \tag{8}$$

Durch Drehung der Zykloide um die x-Achse geht eine Rotationsfläche hervor. Sie umschließt, von O an gerechnet, zu-

sammen mit einer zur x-Achse senkrechten Ebene $x = X > 0$, ein Volumen V, das sich nach (2), (7) und (8) sofort als Integral hinsichtlich der Hilfsveränderlichen φ darstellen läßt:

$$V = \pi \int_0^X y^2\, dx = \pi a^3 \int_0^\Phi (1 - \cos\varphi)^3\, d\varphi.$$

Dabei soll Φ der Wert von φ für $x = X$ sein. Es kommt:

$$V = \pi a^3 \int_0^\Phi (\tfrac{5}{2} - \tfrac{15}{4}\cos\varphi + \tfrac{3}{2}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 3\varphi)\, d\varphi$$

$$= \pi a^3 (\tfrac{5}{2}\Phi - \tfrac{15}{4}\sin\Phi + \tfrac{3}{4}\sin 2\Phi - \tfrac{1}{12}\sin 3\Phi).$$

Insbesondere geht für $\Phi = 2\pi$ das Volumen $5\pi^2 a^3$ hervor, das durch die Drehung eines Bogens der Zykloide — von Spitze zu Spitze gerechnet — entsteht.

3. Beispiel: Lassen wir dieselbe *Zykloide* um die Tangente ihres Scheitels, nämlich ihres höchsten Punktes (C in Fig. 54, S. 383 des 1. Bandes) rotieren, so daß wir also auch diese Tangente als x-Achse wählen, d. h. die zweite Formel (7) ersetzen durch

$$y = 2a - a(1 - \cos\varphi) = a(1 + \cos\varphi),$$

so liefert die Volumenformel (2) in entsprechender Weise:

$$V = \pi \int_0^X y^2\, dx = \pi a^3 \int_0^\Phi (1 + \cos\varphi)^2 (1 - \cos\varphi)\, d\varphi$$

$$= \pi a^3 \int_0^\Phi (1 + \cos\varphi)\sin^2\varphi\, d\varphi = \pi a^3 (\tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\sin\Phi\cos\Phi + \tfrac{1}{3}\sin^3\Phi)$$

Zu dem ganzen Zykloidenbogen gehört das bei der Annahme $\Phi = 2\pi$ hervorgehende Volumen $\pi^2 a^3$, das also den fünften Teil des im 2. Beispiele betrachteten Gesamtvolumens ausmacht.

567. Die Guldinsche Regel für die Volumina von Rotationskörpern. Indem wir uns eine mathematische Begründung für eine geeignetere Stelle (in Nr. 602) vorbehalten, bemerken wir hier ohne Beweis, daß derjenige Punkt S eines

ebenen Flächenstückes, den man in der Mechanik als den *Schwerpunkt* der Fläche definiert, die Ordinate hat:

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = \frac{\int\limits_{x_0}^{X} y^2\,dx}{2\int\limits_{x_0}^{X} y\,dx}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß das Flächenstück durch eine stetige Kurve

$$(2) \qquad y = f(x),$$

durch die Abszissenachse und durch die zu x_0 und X gehörigen Ordinaten begrenzt sei.

Die Volumenformel (2) der vorigen Nummer für den Rotationskörper läßt sich folglich so schreiben:

$$V = 2\pi\mathfrak{y}\cdot\int\limits_{x_0}^{X} y\,dx.$$

Hier bedeutet das Integral den Inhalt des ebenen Flächenstückes, das von der *Meridiankurve* (2), von der Drehachse und von den zu x_0 und X gehörigen Ordinaten begrenzt wird, d. h. gerade desjenigen Flächenstückes, durch dessen Rotation der Körper vom Volumen V entsteht. Andererseits ist $2\pi\mathfrak{y}$ der Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt S bei der Rotation beschreibt. Hieraus entspringt die sogenannte *Guldinsche Regel* für die Ausmessung des Volumens eines Rotationskörpers, die übrigens schon bei *Pappus* vorkommt: Wird ein ebenes Flächenstück von der Größe E um eine solche Achse g gedreht, die E nicht zerteilt, so *ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers gleich dem Volumen desjenigen Zylinders, dessen Grundfläche E und dessen Höhe gleich dem Wege ist, den der Schwerpunkt S von E bei der Drehung zurücklegt.* Es leuchtet ein, daß die Fläche E nicht an die Achse g heranzureichen braucht, ebenso, daß dies Ergebnis auch für ein solches Segment des Rotationskörpers gilt, das durch eine unvollständige Drehung von E um die Achse g hervorgeht.

Ein Beispiel zur Guldinschen Regel ist das 1. Beispiel der vorigen Nummer.

567]

§ 2. Kubatur durch Doppelintegrale.

568. Ziel der nächsten Betrachtungen. Es gelang in denjenigen Beispielen, die wir im ersten Paragraphen betrachteten, eine analytische Formel für den Flächeninhalt $u(x)$ eines solchen ebenen Schnittes des auszumessenden Körpers zu finden, der durch eine Ebene $x =$ konst. entstand, so daß alsdann die Formel (1) von Nr. 563, nämlich

$$(1) \qquad V = \int_{x_0}^{X} u(x)\,dx,$$

das gesuchte Volumen lieferte. Aber die Bestimmung der Funktion $u(x)$ erfordert in weniger einfachen Fällen an sich schon die Auswertung eines Integrals, da $u(x)$ als Inhalt eines ebenen Flächenstücks durch eine *Quadratur* (siehe Nr. 530) zu berechnen ist. In Wahrheit steht also in der Formel (1) kein einfaches, sondern ein sogenanntes *Doppelintegral*, das uns übrigens in spezieller Form schon von Nr. 489 an begegnete. Unsere Aufgabe ist es jetzt, eine allgemeine Theorie der Doppelintegrale zu entwickeln.

Außerdem ist darauf zu achten, daß die Methode, durch die wir die Formel (1) abgeleitet haben, unvollständig war. Denn wir haben uns dabei damit begnügt, das Volumen zu definieren als den Grenzwert des Volumens eines Ersatzkörpers, der in Nr. 563 in einer ganz bestimmten Weise hergestellt wurde. Es ist noch zu zeigen, daß *jede* Art des Ersatzes der Oberfläche des Körpers durch eine ihr beliebig nahe kommende andere Oberfläche stets denselben Grenzwert für das Volumen ergibt. Deshalb nehmen wir das Problem, Volumina zu definieren und zu berechnen, durchaus von neuem in Angriff. Nachher (in Nr. 578) wird sich herausstellen, daß die Formel (1) in der Tat exakt ist.

569. Ersatz der Oberfläche durch ein Polyeder. Nach Nr. 251 definiert die Gleichung

$$(1) \qquad z = f(x, y)$$

eine Fläche, wenn x, y, z als rechtwinklige Koordinaten gedeutet werden und $f(x, y)$ eine *stetige* Funktion von x und y

ist. Den Variabilitätsbereich wollen wir dabei vorderhand in der einfachsten Weise annehmen: Er sei durch die Ungleichungen

$$(2) \qquad x_0 \leqq x \leqq X, \qquad y_0 \leqq y \leqq Y$$

festgelegt, worin x_0, X, y_0 und Y gegebene Zahlen seien, so daß der Variabilitätsbereich in der xy-Ebene durch die Fläche eines *Rechtecks* $ABCD$ dargestellt wird, dessen Seiten den Achsen parallel sind und die Abszissen x_0, X bzw. die Ordinaten y_0, Y haben. *Ob die Funktion $f(x, y)$ partielle Ableitungen nach x und y hat oder nicht, ist für die folgende Betrachtung völlig einerlei.*

Jedem Punkte Q im Innern des Rechtecks oder auf seinem Rande gehören Koordinaten x und y derart zu, daß $z = f(x, y)$ in der Umgebung dieses Wertepaares x, y stetig ist. Für den zugehörigen Punkt P oder (x, y, z) der Fläche ist der Punkt Q die Projektion auf die xy-Ebene.

Der Einfachheit halber wollen wir ferner *vorläufig* annehmen, daß die Funktion $f(x, y)$ oder z für jede Stelle des Variabilitätsbereiches positiv sei. Von dieser Voraussetzung machen wir die Betrachtung später frei. Sie bedeutet, daß die Fläche völlig über der positiven Seite der xy-Ebene liegen soll. Errichten wir längs der Kanten des Rechtecks $ABCD$ die zur xy-Ebene senkrechten Ebenen, so umschließen sie zusammen mit der xy-Ebene und der Fläche (1) einen Raumteil, dessen Volumen wir definieren und berechnen wollen.

Wir verfahren analog wie in Nr. 404 so: Zwischen x_0 und X schalten wir in steigender Reihe eine beliebige Anzahl von Zwischenwerten ein:

$$x_1, x_2, \ldots x_{n-1},$$

ebenso zwischen y_0 und Y:

$$y_1, y_2, \ldots y_{m-1},$$

so daß das Intervall von x_0 bis X in etwa n und das Intervall von y_0 bis Y in etwa m willkürlich anzunehmende Teile zerlegt wird. Jedem Wertepaare x_i, y_l entspricht ein Punkt Q_{il} der Fläche des Rechtecks $ABCD$. Die Geraden in der xy-Ebene, die den Achsen parallel sind und die Abszissen x_1, x_2, $\ldots$ x_{n-1} bzw. die Ordinaten y_1, y_2 $\ldots$ y_{m-1} haben,

zerlegen das Rechteck in $n \cdot m$ kleinere Rechtecke, und die Punkte Q_{il} sind Ecken dieser Rechtecke. Siehe Fig. 49. Längs aller Teilgeraden errichten wir die zur xy-Ebene senkrechten Ebenen, wodurch der Körper in $n \cdot m$ Teile zerlegt wird, die wir *Prismen* nennen wollen, obwohl sie einerseits nicht eben, sondern krummflächig, nämlich durch die Fläche (1), begrenzt werden.

Jedes dieser $n \cdot m$ Prismen hat eine rechteckige Grundfläche. Unter der *Anfangsecke* eines dieser Rechtecke verstehen wir im folgenden immer diejenige Ecke, der die kleinsten Koordinatenwerte x, y zukommen, also die dem Punkte A am nächsten liegende Ecke.

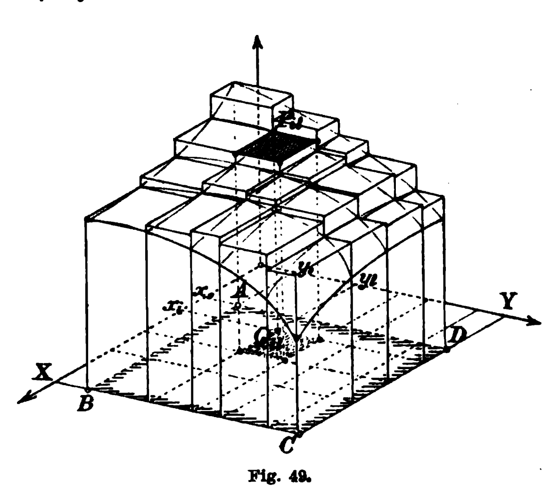


Fig. 49.

Zur Anfangsecke Q_{il} oder (x_i, y_l) eines der Teilrechtecke von $ABCD$ gehört ein vertikal darüber liegender Punkt P_{il} der Fläche (1). Wenn wir das auf dem Rechtecke stehende Prisma nunmehr oben nicht mehr durch die krumme Fläche (1), sondern durch die Ebene parallel der xy-Ebene und in der Höhe $z = f(x_i, y_l)$ von P_{il} begrenzen und in derselben Weise mit allen $n \cdot m$ Prismen verfahren, so ersetzen wir den zu berechnenden Körper durch eine Summe von $n \cdot m$ *Rechtflachen*, von denen das mit der Anfangsecke Q_{il} oder (x_i, y_l) den Inhalt

$$(3) \qquad f(x_i, y_l)(x_{i+1} - x_i)(y_{l+1} - y_l)$$

hat. Die *Doppelsumme*

$$(4) \qquad J = \sum_0^{n-1} \sum_0^{m-1} f(x_i, y_l)(x_{i+1} - x_i)(y_{l+1} - y_l)$$

ist also die Summe der Volumina aller Rechtflache. Sie ist so zu bilden: In dem Produkte (3) sind für i bzw. l nach

und nach alle Werte $0, 1, 2, \ldots n-1$ bzw. $0, 1, 2, \ldots m-1$ zu setzen. Alsdann sind alle hervorgehenden $n \cdot m$ Produkte zu addieren. Natürlich ist dabei unter x_n bzw. y_m nach (2) die Endabszisse X bzw. Endordinate Y zu verstehen.

Indem wir statt der oben krummflächig begrenzten $n \cdot m$ Prismen die $n \cdot m$ Rechtflache einführen, ersetzen wir die Fläche (1) durch ein treppenförmiges Gebilde, nämlich durch ein *Polyeder*, das aus lauter Rechtecken gebildet wird, von denen $n \cdot m$ Rechtecke parallel zur xy-Ebene, alle anderen zu dieser Ebene vertikal sind. Letztere sind diejenigen Teile der vertikalen Seiten der Rechtflache, die nicht zwei aneinanderstoßenden Rechtflachen gemein sind.

Daß das Ersatz-Polyeder von der Fläche (1) überall um so weniger abweicht, je kleiner alle Teilintervalle zwischen x_0 und X und zwischen y_0 und Y angenommen werden, wird aus dem in nächster Nummer aufzustellenden Satze folgen. Unser Ziel ist nun, zu zeigen, daß die Doppelsumme J einem bestimmten endlichen Grenzwerte zustrebt, wenn alle Teilintervalle nach Null streben und demnach die Anzahlen n und m über jede Zahl wachsen.

570. Schwankung einer stetigen Funktion von zwei Veränderlichen. Unter der Schwankung einer stetigen Funktion von zwei Veränderlichen innerhalb eines bestimmten Variabilitätsbereiches wird die ihrer Natur nach niemals negative Differenz zwischen dem größten und kleinsten Werte verstanden, den die Funktion in dem Bereiche annimmt. (Vgl. das entsprechende in Nr. 405.) Es gilt der

Satz 1: Ist $f(x, y)$ eine in einem Variabilitätsbereiche stetige Funktion von zwei Veränderlichen x und y, so gibt es, wie klein man auch eine positive Zahl τ wählen mag, stets eine positive Zahl σ derart, daß die Schwankung der Funktion kleiner als τ ist innerhalb einer solchen Umgebung einer jeden beliebigen Stelle (x_1, y_1) des Variabilitätsbereiches, in der x und y von x_1 bzw. y_1 um nicht mehr als σ abweichen.

Nach Nr. 486 gibt es nämlich, falls die positive Zahl τ beliebig klein gewählt wird, eine positive Zahl σ derart, daß

(1) $$|f(x, y) - f(x_1, y_1)| < \tfrac{1}{2}\tau$$

ist, sobald $|x - x_1|$ und $|y - y_1|$ kleiner als σ sind. Und zwar ist dabei σ unabhängig davon, wo auch immer die Stelle (x_1, y_1) innerhalb des Variabilitätsbereiches gewählt sein mag. Die erlaubten Werte x, y sind hierbei wegen $|x - x_1| < \sigma$ und $|y - y_1| < \sigma$ die Koordinaten eines solchen Punktes (x, y), der innerhalb eines gewissen Quadrates liegt, dessen Mitte der Punkt (x_1, y_1) ist und dessen Seiten die Längen 2σ haben und überdies zur x- und y-Achse parallel sind.

Insbesondere sei der Punkt (x, y) in diesem Quadrate gerade derjenige, in dem $f(x, y)$ den größten Wert innerhalb des Quadrates erreicht. Dagegen sei (x', y') derjenige Punkt des Quadrates, in dem $f(x, y)$ den kleinsten Wert annimmt, so daß analog (1) auch:

$$(2) \qquad |f(x', y') - f(x_1, y_1)| < \tfrac{1}{2}\tau$$

ist. Aus (1) und (2) folgt nach Satz 2 in Nr. 4 sofort:

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \tau.$$

Übrigens sind hier die Vertikalstriche nicht nötig, da $f(x, y)$ nicht kleiner als $f(x', y')$ ist. Die letzte Ungleichung besagt, daß die *Schwankung* der Funktion f innerhalb des Quadrates kleiner als τ ist. Da das Zahlenpaar σ, τ überall im Variabilitätsbereiche dasselbe bleibt, so ist Satz 1 bewiesen.

571. Existenz eines Grenzwertes des Polyedervolumens. Wir haben in Nr. 569 eine Doppelsumme (4) gebildet, die sich auf eine gewisse Zerlegung des Rechtecks $ABCD$, d. h. des Variabilitätsbereiches der dort betrachteten Funktion f, bezog. Da wir diese *erste* Zerlegung nachher durch weitergehende Zerlegungen ersetzen werden, so wollen wir hier die Doppelsumme J_1 nennen, also setzen:

$$(1) \qquad J_1 = \sum_0^{n-1}\sum_0^{m-1} f(x_\iota, y_l)(x_{\iota+1} - x_\iota)(y_{l+1} - y_l).$$

Es bedeute nun $g_{\iota l}$ den größten und $k_{\iota l}$ den kleinsten Wert, den $f(x, y)$ für die Stellen (x, y) innerhalb des Teilrechtecks mit der Anfangsecke (x_ι, y_l) erreicht. Wenn wir $f(x_\iota, y_l)$ in (1) durch den nicht kleineren Wert $g_{\iota l}$ oder durch

den nicht größeren Wert k_{il} ersetzen, so gehen zwei Doppelsummen

$$\gamma_1 = \sum_0^{n-1}\sum_0^{m-1} g_{il}(x_{i+1}-x_i)(y_{l+1}-y_l),$$

$$\varkappa_1 = \sum_0^{n-1}\sum_0^{m-1} k_{il}(x_{i+1}-x_i)(y_{l+1}-y_l)$$

hervor, zwischen denen J_1 gelegen ist, weil die Produkte $(x_{i+1}-x_i)(y_{l+1}-y_l)$, die gleich den Flächen der Teilrechtecke sind, positive Werte haben.

Ist ferner G der größte und K der kleinste Wert, den $f(x, y)$ in dem *ganzen* Rechtecke $ABCD$ erreicht, und ersetzen wir in γ_1 jeden Faktor g_{il} durch den nicht kleineren Faktor G sowie in $\varkappa_1$ jeden Faktor k_{il} durch den nicht größeren Faktor K, so gehen die Produkte von G bzw. K mit der Gesamtfläche von $ABCD$ hervor:

$$\Gamma = G(X-x_0)(Y-y_0), \quad K = K(X-x_0)(Y-y_0),$$

und dabei ist Γ nicht kleiner als γ_1 und K nicht größer als $\varkappa_1$. Wir haben also:

(2) $$\Gamma > \gamma_1 \geqq J_1 \geqq \varkappa_1 \geqq K.$$

Außerdem ist

(3) $$\gamma_1 - \varkappa_1 = \sum_0^{n-1}\sum_0^{m-1}(g_{il}-k_{il})(x_{i+1}-x_i)(y_{l+1}-y_l).$$

Hierin bedeutet $g_{il}-k_{il}$ die Schwankung der Funktion f in dem Teilrechtecke mit der Anfangsecke (x_i, y_l). Wenn unter τ_1 eine vorgegebene positive Zahl verstanden wird, so können wir annehmen, daß alle Teilrechtecke so klein gewählt seien, daß der Satz 1 der vorigen Nummer gilt, d. h. daß die Schwankung $g_{il}-k_{il}$ kleiner als τ_1 sei. Dann folgt, daß

(4) $$\gamma_1 - \varkappa_1 < \tau_1(X-x_0)(Y-y_0)$$

ist, denn wenn in (3) rechts statt $g_{il}-k_{il}$ überall der größere Wert τ_1 gesetzt wird, so läßt er sich vor die Doppelsumme bringen, und die verbleibende Doppelsumme bedeutet dann als Summe der Flächen aller $n \cdot m$ Teilrechtecke die Fläche des Gesamtrechtecks $ABCD$.

571]

Zusammengefaßt: Die auf die Zerlegung des Rechtecks $ABCD$ bezügliche Doppelsumme J_1 liegt zwischen den Summen γ_1 und $\varkappa_1$, die aus den Produkten aller Teilrechtecke mit den jeweils größten bzw. kleinsten Werten von f in den Teilrechtecken gebildet sind. Diese Summen γ_1 und $\varkappa_1$ liegen ihrerseits zwischen den Produkten Γ und K aus dem Gesamtrechtecke und dem größten bzw. kleinsten Werte, den f im Gesamtrechtecke annimmt. Außerdem ist die Differenz $\gamma_1 - \varkappa_1$ kleiner als das Produkt des Gesamtrechtecks mit τ_1.

Diese Ergebnisse entsprechen denen in Nr. 406, und wie dort schließen wir weiter. Wir nehmen nämlich eine unbegrenzte Folge von lauter beständig abnehmenden und nach Null strebenden positiven Zahlen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \cdots$ an. Alsdann können wir zwischen den schon benutzten Teilgeraden des Rechtecks neue, ebenfalls zu den Achsen parallele Teilgeraden so eng einschalten, daß die Schwankung von f in den hervorgehenden kleineren Rechtecken überall geringer als τ_2 wird. Abermals schalten wir alsdann neue Teilgeraden ein, bis die Rechtecke so klein werden, daß die Schwankung von f in ihnen überall geringer als τ_3 wird, usw. Zu jeder Teilung gehört wie zur ersten die Doppelsumme J_1 eine Doppelsumme J_2, J_3 usw.

Bei dieser fortgesetzten Verfeinerung der Zerlegung tun wir mit jedem schon vorhandenen Teilrechtecke genau dasselbe, was wir zuerst mit dem Gesamtrechtecke $ABCD$ getan haben. Daher lassen sich die Schlüsse genau so wie in Nr. 406 wiederholen. Es mögen $\gamma_2, \gamma_3, \cdots$ die Summen der Produkte aus allen Teilrechtecken der 2., 3., $\cdots$ Zerteilung mit den jeweils größten Werten von f in den betreffenden Teilrechtecken sein. Ebenso sollen $\varkappa_2, \varkappa_3, \cdots$ die Summen der Produkte aus allen Teilrechtecken der 2., 3., $\cdots$ Zerteilung mit den jeweils kleinsten Werten von f in den betreffenden Teilrechtecken bedeuten. Alsdann bestehen Ungleichungen von folgender Form in unbegrenzter Anzahl:

$$\begin{array}{ll}
\varkappa_1 \leqq J_1 \leqq \gamma_1, & \gamma_1 - \varkappa_1 < \tau_1 (X - x_0)(Y - y_0), \\
\varkappa_2 \leqq J_2 \leqq \gamma_2, & \gamma_2 - \varkappa_2 < \tau_2 (X - x_0)(Y - y_0), \\
\varkappa_3 \leqq J_3 \leqq \gamma_3, & \gamma_3 - \varkappa_3 < \tau_3 (X - x_0)(Y - y_0), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

[571

aus denen, da $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \cdots$ nach Null streben, wie in Nr. 406 folgt, *daß der Grenzwert der Folge* $J_1, J_2, J_3, \cdots$ *einen bestimmten endlichen Wert hat.*

572. Ein einziger Grenzwert des Polyedervolumens. Jetzt ist noch zu zeigen, daß derselbe Grenzwert hervorgeht, wenn wir von irgend einer *anderen* Zerlegung des Rechtecks $ABCD$ durch Parallelen zu seinen Seiten ausgehen und hier die Zerteilung ohne Ende verfeinern, gerade so wie in Nr. 407.

Es sei τ eine beliebig klein gewählte positive Zahl. Eine *erste* Zerlegung des Rechtecks $ABCD$ denken wir uns so weit getrieben, daß die Funktion f in jedem Teilrechtecke um weniger als τ schwankt. Eine *zweite* Zerlegung des Rechtecks denken wir uns so weit getrieben, daß zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Teilgeraden der ersten Zerlegung mindestens eine Teilgerade der zweiten verläuft. Wir haben dementsprechend zwei Doppelsummen J und J' zu betrachten.

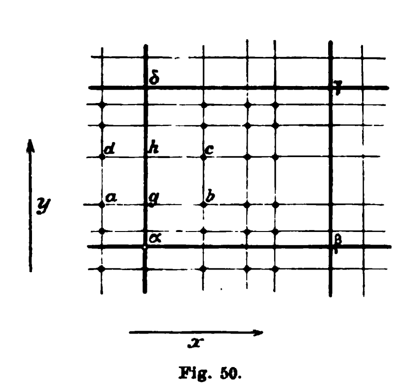


Fig. 50.

Wir greifen irgend eines der Teilrechtecke $\alpha\beta\gamma\delta$ der *ersten* Zerlegung heraus, siehe Fig. 50, worin die starken Linien Teilgeraden der ersten und die schwachen solche der zweiten Zerlegung bedeuten sollen. Wenn wir uns die positive x-Achse und die positive y-Achse in den gewohnten Orientierungen nach rechts und oben vorstellen, so ist die Anfangsecke eines jeden Rechtecks die links unten gelegene, also die von $\alpha\beta\gamma\delta$ der Punkt α. Alle Teilrechtecke der *zweiten* Zerlegung, die ganz oder teilweise dem Recktecke $\alpha\beta\gamma\delta$ angehören, haben als Anfangsecken die in der Figur markierten Punkte; und diese Punkte liegen sämtlich innerhalb derjenigen vier Rechtecke der *ersten* Teilung, die in α zusammenstoßen. Da nun die Schwankung von f innerhalb jedes dieser vier Rechtecke kleiner als τ ist, so hat f an den markierten Stellen Werte,

die um weniger als τ von demjenigen Werte f_α abweichen, den f an der Stelle α erreicht.

Zur Summe J' gehören nun die Produkte der betrachteten Rechtecke der *zweiten* Teilung mit den Werten, die f jeweils an ihren Anfangsecken hat. Unter diesen Rechtecken gehören einige nur teilweise zum Rechtecke $\alpha\beta\gamma\delta$. Den zu einem solchen Rechtecke gehörigen Summanden von J' zerlegen wir deshalb in eine Summe. Z. B. gehört zu dem Rechtecke $abcd$ der *zweiten* Teilung, das durch $\alpha\delta$ in $aghd$ und $gbch$ zerschnitten wird, als Summand von J' das Produkt der Fläche $abcd$ mit dem Werte f_a von f für die Stelle a. Von diesem Summanden benutzen wir vorläufig nur das Produkt der zum Rechtecke $\alpha\beta\gamma\delta$ gehörigen Fläche $gbch$ mit f_a. So machen wir es mit allen Summanden von J', die sich auf Rechtecke beziehen, die ganz oder teilweise zu dem ausgewählten Rechtecke $\alpha\beta\gamma\delta$ der *ersten* Zerlegung gehören. Die Summe aller dieser Glieder von J' heiße $S_{\alpha\beta\gamma\delta}$, so daß die Doppelsumme J' die Summe aller dieser Teilsummen $S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist. Zum Rechtecke $\alpha\beta\gamma\delta$ gehört andrerseits ein Summand $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ der Doppelsumme J, nämlich das Produkt der Fläche $\alpha\beta\gamma\delta$ mit f_α.

Nach dem, was wir vorhin sahen, weicht aber $S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ von $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ um weniger ab als das Produkt der Fläche des Rechtecks $\alpha\beta\gamma\delta$ mit f_α.

Also folgt: Die Doppelsumme J' weicht von der Doppelsumme J um weniger ab als das Produkt der Gesamtheit aller Rechtecke $\alpha\beta\gamma\delta$ der ersten Teilung mit τ. Diese Gesamtheit ist aber das ganze Rechteck $ABCD$, und seine Fläche ist gleich $(X - x_0)(Y - y_0)$. Mithin ist

$$|J' - J| < \tau(X - x_0)(Y - y_0).$$

Für $\lim \tau = 0$ folgt hieraus $\lim J' = \lim J$.

Hiermit ist der grundlegende Satz gewonnen:

Satz 2: Ist $f(x, y)$ eine in dem Variabilitätsbereiche

$$x_0 \leqq x \leqq X, \qquad y_0 \leqq y \leqq Y$$

stetige Funktion der beiden Veränderlichen x und y und werden zwischen x_0 und X sowie zwischen y_0 und Y beliebige Werte in steigender Folge eingeschaltet:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < X, \quad y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < Y,$$

[572

so hat die Doppelsumme

$$\sum_0^{n-1}{}^i \sum_0^{m-1}{}^l f(x_i, y_l)(x_{i+1} - x_i)(y_{l+1} - y_l),$$

in der x_n und y_m die Werte X und Y bedeuten sollen, einen von den gewählten Zwischenwerten unabhängigen bestimmten endlichen Grenzwert, falls alle Teilintervalle $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... $X - x_{n-1}$ und $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, ... $Y - y_{m-1}$ nach Null streben und dementsprechend ihre Anzahlen n und m über jede Zahl wachsen.

Wir erwähnen noch, daß der Beweis zwar auf eine Figur gestützt wurde, diese Figur aber ganz hätte vermieden werden können. Statt z. B. vom Rechtecke $ABCD$ und seiner Anfangsecke A zu sprechen, hätten wir ebenso gut von dem Variabilitätsbereiche

$$x_0 \leqq x \leqq X, \quad y_0 \leqq y \leqq Y$$

und dem Wertepaare x_0, y_0 des Bereiches reden können. Jedoch wäre der sprachliche Ausdruck dadurch unbeholfen geworden. Jedenfalls ließe sich der Beweis unabhängig von den Hilfsmitteln der Veranschaulichung durchführen, so daß der in Nr. 7 aufgestellten Forderung Genüge geleistet wird.

Die in Nr. 569 vorderhand gemachte Annahme $f(x, y) > 0$ haben wir hier gar nicht benutzt.

573. Das Doppelintegral mit bestimmten Grenzen. Die Doppelsumme

$$J = \sum_0^{n-1}{}^i \sum_0^{m-1}{}^l f(x_i, y_l)(x_{i+1} - x_i)(y_{l+1} - y_l)$$

können wir etwas kürzer schreiben. Es bedeute x, y irgend eins der Wertepaare x_i, y_l, und es seien Δx und Δy die zugehörigen Unterschiede $x_{i+1} - x_i$ und $y_{l+1} - y_l$ zwischen dem Wertepaare x_{i+1}, y_{l+1} und dem Wertepaare x_i, y_l. Alsdann schreiben wir die Summe symbolisch so:

(1) $$J = \sum_{\Delta x} \sum_{\Delta y} f(x, y) \Delta x \Delta y.$$

Die Doppelsumme J ist die natürliche Verallgemeinerung der in Nr. 404 u. f. betrachteten einfachen Summe J, die zu

einer Funktion f von nur einer Veränderlichen gehört. In Analogie mit den Ergebnissen von Nr. 410 bezeichnet man den Grenzwert der Summe J, von dem in Satz 2 der vorigen Nummer die Rede war, als ein *Doppelintegral:*

$$(2) \quad \lim J = \lim \sum_{\Delta x} \sum_{\Delta y} f(x, y) \Delta x \Delta y = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Um den Wert dieses Doppelintegrals zu berechnen, kann man so vorgehen: In der Summe J fassen wir zunächst alle mit demselben Faktor $y_{l+1} - y_l$ oder Δy behafteten Glieder zusammen und ziehen aus ihnen den gemeinsamen Faktor heraus, so daß sie die Summe haben:

$$(y_{l+1} - y_l) \sum_0^{n-1} {}^i f(x_i, y_l)(x_{i+1} - x_i).$$

Setzen wir jetzt $l = 0, 1, 2, \ldots m - 1$, so gehen m solche Summen hervor. Ihre Gesamtsumme ist J:

$$J = \sum_0^{m-1} {}^l (y_{l+1} - y_l) \left[\sum_0^{n-1} {}^i f(x_i, y_l)(x_{i+1} - x_i) \right].$$

Da die eckige Klammer von den Differenzen $y_{l+1} - y_l$ frei ist, können wir nun das Doppelintegral (2) so schreiben:

$$(3) \qquad \lim \sum_0^{m-1} {}^l (y_{l+1} - y_l) \left[\lim \sum_0^{n-1} {}^i f(x_i, y_l)(x_{i+1} - x_i) \right],$$

wobei sich das zweite Limeszeichen nur auf die Differenzen $x_{i+1} - x_i$ bezieht. Ausführlich geschrieben enthält die eckige Klammer den Grenzwert der Summe:

$$f(x_0, y_l)(x_1 - x_0) + f(x_1, y_l)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1}, y_l)(X - x_{n-1}).$$

Sie hat die Form der Summe J in Nr. 410 mit dem einzigen Unterschiede, daß hier überall in f außer den Werten x_0, x_1, $\ldots x_{n-1}$ noch *ein und derselbe* Wert y_l auftritt. Danach ist der Grenzwert das Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x, y_l)\,dx,$$

[573

dessen Integrand außer von x noch von einem *Parameter* y_l abhängt. Nach Satz 18, Nr. 487, worin jetzt α durch y_l ersetzt werden muß, ist dies Integral eine *stetige* Funktion von y_l innerhalb des Intervalles $y_0 \leqq y_l \leqq Y$. Wir wollen sie mit $F(y_l)$ bezeichnen:

$$F(y_l) = \int_{x_0}^{X} f(x, y_l)\,dx. \tag{4}$$

Das Doppelintegral (2), d. h. der Grenzwert (3), hat nunmehr die Form:

$$\lim \sum_{0}^{m-1} (y_{l+1} - y_l) F(y_l)$$

und ist daher derjenige Grenzwert der Summe:

$$F(y_0)(y_1 - y_0) + F(y_1)(y_2 - y_1) + \cdots + F(y_{m-1})(Y - y_{m-1}),$$

der hervorgeht, wenn alle Differenzen $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, ... $Y - y_{m-1}$ nach Null streben, wobei ihre Anzahl über jede Zahl wächst. Da $F(y)$ im Intervalle $y_0 \leqq y \leqq Y$ stetig ist, so ergibt sich als dieser Grenzwert nach Nr. 410 das bestimmte Integral:

$$\int_{y_0}^{Y} F(y)\,dy.$$

Somit geht der Wert des Doppelintegrals (2) durch zwei aufeinander folgende einfache Integrationen hervor, denn es ist hiernach:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{y_0}^{Y} F(y)\,dy, \quad \text{wobei} \quad F(y) = \int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx$$

nach (4) ist, so daß wir auch schreiben können:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{y_0}^{Y}\left[\int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx\right]dy.$$

Satz 3: Ist $f(x, y)$ eine im Variabilitätsbereiche

$$x_0 \leqq x \leqq X, \qquad y_0 \leqq y \leqq Y$$

stetige Funktion von x und y, so ist das Doppelintegral

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dx\,dy,$$

d. h. der Grenzwert der Summe:

$$\sum_{0}^{n-1}{}^{i}\sum_{0}^{m-1}{}^{l} f(x_i, y_l)(x_{i+1} - x_i)(y_{l+1} - y_l)$$

für den Fall, daß alle Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... $X - x_{n-1}$ und $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, ... $Y - y_{m-1}$ nach Null streben, gleich dem Ergebnisse der Aufeinanderfolge zweier einfacher Integrationen, nämlich gleich

$$\int_{y_0}^{Y}\left[\int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx\right]dy \quad \text{oder} \quad \int_{x_0}^{X}\left[\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy\right]dx.$$

Daß wir nämlich auch zuerst hinsichtlich y und alsdann hinsichtlich x hätten integrieren dürfen, läßt sich ganz ebenso zeigen, folgt aber auch sofort aus Satz 20, Nr. 489. Wir haben ja schon von Nr. 489 an wiederholt Doppelintegrale betrachtet, jedoch nur in spezieller Auffassung, nämlich als Ergebnisse zweier aufeinanderfolgender Quadraturen.

574. Verallgemeinerungen. Wir werden nunmehr den grundlegenden Satz 2 von Nr. 572 verallgemeinern.

Zunächst liegt eine Verallgemeinerung entsprechend der in Nr. 408 sehr nahe: Anstatt die Doppelsumme aus den Produkten aller Teilrechtecke mit denjenigen Werten zu bilden, die der Funktion $f(x, y)$ jeweils an den Anfangsecken der Rechtecke zukommen, können wir auch die Doppelsumme aus den Produkten aller Teilrechtecke mit solchen Werten benutzen die der Funktion $f(x, y)$ jeweils *an irgend welchen Stellen der betreffenden Rechtecke* zukommen. Denn wenn wir die Teilung so weit verfeinert haben, daß die Funktion in jedem Teile um weniger als τ schwankt, so weicht die neue Doppelsumme von der alten um weniger als das Produkt des Gesamtrechtecks $ABCD$ mit τ ab, und dies Produkt hat für $\lim \tau = 0$ den Grenzwert Null.

Wir können nun noch weiter gehen: Wir nehmen jetzt an, der Variabilitätsbereich, innerhalb dessen $f(x, y)$ eine stetige Funktion von x und y ist, werde geometrisch durch die *Gesamtfläche zweier aneinander grenzender Rechtecke* dargestellt, deren Seiten der x- und y-Achse parallel sind, siehe Fig. 51. Wenn wir diesen Bereich durch Parallelen zu den Achsen zerlegen, so soll also die Summe J aller Produkte gebildet werden, von denen jedes einzelne durch die Multiplikation der Fläche eines Teilgebietes mit demjenigen Werte entsteht, den die Funktion $f(x, y)$ an irgend einer Stelle des betreffenden Teilgebietes erreicht. Solche Teilgebiete, die von einem Rechteck ins andere hinübergreifen, wie z. B. $\alpha\beta\gamma\delta$ in der Figur, liefern Summanden, die wir in Summen von je zwei Produkten zerlegen können, von denen sich das eine auf den im ersten Rechtecke und das andere auf den im zweiten Rechtecke gelegenen Flächenteil bezieht. Die Summe J wird demgemäß in zwei Summen J_1 und J_2 zerlegt, die — abgesehen von einem sogleich zu erörternden Unterschiede — für die beiden Rechtecke genau dieselbe Bedeutung haben wie die frühere, auf ein einziges Rechteck $ABCD$ bezügliche Doppelsumme, so daß das Vorhandensein eines einzigen bestimmten endlichen Grenzwertes von J feststeht.

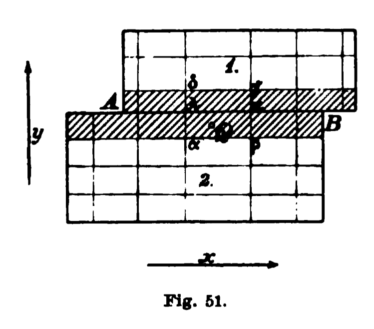


Fig. 51.

Der noch zu erörternde Unterschied ist dieser: Fassen wir z. B. das Teilgebiet $\alpha\beta\gamma\delta$ ins Auge, das durch die Grenze AB zwischen den beiden gegebenen Rechtecken in zwei Teile $\alpha\beta\varkappa\lambda$ und $\lambda\varkappa\gamma\delta$ zerlegt wird, so kann es sein, daß der auf $\alpha\beta\gamma\delta$ bezügliche Summand von J das Produkt der Fläche $\alpha\beta\gamma\delta$ mit dem Werte von $f(x, y)$ an einer Stelle Q des Stückes $\alpha\beta\varkappa\lambda$ ist, so daß J_1 als Summanden das Produkt der Fläche $\lambda\varkappa\gamma\delta$ mit einem Werte von f enthält, der einer Stelle des benachbarten Stückes $\alpha\beta\varkappa\lambda$ zukommt. Es ist dies eine Abweichung von der ursprünglichen Bedeutung der Summe J_1, wonach ja jedes Flächenstück mit dem Werte von f an einer

Stelle desselben Flächenstückes zu multiplizieren ist. Dennoch macht diese Abweichung nichts wesentliches aus, denn da wir annehmen können, daß in allen Teilgebieten $\alpha\beta\gamma\delta$ die Schwankung von f kleiner als eine vorgegebene beliebig kleine Zahl τ sei, so ist der Unterschied nicht größer als das Produkt des in Fig. 51 schraffierten Flächenstreifens mit τ, und der Grenzwert dieses Produktes ist gleich Null für $\lim \tau = 0$.

Weiterhin folgt, daß wir die Ergebnisse entsprechend auf den Fall ausdehnen dürfen, daß der Variabilitätsbereich der Funktion $f(x, y)$ aus der Gesamtfläche einer *Schicht von Rechtecken* besteht, deren Seiten der x- bzw. y-Achse parallel sind, wie in Fig. 52. Denn hier würde der soeben berührte Unterschied kleiner als das Produkt der beliebig kleinen positiven Zahl τ mit den Summen der Flächen schmaler Streifen längs der Grenzen zwischen benachbarten Rechtecken der Schicht sein. Da die Summe dieser schmalen Streifen kleiner als die Gesamtfläche E der ganzen Schicht ist, so würde der Unterschied geringer als $E\tau$ sein, und dieser Wert hat für $\lim \tau = 0$ den Grenzwert Null, vorausgesetzt natürlich, daß die Gesamtfläche E endlich ist.

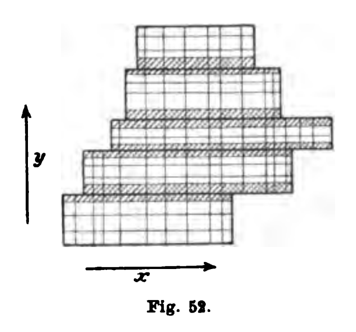


Fig. 52.

575. Das Doppelintegral erstreckt über einen beliebigen Bereich. Jetzt wollen wir annehmen, der Variabilitätsbereich der stetigen Funktion $f(x, y)$ werde durch ein Flächenstück E in der xy-Ebene dargestellt, dessen Rand eine *stetige* Kurve k sei. Dies schließt dabei wohlbemerkt in sich, daß das Flächenstück E *endliche* Ausdehnungen hat.

Teilgeraden parallel den Achsen zerlegen die Fläche E in kleinere Gebiete; alsdann soll die Summe J betrachtet werden, deren Summanden die Produkte der Teilgebiete mit solchen Werten sind, die $f(x, y)$ an Stellen der Teilgebiete erreicht, und wieder soll gezeigt werden, daß J einen einzigen bestimmten endlichen Grenzwert hat, wenn *alle* Abstände je zweier aufeinanderfolgender Teilgeraden nach Null streben.

Zum Beweise beschreiben wir dem Flächenstück E eine Schicht von Rechtecken ein, deren Seiten den Achsen parallel sind, siehe Fig. 53, und betrachten zunächst nur dasjenige Flächenstück E', das aus den Flächen aller dieser Rechtecke besteht und kleiner als E ist. Der Rand k' von E' ist ein treppenförmiger, der Kurve k einbeschriebener Linienzug. Nun hat die auf die Fläche E' bezügliche Summe J' nach voriger Nummer gewiß einen bestimmten endlichen Grenzwert. Vermehren wir die Ecken von k', so können wir den Linienzug k' der Kurve k beliebig weit annähern, so daß schließlich die auf E' bezügliche Summe J' in die auf E bezügliche Summe J übergeht. Hiermit ist die Behauptung bewiesen, abgesehen von einem noch zu erörternden Umstande: Wie weit wir auch die Annäherung von k' an k treiben mögen, immer noch liegen zwischen k' und k Gebietsteile von E, die also Anlaß zu solchen Summanden von J geben, die in J' nicht enthalten sind. Demnach muß noch gezeigt werden, daß die auf den *Randbereich* $E - E'$ zwischen k und k' bezügliche Summe den Grenzwert Null hat.

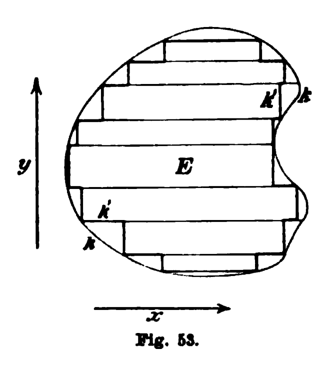


Fig. 53.

Es sei G der größte und K der kleinste Wert, den die Funktion f überhaupt in dem Variabilitätsbereich E annimmt. Die auf den Randbereich bezügliche Summe ist als Summe von Produkten von Teilen des Randbereiches mit Werten der Funktion zwischen $G(E - E')$ und $K(E - E')$ gelegen. Sobald nun k' nach dem Rande k konvergiert, so strebt $E - E'$ nach Null, vgl. Satz 1, Nr. 531, daher auch $G(E - E')$ und $K(E - E')$ und folglich auch die auf den Randbereich bezügliche Summe.

Wir sind also zu dem wichtigen Satze gelangt:

Satz 4: Ist $f(x,y)$ eine solche Funktion von x und y, die in einem Variabilitätsbereiche stetig ist, der durch ein von einer stetigen Kurve umschlossenes Flächenstück E in der xy-Ebene dargestellt wird, und ist der Bereich durch Parallelen zur x- und y-Achse zerlegt worden, so hat die Summe aus den Produkten aller Teilflächen mit Werten, die der Funktion $f(x,y)$ jeweils

an irgend welchen Stellen der betreffenden Teilflächen zukommen, einen von der besonderen Art der Teilung unabhängigen bestimmten endlichen Grenzwert, sobald alle Entfernungen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Teilgeraden nach Null streben.

Die Summe läßt sich symbolisch kurz darstellen. Wir können nämlich von den bei der Teilung entstehenden unvollständigen Rechtecken nach dem früheren absehen. Betrachten wir also irgend eines der vollständigen Rechtecke. Es mögen $\varDelta x$ und $\varDelta y$ seine Seitenlängen sein, und ferner sei (x, y) irgend ein Punkt im Innern dieses Rechtecks oder auf seinem Rande. Alsdann ist das Produkt von $\varDelta x \varDelta y$ mit $f(x, y)$ der auf dies Rechteck bezügliche Summand von J, so daß die Gesamtsumme symbolisch durch

$$J = \sum_{\varDelta x} \sum_{\varDelta y} f(x, y) \varDelta x \varDelta y$$

dargestellt wird.

Der Grenzwert von J heißt wieder (vgl. Nr. 573) ein *Doppelintegral*

$$\lim J = \iint_E f(x, y)\, dx\, dy,$$

erstreckt über den Bereich E, was durch den Index angedeutet werden soll.

576. Auswertung des Doppelintegrals durch zwei aufeinanderfolgende einfache Integrationen. Längs des Randes k des Variabilitätsbereiches E erreicht die Abszisse x einen kleinsten bzw. größten Wert x_0 bzw. X, siehe Fig. 54. Der Einfachheit halber wollen wir zunächst annehmen, die Fläche E sei so beschaffen, daß jede Parallele zur y-Achse, deren Abszisse zwischen x_0 und X liegt, den Rand k gerade zweimal trifft und zwar in Punkten mit den Ordinaten:

$$(1) \qquad y_1 = \varphi_1(x), \qquad y_2 = \varphi_2(x),$$

wobei $y_2 > y_1$ sei. Diese Ordinaten y_1 und y_2 sind nämlich augenscheinlich mit x veränderlich, also Funktionen von x. Wir nehmen an, daß sie *stetige* Funktionen von x seien für

$x_0 \leqq x \leqq X$. Die Gleichungen (1) stellen den unteren und oberen Teil der Randkurve k dar. In der Summe

$$J = \sum_{\varDelta x} \sum_{\varDelta y} f(x, y)\, \varDelta x\, \varDelta y$$

fassen wir nunmehr alle Glieder zusammen, die sich auf Teilrechtecke in einer Reihe parallel zur y-Achse beziehen, d. h. mit demselben x und $\varDelta x$, so daß wir schreiben:

(2) $$J = \sum_{\varDelta x} \varDelta x \left(\sum_{\varDelta y} f(x, y)\, \varDelta y \right).$$

Wir dürfen annehmen, daß in jedem Teilrechtecke $\varDelta x\, \varDelta y$ als Wert von $f(x, y)$ der Wert an der Anfangsecke des Rechtecks

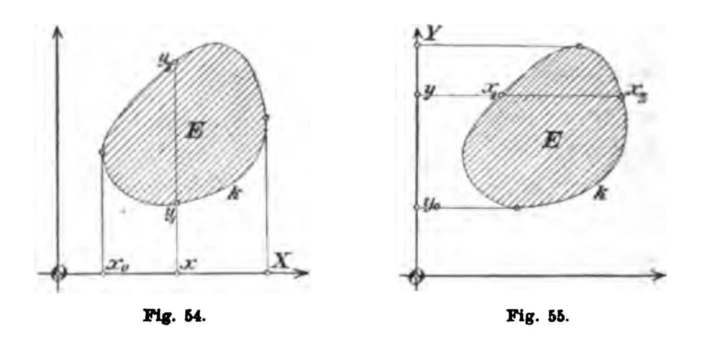


Fig. 54. Fig. 55.

gewählt wird, d. h. an der Stelle mit den kleinsten Koordinaten x, y. Die in der Klammer in (2) enthaltene Summe hat alsdann nach Nr. 410 als Grenzwert für $\lim \varDelta y = 0$ den Wert:

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy,$$

worin y_1 und y_2 die Werte (1) haben und x die gemeinsame Abszisse aller Anfangsecken der betrachteten Rechtecke ist. In dem Integrale spielt der Wert von x die Rolle eines Parameters. Nach Satz 18, Nr. 487, ist das Integral die Differenz aus einer stetigen Funktion von x und y_2 und derselben stetigen Funktion von x und y_1. Da für y_1 und y_2 nach (1) stetige Funktionen von x zu setzen sind, so folgt, daß der

Wert dieses Integrals eine *stetige Funktion von x allein im Intervalle* $x_0 \leqq x \leqq X$ ist. Wir wollen sie mit $u(x)$ bezeichnen:

(3) $$\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = u(x).$$

Nach (2) ist nun der Grenzwert von $\Sigma u(x)\Delta x$ zu bilden für $\lim \Delta x = 0$, d. h. wir summieren jetzt — nachdem wir vorhin über alle Rechtecke eines zur y-Achse parallelen *Streifens* summiert haben — über alle diese Streifen, indem wir x von x_0 bis X um die jeweilige Streifenbreite Δx wachsen und schließlich alle Δx nach Null streben lassen. Der hervorgehende Grenzwert ist nach Nr. 410:

(4) $$\lim J = \int\!\!\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X} u(x)\,dx,$$

wofür wir auch nach (3) schreiben können:

(5) $$\int\!\!\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx.$$

Der Wert des Doppelintegrals geht also durch Ausführung zweier aufeinanderfolgender Integrationen hervor, wobei die erste zwischen *veränderlichen*, die zweite zwischen *festen* Grenzen stattfindet.

Natürlich können wir auch umgekehrt vorgehen, d. h. zunächst die Summanden für einen Rechtecksstreifen parallel der x-Achse betrachten. Ist y_0 der kleinste und Y der größte Wert, den y auf dem Rande k von E erreicht, siehe Fig. 55, so möge, wie wir annehmen wollen, jede Parallele zur x-Achse, deren Ordinate zwischen y_0 und Y liegt, die Kurve k gerade zweimal treffen in den Punkten mit den Abszissen:

$$x_1 = \psi_1(y), \qquad x_2 = \psi_2(y),$$

wobei $x_2 > x_1$ sei. Sind ψ_1 und ψ_2 stetige Funktionen von y im Intervalle $y_0 \leqq y \leqq Y$, so kommt entsprechend der Formel (5):

(6) $$\int\!\!\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y_0}^{Y}\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy.$$

Komplizierter wird die Auswertung des Doppelintegrals, wenn die Kurve k von den Parallelen zur x- oder y-Achse in mehr als zwei Punkten getroffen wird. Nehmen wir z. B. den Fall der Figur 56 an und wollen wir zuerst hinsichtlich y integrieren, so zerlegen wir den ganzen Bereich E durch Parallelen zur y-Achse in Teile E_1, E_2, E_3 so, daß der Rand jedes einzelnen Teils von den Parallelen zur y-Achse nur zweimal getroffen wird. Alsdann ist augenscheinlich

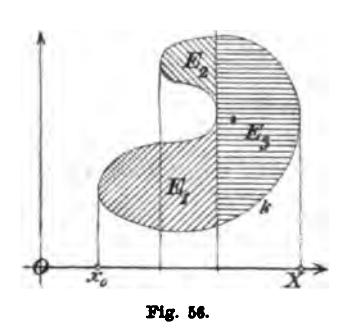


Fig. 56.

$$\int\int_E f\,dx\,dy = \int\int_{E_1} f\,dx\,dy + \int\int_{E_2} f\,dx\,dy + \int\int_{E_3} f\,dx\,dy,$$

da ja das Doppelintegral der Grenzwert einer auf den ganzen Bereich E erstreckten *Summe* ist. Bei jedem einzelnen Teilbereiche E_1, E_2, E_3 können wir nun genau so vorgehen wie in Fig. 54.

Entsprechend hat man in anderen Fällen zu verfahren.

577. Allgemeinere Auffassung des Doppelintegrals. Der Bereich E, innerhalb dessen $f(x, y)$ als stetige Funktion von x und y angenommen worden war, kann auch in anderer Weise als durch Parallelen zu den Achsen zerlegt werden, z. B., wie es in Fig. 57 angedeutet ist, durch zwei Scharen von stetigen Kurven. In jedem entstehenden Teilgebiete werde wieder eine Stelle Q oder (x, y) beliebig gewählt und alsdann der zugehörige Wert f_Q von f mit dem Flächeninhalte $\varDelta E$ des Teiles multipliziert. Die Behauptung ist nun die, daß die Summe aller so entstehenden Produkte

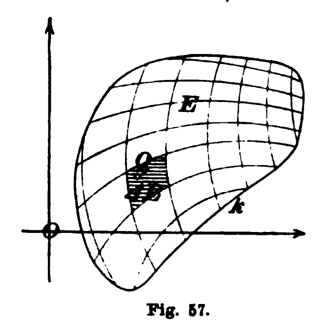


Fig. 57.

$$S = \sum_E f_Q \varDelta E,$$

erstreckt über den ganzen Bereich E, ebenfalls den Grenzwert

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy$$

hat. Der Grenzübergang soll dabei so stattfinden, daß jedes Teilgebiet ΔE nicht nur nach dem Betrage seines Flächenraumes, sondern auch nach seiner geometrischen Ausdehnung ohne Ende abnehme. Dies erreichen wir so: Wir wählen eine beliebig kleine positive Zahl τ, so daß es nach Satz 1, Nr. 570, eine zugehörige positive Zahl σ gibt. Alsdann soll jeder Teilbereich ΔE so klein gewählt werden, daß er innerhalb eines solchen Quadrates liegt, in dem x und y nur um das Intervall σ variieren können, so daß die Kanten des Quadrates gleich σ sind.

Es soll nun also bewiesen werden, daß für $\lim \tau = 0$, wobei alle Teilgebiete ΔE ihrer Größe und ihren Längsausdehnungen nach zur Grenze Null streben, während ihre Anzahl dementsprechend über jede Zahl wächst, die obige Summe S das Doppelintegral zur Grenze hat.

Wenn wir nach der früheren Art den Bereich E durch Parallelen zur x- und y-Achse in lauter *gleich große Quadrate* mit den Seitenlängen σ zerlegen, alsdann $f(x,y)$ jedesmal für die Anfangsecke eines solchen Quadrates bilden und mit der Fläche σ^2 des Quadrates multiplizieren, so wissen wir, daß die Summe

$$J = \sum_E f(x,y)\,\sigma^2$$

aller entstehenden Produkte, erstreckt über den ganzen Bereich E, zum Grenzwerte für $\lim \tau = 0$ das Doppelintegral hat. Zu dieser Summe J aber können wir die Summe S in nahe Beziehung bringen.

Denn nach den gemachten Annahmen gehört jedes Teilgebiet ΔE höchstens vier aneinander stoßenden Quadraten σ^2 an, siehe Fig. 58, worin die Anfangsecken der Quadrate markiert sind. Der im Summanden $f_Q \Delta E$ auftretende Faktor f_Q ist der Wert von $f(x,y)$ für eine Stelle Q von ΔE. Im ganzen Teilgebiete ΔE schwankt $f(x,y)$ um weniger als τ. Daher weicht f_Q von einem Werte, den $f(x,y)$ in irgend einem

andern Punkte Q' von $\varDelta E$ hat, um weniger als τ ab. Andererseits weicht der Wert von f für Q' um weniger als τ von demjenigen Werte ab, den f an der Anfangsecke des Quadrates mit dem Punkte Q' erreicht. Wenn wir also in dem Summanden $f_Q \varDelta E$ erstens die Fläche $\varDelta E$ in ihre vier, den einzelnen Quadraten angehörige Teile $\varDelta_1 E$, $\varDelta_2 E$, $\varDelta_3 E$ und $\varDelta_4 E$ zerlegen und zweitens f_Q durch die Werte f_1, f_2, f_3, f_4 von f an den Anfangsecken der Quadrate ersetzen, so wird der Summand $f_Q \varDelta E$ von dem viergliedrigen Ausdrucke

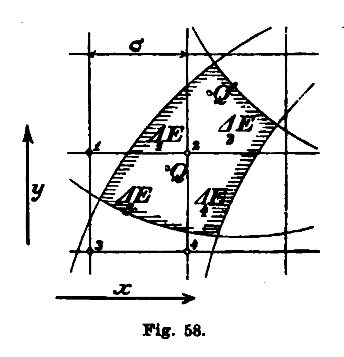


Fig. 58.

$$f_1 \varDelta_1 E + f_2 \varDelta_2 E + f_3 \varDelta_3 E + f_4 \varDelta_4 E$$

um weniger als $2\tau(\varDelta_1 E + \varDelta_2 E + \varDelta_3 E + \varDelta_4 E)$, d. h. um weniger als $2\tau \varDelta E$ abweichen. Hieraus folgt für die Summen S und J, hinerstreckt über den ganzen Bereich E, daß sie um weniger als $2\tau E$ voneinander verschieden sind. Für $\lim \tau = 0$ ist aber $\lim 2\tau E$ ebenfalls gleich Null.

Somit folgt

Satz 5: Ist $f(x, y)$ eine solche Funktion von x und y, die in einem Variabilitätsbereiche stetig ist, der durch ein von einer stetigen Kurve umschlossenes Flächenstück E in der xy-Ebene dargestellt wird, und zerlegt man den Bereich irgendwie in Teile $\varDelta E$, multipliziert man darauf jedes Teilflächenstück $\varDelta E$ mit demjenigen Werte f_Q, den die Funktion $f(x, y)$ an irgend einer Stelle Q des Teilgebietes erreicht, und bildet man schließlich die Summe aller so entstehenden Produkte:

$$\sum_E f_Q \varDelta E,$$

so hat diese Summe den bestimmten endlichen Grenzwert

$$\iint_E f(x, y)\,dx\,dy,$$

vorausgesetzt, daß die Ausdehnungen eines jeden Teilgebietes $\varDelta E$ nach Null streben und dementsprechend die Anzahl aller Teilgebiete über jede Zahl wächst.

Es dürfte angebracht sein, nochmals darauf aufmerksam zu machen, daß die Voraussetzung, der Bereich sei von einer *stetigen* Kurve umschlossen, in sich schließt, daß die Fläche E des Bereiches einen *endlichen* Wert hat. In der Tat ist dies ja eine ganz wesentliche Bedingung bei den vorher durchgeführten Betrachtungen, da z. B. sonst aus $\lim \tau = 0$ nicht auch $\lim 2\tau E = 0$ folgen würde.

578. Definition des Volumens. Wir sind jetzt endlich in der Lage, die allgemeine Definition des Volumens zu geben. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, im Raume mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z sei eine *Fläche*

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

gegeben. Die Funktion $f(x, y)$ soll stetig sein innerhalb eines solchen Bereiches, der durch die Punkte (x, y) eines stetig umschlossenen Stückes E der xy-Ebene dargestellt wird. Indem wir längs des Randes k dieses Stückes E den zur xy-Ebene senkrechten Zylinder errichten, umschließen wir durch ihn, die xy-Ebene und die Fläche (1) einen Raumteil, dessen *Volumen* wir nunmehr *definieren* als den zugehörigen Wert des Doppelintegrals:

$$\iint_E f(x, y)\,dx\,dy.$$

Es bedeutet dies nach den letzten Sätzen folgendes:

Satz 6: Liegt eine Fläche

$$z = f(x, y)$$

vor, die stetig ist für alle solche Punkte P oder (x, y, z), deren Projektionen Q oder (x, y) auf der xy-Ebene innerhalb eines stetig umschlossenen Flächenstückes E der xy-Ebene liegen, so ist das Volumen

$$V = \iint_E f(x, y)\,dx\,dy$$

zwischen der xy-Ebene, der Fläche $z = f(x, y)$ und demjenigen geraden Zylinder, der die Fläche E zum Querschnitte hat, als Grenzwert einer Summe vom Prismenvolumen aufzufassen, die so ent-

steht: Das ebene Flächenstück E wird in beliebiger Weise in Teile $\varDelta E$ zerlegt und über jedem Teile wird ein gerades Prisma errichtet, dessen Höhe gleich der Höhe z der Fläche $z = f(x, y)$ über irgend einer Stelle von $\varDelta E$ ist. Die Summe der Volumina aller dieser Prismen hat alsdann das Volumen V zum Grenzwerte, wenn die Ausdehnungen aller Prismengrundflächen nach Null streben und dementsprechend ihre Anzahl über jede Zahl wächst.

Wir fügen hinzu: Die gegebene Definition lehrt, *daß solche Raumteile, für die z negativ ist, bei der Volumenbestimmung negativ in Rechnung treten.* Man vergleiche das Entsprechende in Nr. 409.

Indem wir statt des zu berechnenden Volumens zunächst die Summen von Prismenvolumen betrachten, ersetzen wir die Fläche $z = f(x, y)$ durch eine andere stetige Fläche, gebildet von den zweiten ebenen Endflächen der Prismen und den Prismenwänden, soweit diese nicht je zwei aneinanderstoßenden Prismen gemein sind. Wir haben also die gegebene Fläche in ziemlich allgemeiner Weise durch eine solche Fläche ersetzt, die überall beim Grenzübergange zur gegebenen Fläche hinstrebt. Wir können aber einen noch allgemeineren Ersatz anwenden.

Es sei nämlich

(2) $$z = \varphi(x, y)$$

die Gleichung einer *zweiten* Fläche, die über demselben Bereiche E der xy-Ebene stetig sein soll. Es sei ferner τ eine positive Zahl derart, daß an *jeder* Stelle (x, y) des Bereiches E

(3) $$|f(x, y) - \varphi(x, y)| < \tau$$

ist. Alsdann gehört zur zweiten Fläche entsprechend ein Volumen:

$$W = \iint\limits_E \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

Wir wollen untersuchen, wie stark es von dem Volumen V der ersten Fläche abweicht.

Wenn wir für W dieselbe Zerlegung von E in Teilgebiete wie für V anwenden, so unterscheiden sich die zu benutzenden

Prismen von denen des ersten Volumens nur in den Höhen und zwar nach (3) um weniger als τ, d. h. es ist

$$|W - V| < \tau E.$$

Da für $\lim \tau = 0$ hieraus $\lim W = V$ folgt, so finden wir den zu Satz 1 von Nr. 531 analogen

Satz 7: Konvergiert eine über einem stetig umschlossenen endlichen Bereiche E der xy-Ebene gelegene stetige Fläche

$$z = \varphi(x, y)$$

nach einer ebenda stetigen und bestimmt gegebenen Fläche

$$z = f(x, y),$$

so ist auch der Grenzwert des Volumens zwischen E, dem geraden Zylinder mit dem Querschnitte E und der ersten Fläche gleich dem Volumen zwischen E, demselben Zylinder und der zweiten Fläche.

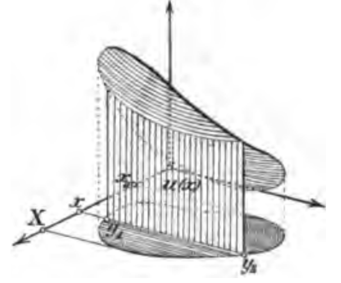


Fig. 59.

Noch haben wir zu zeigen, daß die Volumenformel (1) in Nr. 563 in der Tat aus der oben gegebenen Definition des Volumens entspringt. Dies aber sieht man so: In Nr. 576 ergab sich unter (4) für das Doppelintegral oder Volumen der Wert:

$$V = \iint\limits_E f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{x_0}^{X} u(x)\, dx,$$

wobei

$$u(x) = \int\limits_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$$

war. Es bedeuteten dabei y_1 und y_2 die äußersten Werte, die zu einem beliebigen x im Bereiche E gehören. Bei festgehaltenem x aber ist $z = f(x, y)$ nichts anderes als die Gleichung der Kurve, in der die zugehörige zur x-Achse senkrechte Ebene die Fläche (1) schneidet. Siehe Fig. 59. Folglich hat $u(x)$ nach Satz 7, Nr. 411, in der Tat gerade

diejenige Bedeutung, die $u(x)$ in der Volumenformel (1) von Nr. 563 zukommt. Nämlich $u(x)$ ist die Fläche des Querschnittes, in dem die angenommene Ebene das Volumen V schneidet.

§ 3. Anwendungen.

579. Beispiel zur Berechnung eines Doppelintegrals. Als Beispiel zu Nr. 576 wählen wir folgendes: Es soll dasjenige Volumen V berechnet werden, das zwischen dem *hyperbolischen Paraboloid*

$$z = xy,$$

der xy-Ebene und demjenigen geraden Zylinder liegt, dessen Querschnitt E in der xy-Ebene das zwischen der Parabel

$$y = x^2,$$

der x-Achse und der zu $x = a$ gehörigen Parabelordinate $y = a^2$ gelegene Flächenstück ist, siehe Fig. 60 für $a = 1$. Zunächst berechnen wir dies Volumen

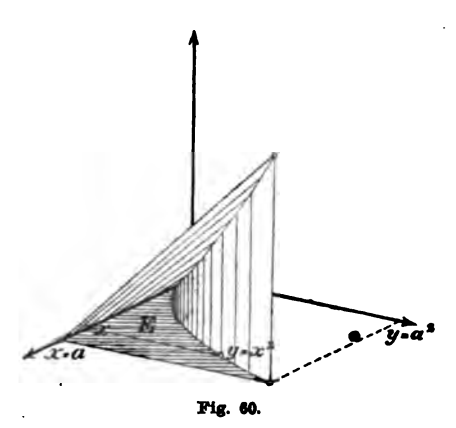


Fig. 60.

$$V = \int\int_E xy\,dx\,dy,$$

indem wir zuerst hinsichtlich y, alsdann hinsichtlich x integrieren. Die Gerade in der xy-Ebene, die der y-Achse parallel ist und eine beliebige zwischen 0 und a gelegene Abszisse x hat, gehört dem Bereiche E von $y = 0$ bis $y = x^2$ an. Also kommt nach (5) in Nr. 576:

$$V = \int_0^a \left[\int_0^{x^2} xy\,dy\right] dx.$$

Es ist $\int xy\,dy = x\int y\,dy = \frac{1}{2}x(y^2 + \text{konst.})$, demnach:

$$V = \int_0^a \tfrac{1}{2}x(x^2)^2 dx = \tfrac{1}{2}\int_0^a x^5 dx = \tfrac{1}{12}a^6.$$

Dasselbe Volumen V soll jetzt auf dem zweiten Wege berechnet werden, indem wir zuerst hinsichtlich x und dann hinsichtlich y integrieren. Eine beliebige Gerade in der xy-Ebene, parallel zur x-Achse und mit irgend einer zwischen 0 und a^2 gelegenen Ordinate y gehört dem Bereiche E von $x = \sqrt{y}$ bis $x = a$ an, wobei $\sqrt{y}$ positiv ist. Demnach ergibt sich in Gemäßheit der Formel (6) von Nr. 576:

$$V = \int_0^{a^2} \left[\int_{\sqrt{y}}^{a} xy\,dx \right] dy.$$

Es ist $\int xy\,dx = y\int x\,dx = \frac{1}{2}y(x^2 + \text{konst.})$ und folglich

$$V = \int_0^{a^2} \frac{1}{2}y(a^2 - y)dy = \frac{1}{12}a^6,$$

so daß wir in der Tat denselben Wert wie vorhin finden.

580. Eine Formel von Dirichlet. Eine andere einfache Anwendung liefert uns eine merkwürdige von *Dirichlet* benutzte Formel. Es sei $f(x, y)$ eine stetige Funktion von x und y innerhalb des durch die Geraden $x = a$, $y = 0$, $y = x$ begrenzten Bereiches E der xy-Ebene, siehe Fig. 61, so daß die über diesem Bereiche liegende Fläche $z = f(x, y)$ zusammen mit E und den Ebenen $x = a$, $y = 0$, $y = x$ ein gewisses Volumen einschließt, das als Doppelintegral darstellbar ist.

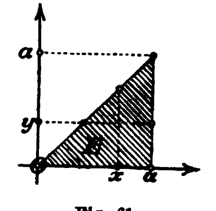


Fig. 61.

Je nachdem wir zuerst hinsichtlich y oder hinsichtlich x integrieren, erhalten wir die beiden Formen des Doppelintegrals:

$$\int_0^a \left[\int_0^x f(x, y)dy \right] dx = \int_0^a \left[\int_y^a f(x, y)dx \right] dy,$$

und dies ist die Dirichletsche Formel. Sie gilt übrigens auch, wenn $f(x, y)$ in dem Variabilitätsbereiche E gewisse Unstetigkeiten aufweist, worauf wir jedoch nicht eingehen.

581. Das Volumen innerhalb einer geschlossenen Fläche $F(x, y, z) = 0$. Wenn eine durch die Gleichung

(1) $$F(x, y, z) = 0$$

definierte Fläche einen Raumteil völlig einschließt, wie es z. B. ein Ellipsoid tut, so hat man, um das Volumen dieses Raumteils zu berechnen, nach folgender Anleitung vorzugehen:

Wir nehmen an, daß es sich um einen einzigen zusammenhängenden Raumteil handelt und daß diejenigen Parallelen zur z-Achse, die überhaupt die Fläche treffen, sie nur zweimal schneiden, d. h. daß die Gleichung (1) nach z aufgelöst zwei Werte gibt:

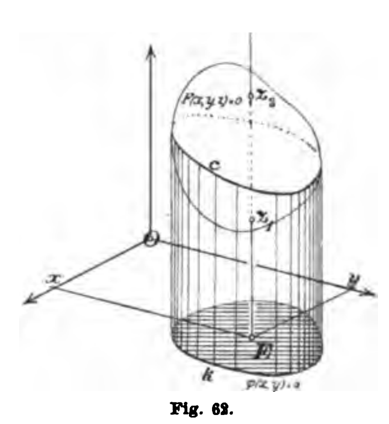


Fig. 62.

(2) $z_1 = f_1(x, y), \quad z_2 = f_2(x, y),$

von denen etwa z_2 der größere sei. Siehe Fig. 62. Die Punkte (x, y, z_1) sind von den Punkten (x, y, z_2) durch eine Kurve c der Fläche getrennt, und zwar ist in jedem Punkte dieser Kurve c die Tangentenebene zur xy-Ebene senkrecht, d. h. die Ableitung

(3) $$F_z(x, y, z) = 0$$

nach (6) in Nr. 253. Elimination von z aus (1) und (3) gibt die Gleichung der Projektion k der Kurve c auf die xy-Ebene:

(4) $$\varphi(x, y) = 0.$$

Die Kurve k ist der Rand desjenigen Stückes E der xy-Ebene, dessen Punkte Projektionen von Punkten der Fläche sind. Die Doppelintegrale

$$V_1 = \iint\limits_E f_1(x, y)\, dx\, dy, \qquad V_2 = \iint\limits_E f_2(x, y)\, dx\, dy$$

sind die Volumina zwischen der xy-Ebene, dem zur xy-Ebene senkrechten und die Fläche umhüllenden Zylinder und dem unteren bzw. oberen Teile der Fläche (1). Das zu berechnende Volumen V ist die Differenz von V_2 und V_1. Weil die Doppelintegrale V_1 und V_2 Grenzwerte von Summen sind, die sich auf denselben Variabilitätsbereich E beziehen, so erhellt leicht, daß

$$V = V_2 - V_1 = \iint\limits_E [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dx\, dy$$

ist. Natürlich hat man bei der Anwendung dieses allgemeinen Verfahrens auf einen bestimmten Fall auch zu untersuchen, ob die Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind.

582. Die Volumenformel mit Benutzung von Polarkoordinaten. Zuweilen ist es zweckmäßig, die Grundfläche E nicht gerade in Rechtecke, sondern auf Grund von Nr. 577 in einer anderen, geeigneteren Weise in Teilgebiete $\varDelta E$ zu zerlegen. Es kann z. B. sein, daß sich die Gleichung der Fläche $z = f(x, y)$ besonders einfach darstellt, wenn man in der xy-Ebene vermöge $x = \varrho \cos \omega$ und $y = \varrho \sin \omega$ *Polarkoordinaten* einführt, so daß sich ergibt:

$$(1) \qquad z = \varphi(\omega, \varrho).$$

Dabei dürfen wir nach Nr. 203 annehmen, daß der Radiusvektor ϱ nirgends im Gebiete E *negativ* sei. In diesem Falle wird man nun die Zerlegung von E dadurch bewirken, daß man in der xy-Ebene Strahlen vom Anfangspunkte O aus und konzentrische Kreise um O zieht Siehe Fig. 63. Dann entstehen teilweis krummlinig begrenzte Vierecke $\varDelta E$, und nach Nr. 577 dürfen wir von den am Rande k von E gelegenen unvollständigen Vierecken absehen.

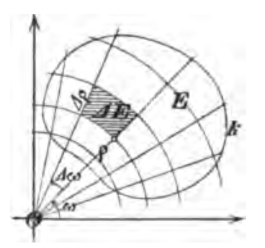


Fig. 63.

Sind nun ω und $\omega + \varDelta\omega$ die Amplituden benachbarter Strahlen sowie ϱ und $\varrho + \varDelta\varrho$ die Radien benachbarter Kreise, wobei wir $\varDelta\omega$ und $\varDelta\varrho$ positiv annehmen können, so hat das von diesen Strahlen und Kreisen eingeschlossene Viereck $\varDelta E$ die Größe:

$$(2) \qquad \varDelta E = \tfrac{1}{2}\varDelta\omega\,[(\varrho + \varDelta\varrho)^2 - \varrho^2] = \varrho\varDelta\omega\varDelta\varrho + \tfrac{1}{2}\varDelta\omega(\varDelta\varrho)^2.$$

Das Volumen V ist daher wegen (1) der Grenzwert der Summe:

$$\sum_{\varDelta\omega}\sum_{\varDelta\varrho}\varrho\varphi(\omega, \varrho)\varDelta\omega\varDelta\varrho + \tfrac{1}{2}\sum_{\varDelta\omega}\sum_{\varDelta\varrho}\varphi(\omega, \varrho)\varDelta\omega(\varDelta\varrho)^2.$$

Wir behaupten, daß der Grenzwert des zweiten Summanden gleich Null ist.

Wenn nämlich M der größte Wert ist, den der absolute Betrag von $z = \varphi(\omega, \varrho)$ im Gebiete E erreicht, so ist:

$$\left|\sum_{\Delta\omega}\sum_{\Delta\varrho}\varphi(\omega,\varrho)\Delta\omega(\Delta\varrho)^2\right| \leqq M\sum_{\Delta\omega}\sum_{\Delta\varrho}(\Delta\varrho)^2\Delta\omega.$$

Es ist aber, falls ω im Bereiche E von ω_0 bis ω_1 wächst:

$$\sum_{\Delta\omega}\sum_{\Delta\varrho}(\Delta\varrho)^2\Delta\omega = \Sigma\Delta\omega\cdot\Sigma(\Delta\varrho)^2 = (\omega_1-\omega_0)\Sigma(\Delta\varrho)^2.$$

Nehmen wir, wie es geschehen darf, alle $\Delta\varrho$ kleiner als eine beliebig kleine positive Zahl σ an, so ist die Summe der $(\Delta\varrho)^2$ kleiner als $\sigma\Sigma\Delta\varrho$, d. h. für $\lim\sigma = 0$ gleich Null, so daß die Behauptung bewiesen ist.

Mithin hat sich die Volumenformel ergeben:

$$V = \lim\sum_{\Delta\omega}\sum_{\Delta\varrho}\varrho\varphi(\omega,\varrho)\Delta\omega\,\Delta\varrho.$$

Nun hat dieser Grenzwert wieder die Form des Grenzwertes (1) in Nr. 573 oder des Grenzwertes von J in Nr. 576, indem nämlich an Stelle der Buchstaben x und y die Zeichen ω und ϱ stehen und statt der Funktion $f(x,y)$ die Funktion $\varrho\varphi(\omega,\varrho)$ auftritt. Daher ist der Grenzwert nichts anders als das Doppelintegral:

(3) $$V = \iint\limits_E \varrho\varphi(\omega,\varrho)\,d\omega\,d\varrho,$$

erstreckt über den ganzen Bereich E. Vorausgesetzt wird hierbei, daß $f(\omega,\varrho)$ im Bereiche E stetig sei.

Was die wirkliche Auswertung dieses Doppelintegrals betrifft, so verfahren wir wie in Nr. 576, indem wir zuerst hinsichtlich der einen Veränderlichen und dann hinsichtlich der andern integrieren, wobei die Grenzen in analoger Weise festzusetzen sind.

Beispiel: In der Ebene eines größten Kreises einer Kugel vom Radius R werde ein Kreis k vom Radius $\frac{1}{2}R$ konstruiert, der durch den Mittelpunkt geht, siehe Fig. 64. Der gerade Zylinder, dessen Querschnitt dieser Kreis ist, schneidet aus der Kugel ein Volumen aus, das berechnet werden soll. Wir fassen nur die oberhalb des Kreises k stehende Volumen-

hälfte ins Auge. Benutzen wir die Ebene jenes größten Kreises als xy-Ebene, so beschränken wir uns also auf positive Werte von z, die bei der Kugel gleich der Wurzel aus $R^2 - x^2 - y^2$ sind, wenn der Mittelpunkt der Kugel als Anfangspunkt O gewählt wird. Die x-Achse legen wir durch den Mittelpunkt des Kreises k. In Polarkoordinaten ω, ϱ hat dieser Kreis k die Gleichung $\varrho = R \cos \omega$, wobei ω von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$ geht, während für die Punkte der Kugel z gleich $\sqrt{R^2 - \varrho^2}$ wird. Dies ist demnach hier die Funktion $\varphi(\omega, \varrho)$. Wollen wir zunächst hinsichtlich ϱ integrieren, so haben wir einen beliebigen Wert von ω zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ anzunehmen und festzustellen, welche Werte von ϱ zu dem durch ω bestimmten Strahle innerhalb des Bereiches E gehören. Dieser Bereich ist das Innere des Kreises k, so daß ϱ von 0 bis $R \cos \omega$ variieren kann. Folglich gibt (3):

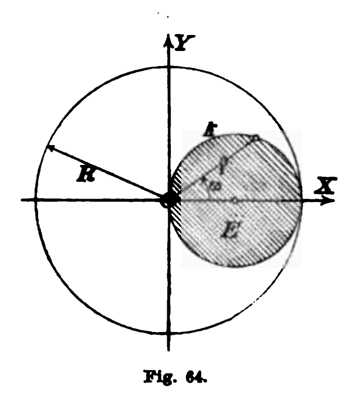


Fig. 64.

$$V = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \left[\int_0^{R\cos\omega} \varrho \sqrt{R^2 - \varrho^2}\, d\varrho \right] d\omega.$$

Es ist nun

$$\int_0^{R\cos\omega} \varrho \sqrt{R^2 - \varrho^2}\, d\varrho = \left[-\tfrac{1}{3} \sqrt{R^2 - \varrho^2}^{\,3} \right]_0^{R\cos\omega}.$$

Hieraus würde für dies Integral der Wert $\frac{1}{3}R^3(1 - \sin^3\omega)$ folgen, da die Quadratwurzel positiv ist und für $\varrho = R \cos \omega$ also gleich $R \sin \omega$ wird. Jedoch dabei wird ein Fehler gemacht. Denn die Quadratwurzel bedeutet die über dem Kreise überall positive Höhe z der Kugel. Für Werte von ω zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und 0 ist aber $\sin \omega$ negativ, also nicht $R \sin \omega$, sondern $-R \sin \omega$ als Wert der Quadratwurzel zu nehmen. Daher zerteilen wir das Integral hinsichtlich ω so:

$$V = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \tfrac{1}{3} R^3 (1 + \sin^3\omega)\, d\omega + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tfrac{1}{3} R^3 (1 - \sin^3\omega)\, d\omega.$$

[582

Das erste geht, wenn ω durch $-\omega$ ersetzt wird, in das zweite über. Also ist:

$$V = \tfrac{2}{3} R^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \sin^3\omega)\, d\omega = \tfrac{2}{3} R^3 \left[\omega + \cos\omega - \tfrac{1}{3}\cos^3\omega\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi R^3 - \tfrac{4}{9} R^3.$$

Der Zylinder, von dem oben die Rede war, schneidet aus der ganzen Kugel das Doppelte dieses Volumens aus, so daß der übrigbleibende Teil der Kugel das Volumen $\frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{8}{9} R^3$ hat.

583. Berechnung eines einfachen Integrals mittels eines Doppelintegrals. Eine lehrreiche Betrachtung ist die folgende, die von *Gauß* und *Poisson* durchgeführt wurde:

Die Fläche

(1) $$z = e^{-(x^2 + y^2)}$$

ist über jeder Stelle (x, y) der xy-Ebene stetig und hat nur positive Höhen z. Daher können wir bei ihrer Volumenberechnung einen beliebigen Bereich E in der xy-Ebene wählen. Zunächst nehmen wir das Quadrat an, dessen Seitenlänge $2a$ ist, dessen Mitte im Anfangspunkte O liegt und dessen Seiten der x- und y-Achse parallel sind. Das über diesem Quadrate gelegene Volumen ist ein Doppelintegral mit festen Grenzen, das nach Satz 3, Nr. 573, sofort in ein Produkt von zwei einfachen Integralen zerfällt:

$$V = \int_{-a}^{+a} \left[\int_{-a}^{+a} e^{-(x^2+y^2)}\, dy \right] dx$$

$$= \int_{-a}^{+a} e^{-x^2} \left[\int_{-a}^{+a} e^{-y^2}\, dy \right] dx = \int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_{-a}^{+a} e^{-y^2}\, dy.$$

Beide Faktoren bedeuten aber dasselbe. Also ist

$$V = \left(\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\, dx \right)^2.$$

Nun wollen wir als Bereich E einen Kreis um den An-

fangspunkt mit dem Radius R annehmen. Das zugehörige Volumen wird bei Anwendung von Polarkoordinaten ω, ϱ:

$$W = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \varrho e^{-\varrho^2} d\varrho\right] d\omega = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

Da die Fläche des Quadrates den eingeschriebenen Kreis mit dem Radius a umschließt, dagegen vom umschriebenen Kreise mit dem Radius $a\sqrt{2}$ umschlossen wird und da die Fläche (1) nur positive Höhen z hat, so liegt das Volumen V zwischen den zu diesen beiden Kreisen gehörigen Volumen. Also folgt:

$$\pi(1 - e^{-a^2}) < \left(\int_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx\right)^2 < \pi(1 - e^{-2a^2}).$$

Es gilt dies für *jeden* Wert von a, so daß für $\lim a = +\infty$ wegen

$$\lim_{a=+\infty} e^{-a^2} = 0, \quad \lim_{a=+\infty} e^{-2a^2} = 0$$

hervorgeht:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi, \quad \text{d. h.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Dies wurde in Nr. 495 auf anderem Wege bewiesen.

§ 4. Komplanation.

584. Definition der Größe eines krummen Flächenstückes. Die Aufgabe der *Komplanation* (Verebnung) ist die, den Betrag der Größe eines bestimmt umrandeten Stückes einer gegebenen krummen Fläche zu berechnen, d. h. auszudrücken als Vielfaches der Flächeneinheit in der Ebene, nämlich des Quadrates von der Seitenlänge Eins. Zunächst fehlt jedoch noch eine exakte Definition der Größe eines solchen Flächenstückes. Deshalb stellen wir folgende Betrachtung an:

Es sei

(1) $$z = f(x, y)$$

die Gleichung einer Fläche, und dabei sei $f(x, y)$ eine *stetige* Funktion von x und y innerhalb eines Bereiches, der in der xy-Ebene durch ein Flächenstück E dargestellt wird. Der Rand k dieses ebenen Bereiches sei eine geschlossene stetige Kurve. Zu den Punkten Q des Bereiches E gehören Punkte P der Fläche (1), nämlich diejenigen Punkte, deren Projektionen in der xy-Ebene die Punkte Q sind.

Wir machen nun noch die Voraussetzung, *daß $f(x, y)$ für alle Wertepaare x, y innerhalb des Bereiches E und auf seinem Rande k stetige erste Ableitungen f_x und f_y nach x und y habe.* Alsdann hat die Fläche (1) in allen Punkten P bestimmte Tangentenebenen (vgl. Nr. 253), außerdem ist keine dieser Tangentenebenen zur xy-Ebene senkrecht, denn es ist nach (10) in Nr. 253

$$Z = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \tag{2}$$

der Kosinus des Winkels, den die positive Flächennormale mit der z-Achse bildet. Dabei ist:

$$p = f_x, \qquad q = f_y, \tag{3}$$

so daß der Nenner von Z wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f_x und f_y stets endlich bleibt. Die Quadratwurzel in (2) ist positiv.

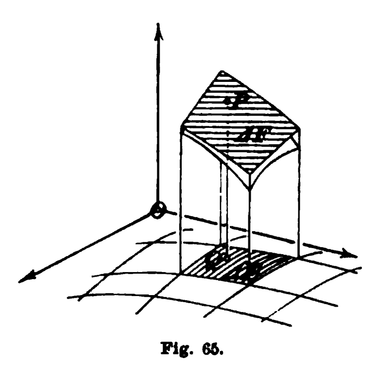


Fig. 65.

Den Bereich E in der xy-Ebene zerlegen wir nun wie in Nr. 577 etwa durch zwei Kurvenscharen in beliebige Teilbereiche ΔE. Wir fassen einen von ihnen ins Auge, siehe Fig. 65, und errichten längs seines Randes den zur xy-Ebene senkrechten Zylinder. Außerdem wählen wir irgend einen Punkt Q von ΔE aus, bestimmen den zugehörigen Punkt P der Fläche (1) und konstruieren die Tangentenebene von P. Der Zylinder schneidet aus dieser Tangentenebene ein ebenes Flächenstück ΔF heraus. Verfahren wir so mit allen Teilgebieten ΔE von E und bilden wir die Summe aller

zugehörigen ebenen Flächenstücke ΔF, so behaupten wir nun, daß diese Summe einen bestimmten endlichen Grenzwert hat, wenn alle Teilgebiete ΔE sowohl ihren Flächeninhalten nach als auch in ihren linearen Ausdehnungen nach Null streben, wobei ihre Anzahl über jede Zahl wächst.

In der Tat, nach dem zweiten Beispiele in Nr. 414 ist ΔE gleich ΔF, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels, den die Ebene von ΔF mit der xy-Ebene bildet. Dieser Kosinus hat aber den Wert (2). Folglich ist

$$\Delta F = \frac{\Delta E}{Z} = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,\Delta E$$

und also

$$\sum \Delta F = \sum \frac{\Delta E}{Z} = \sum \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,\Delta E. \tag{4}$$

Nun aber ist $\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$ eine nach den gemachten Voraussetzungen stetige Funktion von x und y innerhalb des Bereiches E, nämlich gleich $\sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}$. Nach Satz 5, Nr. 577, strebt demnach die in (4) rechts stehende Summe, die über den ganzen Bereich E zu erstrecken ist, bei dem angegebenen Grenzübergange nach einem bestimmten endlichen Werte, nämlich dem des Doppelintegrals:

$$\int\!\!\int_E \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dx\,dy.$$

Wir haben also gefunden:

Satz 8: Ist eine Fläche durch eine Gleichung

$$z = f(x, y)$$

gegeben und sind dabei $f(x, y)$ und die beiden ersten Ableitungen

$$p = f_x, \quad q = f_y$$

stetige Funktionen von x und y innerhalb eines solchen Variabilitätsbereiches, der durch ein stetig umschlossenes Flächenstück E der xy-Ebene dargestellt wird, teilt man ferner diesen Bereich E irgendwie in Teilbereiche ΔE, errichtet auf jedem einen geraden Zylinder und schneidet ihn mit derjenigen Tangentenebene der Fläche, die zu einem Flächenpunkte P innerhalb des Zylinders gehört, so schneiden alle konstruierten Zylinder aus den Tan-

gentenebenen Flächenstücke $\varDelta F$ aus, deren Summe den bestimmten endlichen Grenzwert

$$\iint\limits_E \sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy$$

hat, falls die Ausdehnungen aller Teilgebiete $\varDelta E$ nach Null streben und dementsprechend ihre Anzahl über jede Grenze wächst. Dabei ist die Quadratwurzel des Integranden positiv zu nehmen.

Nunmehr dürfen wir als Größe des betrachteten Stückes der krummen Fläche eben diesen Grenzwert *definieren*, wobei wir noch hervorheben wollen, daß dies eine stets *positive* Größe ist.

585. Grenzwert des Verhältnisses eines Flächenstückes zu seiner Projektion. Indem wir die bisherigen Bezeichnungen beibehalten, nehmen wir noch an, daß G der größte und K der kleinste Wert sei, den der Richtungskosinus Z in dem betrachteten Bereiche annimmt. Da überall Z und $\varDelta E$ positiv sind, so folgt alsdann:

$$\frac{1}{G}\sum \varDelta E \leqq \sum \frac{\varDelta E}{Z} \leqq \frac{1}{K}\sum \varDelta E.$$

Beim Grenzübergange aber geht $\sum \varDelta E$ in E über und $\sum(\varDelta E : Z)$ in den Gesamtbetrag F der Oberfläche. Also ergibt sich:

$$\frac{1}{G}E \leqq F \leqq \frac{1}{K}E$$

oder auch

$$K \leqq \frac{E}{F} \leqq G.$$

Diese Ungleichungen gelten für jeden solchen Bereich E, für den die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllt sind.

Wenn wir nun einen Punkt Q von E auswählen, dem ein gewisser Punkt P der Fläche entspricht, so können wir uns vorstellen, daß der Bereich E ohne Ende so verkleinert werde, daß er sich auf die Umgebung von Q zusammenzieht, wobei sich F auf die Umgebung von P auf der Fläche reduziert. Bei diesem Grenzübergange streben die Werte K und G von

Z beide nach demjenigen Werte, den Z an der Stelle P erreicht. Hieraus folgt

Satz 9: Wenn in der Umgebung eines Punktes P oder (x, y, z) der Fläche $z = f(x, y)$ die Funktion f und ihre beiden ersten Ableitungen f_x und f_y stetige Funktionen von x und y sind, so strebt das Verhältnis aus einem Flächenstücke, dem der Punkt P angehört, und aus seiner Projektion auf die xy-Ebene nach dem reziproken Werte des Richtungskosinus der Normalen von P gegenüber der z-Achse, sobald die Ausdehnungen des Flächenstücks oder, was dasselbe ist, die seiner Projektion nach Null streben.

Hiermit sind auch die Betrachtungen in Nr. 318 gerechtfertigt.

586. Komplanation mit Benutzung von Polarkoordinaten. Behalten wir die Voraussetzungen von Nr. 584 bei und führen wir Polarkoordinaten ω, ϱ in der xy-Ebene vermöge $x = \varrho \cos \omega$ und $y = \varrho \sin \omega$ ein, so können wir den Bereich E wie in Nr. 582 dadurch in Teilgebiete $\varDelta E$ zerlegen, daß wir Strahlen vom Anfangspunkte O aus und konzentrische Kreise um O legen, so daß $\varDelta E$ nach (2) ebenda den Wert hat:

$$\varDelta E = \varrho \varDelta \omega \varDelta \varrho + \tfrac{1}{2} \varDelta \omega (\varDelta \varrho)^2.$$

Wie damals dürfen wir ja auch jetzt von den unvollständigen Teilvierecken am Rande von E absehen. An der Stelle (ω, ϱ) des Gebietes $\varDelta E$ hat der Richtungskosinus Z der Normalen mit der z-Achse einen gewissen Wert, den wir in ω, ϱ auszudrücken haben. Alsdann ist die gesuchte Fläche F der Grenzwert der Summe

$$\sum \frac{\varDelta E}{Z} = \sum_{\varDelta \omega} \sum_{\varDelta \varrho} \frac{\varrho}{Z} \varDelta \omega \varDelta \varrho + \frac{1}{2} \sum_{\varDelta \omega} \sum_{\varDelta \varrho} \frac{1}{Z} \varDelta \omega (\varDelta \varrho)^2.$$

Wie in Nr. 582 läßt sich auch jetzt beweisen, daß der letzte Summand den Grenzwert Null hat, so daß kommt:

$$F = \int\int_E \frac{\varrho}{Z} d\omega \, d\varrho. \tag{1}$$

Es erübrigt also nur noch, hierin den reziproken Wert des Richtungskosinus, nämlich

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1},$$

durch ω und ϱ auszudrücken. Dabei ist die Wurzel positiv und f die Koordinate z. Weil für $z = f(x, y)$, als Funktion von ω und ϱ ausgedrückt:

$$z_\varrho = f_x \cos\omega + f_y \sin\omega, \quad \frac{z_\omega}{\varrho} = -f_x \sin\omega + f_y \cos\omega$$

ist (vgl. das Beispiel in Nr. 72), so ergibt sich durch Quadrieren, Addieren und Hinzufügen der Eins:

$$(2) \qquad \frac{1}{Z} = \frac{1}{\varrho}\sqrt{\varrho^2 + \varrho^2 z_\varrho^{\,2} + z_\omega^{\,2}},$$

da ϱ nach Nr. 203 *positiv* anzunehmen ist. Aus der Formel (1) geht demnach die folgende Oberflächenformel hervor:

$$(3) \qquad F = \int\!\!\int_E \sqrt{\varrho^2 + \varrho^2 z_\varrho^2 + z_\omega^2}\, d\omega\, d\varrho.$$

587. Komplanation von Rotationsflächen. Wir wenden die letzte Formel zur Berechnung der Oberfläche eines Rotationskörpers an. Dabei ist es zweckmäßig, die z-Achse als Rotationsachse zu wählen. Es möge also die in der xz-Ebene gelegene Kurve

$$(1) \qquad z = f(x)$$

um die z-Achse rotieren.

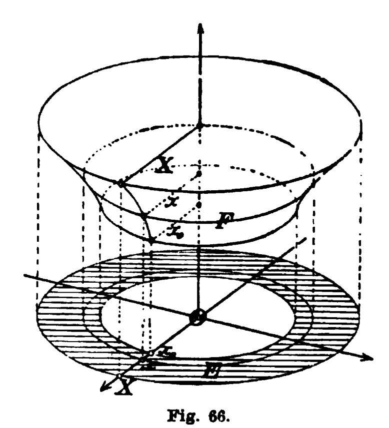


Fig. 66.

Wir wollen dabei nur das Kurvenstück von $x = x_0$ bis $x = X > x_0$ betrachten, siehe Fig. 66. Es erzeugt eine *Zone F* der Rotationsfläche. Ein beliebiger Punkt (x, z) dieses Kurvenbogens beschreibt einen Kreis, dessen Projektion in der xy-Ebene ein Kreis um den Anfangspunkt O mit dem Radius x ist. Folglich ist für einen beliebigen Punkt dieser Zone $z = f(\varrho)$, wenn wir in der xy-Ebene die Polarkoordinaten ω, ϱ einführen. Der zur Zone F gehörige Bereich E der xy-Ebene liegt zwischen den beiden Kreisen um O mit den Radien x_0 und X, also kann ϱ von x_0 bis X variieren, während die

Amplitude ω alle Werte von 0 bis 2π annimmt. Ferner ist wegen $z = f(\varrho)$:

$$z_\varrho = \frac{dz}{d\varrho}, \quad z_\omega = 0,$$

so daß die Formel (3) der letzten Nummer liefert:

$$F = \int\limits_{\varrho = x_0}^{\varrho = X} \int\limits_{\omega = 0}^{\omega = 2\pi} \varrho \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{d\varrho}\right)^2} d\omega \, d\varrho$$

oder, wenn wir ϱ mit x bezeichnen:

$$F = \int\limits_{x_0}^{X} x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \cdot \int\limits_{0}^{2\pi} d\omega,$$

d. h.

(2) $$F = 2\pi \int\limits_{x_0}^{X} x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx.$$

Ist s die Bogenlänge der Meridiankurve (1), gerechnet von $x = x_0$ an mit wachsendem x, so ist nach (1) in Nr. 193, worin jetzt y durch z ersetzt werden muß:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

so daß also kommt:

(3) $$F = 2\pi \int\limits_{x_0}^{X} x \frac{ds}{dx} dx.$$

Vorausgesetzt ist hierbei, daß $z = f(x)$ eine stetige Funktion von x im Intervalle von x_0 bis X sei und ebenda eine stetige Ableitung $dz : dx$ habe, so daß also die Tangente der Meridiankurve (1) an keiner Stelle des betrachteten Stückes zur Drehungsachse parallel sein darf.

Wir wollen aber annehmen, die Meridiankurve (1) habe dennoch an der zu X gehörigen Stelle eine zur z-Achse parallele Tangente. Alsdann ist $dz : dx$ dort unendlich groß, d. h. $ds : dx$ unstetig. Folglich ist jetzt das Integral in (2) als Grenzwert zu behandeln:

$$F = 2\pi \lim_{\tau = 0} \int\limits_{x_0}^{X - \tau} x \frac{ds}{dx} dx,$$

[587

wobei τ positiv ist. Führen wir die Bogenlänge s statt x als unabhängige Veränderliche ein, und ist die Bogenlänge vom Punkte (x_0) bis zum Punkte (X) des Meridians (1) gleich S, so kommt:

$$F = 2\pi \lim_{\sigma=0} \int_0^{S-\sigma} x\,ds.$$

Wenn nun x eine stetige Funktion von s ist im Intervalle $0 \leqq s \leqq S$, so ergibt sich:

$$(4) \qquad F = 2\pi \int_0^S x\,ds,$$

so daß wir doch die Integration bis zu einem solchen Breitenkreise der Rotationsfläche ausführen können, für dessen Punkte die Tangentenebenen der Drehachse parallel sind. Solche Breitenkreise heißen *Kehlkreise.*

Hat die Rotationsfläche mehrere Kehlkreise, so muß man die Zonen zwischen je zwei aufeinander folgenden Kehlkreisen einzeln berechnen. Wir nahmen nämlich, worauf noch besonders aufmerksam gemacht werden möge, $X > x_0$ an. Wäre $X < x_0$, so würde sich mithin die Fläche mit dem Minuszeichen ergeben.

588. Oberfläche des Rotationsellipsoids. Als Anwendung hiervon wollen wir eine Zone derjenigen Fläche berechnen, die durch Rotation einer Ellipse mit den Achsen $2a$ und $2b$ um die Achse $2a$ entsteht. Diese Achse nehmen wir also als z-Achse an, so daß

$$(1) \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad z = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$$

die Gleichung der Meridiankurve in der xz-Ebene ist. Hier kommt:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{a}{b}\frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$

so daß die Formel (2) der letzten Nummer liefert:

$$F = \frac{2\pi}{b}\int_{x_0}^{X} x\sqrt{\frac{b^4 + (a^2 - b^2)x^2}{b^2 - x^2}}\,dx.$$

Dabei ist die Wurzel positiv und $X > x_0$ vorausgesetzt. Wir können uns beim Ellipsoid auf den Teil mit positiven Werten von z beschränken. Zu den Grenzen x_0 und X gehören alsdann positive Werte z_0 und Z, aber es ist jetzt $Z < z_0$, siehe Fig. 67.

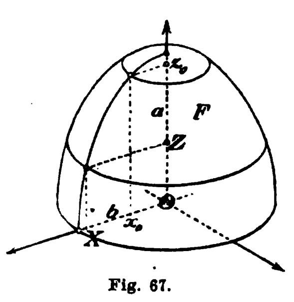


Fig. 67.

Wenn wir nun vermöge (1) die neue Veränderliche z statt x im Integral einführen, so ergibt sich ein von z_0 bis Z erstrecktes Integral mit dem Minuszeichen. Vertauschen der Grenzen liefert:

$$F = 2\pi \frac{b}{a^2} \int_Z^{z_0} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) z^2}\, dz \qquad (z_0 > Z).$$

Die Oberfläche derjenigen Zone des Ellipsoids, die zwischen der xy-Ebene und der zu ihr parallelen Ebene in beliebiger Höhe z liegt, wobei $z > 0$ sein soll, ist hiernach:

$$(2) \qquad F = 2\pi \frac{b}{a^2} \int_0^{z} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) z^2}\, dz,$$

wobei die Wurzel positiv ist.

Die Fälle $a > b$ und $a < b$ sind nach Nr. 436 zu unterscheiden. Ist $a > b$, entsteht also das Ellipsoid durch Rotation der Ellipse um ihre Hauptachse, so ergibt die Auswertung des Integrals (2):

$$F = \frac{\pi b}{a^2} z \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) z^2} + \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) z^2}}{a^2}.$$

Dabei sind alle Wurzeln positiv; der Arkus gehört dem Intervalle von 0 bis π an. Die ganze Oberfläche geht hervor, wenn wir $z = a$ setzen und F verdoppeln. Es ergibt sich der Wert:

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a}.$$

Ferner geht für $b = a$ aus (2) der bekannte Wert $4\pi a^2$ für die Oberfläche der *Kugel* vom Radius a hervor.

[588

Ist drittens $a < b$, so entsteht das Ellipsoid durch Rotation um seine Nebenachse, und es kommt:

$$F = \frac{\pi b}{a^2} z\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)z^2} + \frac{\pi b a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{z\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)z^2}}{a^2}.$$

Für $z = a$ ist $2F$ die ganze Oberfläche des Ellipsoids, nämlich

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}.$$

589. Die Guldinsche Regel für die Oberfläche von Rotationskörpern. Wie in Nr. 567 erwähnen wir hier ohne nähere Begründung, die wir uns vorbehalten (siehe Nr. 602), daß derjenige Punkt, den man in der Mechanik als den *Schwerpunkt einer Kurve*

$$z = f(x)$$

in der xz-Ebene im Intervalle von x_0 bis X definiert, die Abszisse hat:

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{S}\int_0^S x\,ds.$$

Hierin soll s die Bogenlänge der Kurve von der Stelle $x = x_0$ an bedeuten, also S die Gesamtlänge von $x = x_0$ bis $x = X$ sein. Das hier auftretende Integral ist nun nichts anderes als das in der Formel (3) oder (4) von Nr. 587, so daß sich für die Rotationsfläche des betrachteten Kurvenstückes ergibt:

$$F = 2\pi\mathfrak{x} \cdot S.$$

Diese Formel enthält die *Guldinsche Regel*, nach der *die Rotationsfläche gleich der Fläche desjenigen Rechtecks ist, dessen eine Seite die Länge der Meridiankurve und dessen andere Seite die Länge des Weges ist, den der Schwerpunkt der Meridiankurve bei der Drehung beschreibt.*

590. Flächeninhalte sphärischer Dreiecke. Um den Anfangspunkt O als Mitte legen wir die Kugel vom Radius Eins, siehe Fig. 68. Sie werde von der positiven x-Achse in A getroffen, und es sei C ein Punkt auf dem in der xy-Ebene gelegenen größten Kreise. Auf demjenigen größten

Kreise, der durch C geht und die z-Achse zum Durchmesser hat, werde ferner ein Punkt B angenommen. Schließlich werde der größte Kreis durch A und B gelegt. So entsteht ein *allgemeines sphärisches Dreieck* ABC *mit einem rechten Winkel*, nämlich bei C. Wir wollen seine Fläche F berechnen.

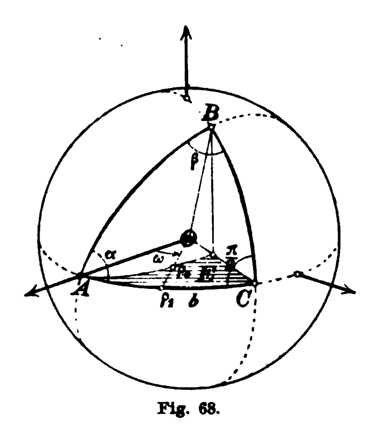


Fig. 68.

Die Projektion des Kreisbogens AB auf die xy-Ebene ist ein Ellipsenbogen, die des Kreisbogens BC dagegen ein Teil des Radius OC. Die Projektion E der Fläche F wird also von einem Kreisbogen, einem Ellipsenbogen und einer Strecke eingeschlossen. Ist α der Winkel des sphärischen Dreiecks bei A, so hat die Ebene AOB die Gleichung $z = y \operatorname{tg} \alpha$. Setzen wir diesen Wert von z in die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ der Kugel ein, so ergibt sich die Gleichung

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = 1$$

der Ellipse. Sie lautet in Polarkoordinaten ω, ϱ:

$$\varrho = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \omega}},$$

während für die Punkte der Kugel $z = \sqrt{1 - \varrho^2}$ ist.

Es möge b die Seite AC des sphärischen Dreiecks, also der Winkel AOC sein, so daß ω im Bereiche E von 0 bis b variiert. Ein Strahl in der xy-Ebene von O aus mit der Amplitude ω trifft die Ellipse und den Kreisbogen AC in Punkten mit den Radienvektoren:

(1) $$\varrho_0 = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \omega}}, \quad \varrho_1 = 1.$$

Setzen wir die Werte in die Formel (3) von Nr. 586 ein, so ergibt sich als Fläche des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks

$$F = \int_0^b \left[\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} d\varrho \right] d\omega = \int_0^b \left[-\sqrt{1 - \varrho^2} \right]_{\varrho_0}^1 d\omega,$$

also nach (1):

$$F = \int_0^b \frac{\sin\alpha \sin\omega}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \cos^2\omega}}\, d\omega.$$

Unbestimmte Integration liefert $-\operatorname{arc}\sin(\sin\alpha\cos\omega) + \text{konst.}$ so daß kommt:

$$F = \alpha - \operatorname{arc}\sin(\sin\alpha\cos b).$$

Dabei ist der Arkus zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu wählen. Nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie ist nun aber $\sin\alpha\cos b$ gleich dem Kosinus des Winkels β des Dreiecks in B, so daß sich schließlich

$$F = \alpha + \beta - \tfrac{1}{2}\pi$$

ergibt. Da der dritte Winkel γ des Dreiecks ABC gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist, so sehen wir daß *F gleich dem sphärischen Exzeß* ist, nämlich gleich dem Überschusse der Winkelsumme des Dreiecks über π.

Da jedes sphärische Dreieck durch eine seiner Höhen in zwei rechtwinklige zerlegt werden kann, ist es ein Leichtes, weiter zu folgern, daß das letzte Ergebnis in *jedem* sphärischen Dreiecke gilt.

591. Komplanation eines gewissen Kugelteiles. Außer der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

sei in der xy-Ebene die *algebraische Kurve vierter Ordnung* gegeben:

$$(1) \qquad 2x^2(x^2 + y^2) - 3(x^2 - y^2) = 0.$$

Auf ihr werde der gerade Zylinder errichtet. Er schneidet aus der Kugeloberfläche ein Gebiet aus, dessen Größe bestimmt werden soll.

In Polarkoordinaten ω, ϱ hat die Kurve (1) die Gleichung:

$$\varrho = \sqrt{\tfrac{3}{2}(1 - \operatorname{tg}^2\omega)},$$

aus der man leicht sieht, daß die Kurve eine schleifenförmige Gestalt ungefähr so wie die Lemniskate in Fig. 29, S. 269, hat. Sie ist jedoch *keine* Lemniskate. In Fig. 69 ist sie ebenso wie der größte Kreis der Kugel in der xy-Ebene gezeichnet. Es handelt sich zunächst um die Komplanation des-

jenigen Teiles der Kugel, dessen Projektion das in Fig. 69 schraffierte Gebiet E ist, denn die Figur ist in bezug auf die xz-Ebene symmetrisch.

Ein Strahl von O aus trifft den Bereich E nur dann, wenn seine Amplitude ω dem Intervalle von 0 bis $\frac{1}{4}\pi$ angehört, und zwar trifft er den Kugelkreis, sobald $\omega < \frac{1}{6}\pi$ ist, dagegen die Kurve (1), sobald $\omega > \frac{1}{6}\pi$ ist. Wenn wir also zuerst hinsichtlich ϱ, dann hinsichtlich ω integrieren, so sind als Grenzen für ϱ die Werte 0 und 1 für $\omega < \frac{1}{6}\pi$ zu wählen, dagegen die Grenzen 0 und

(2) $\varrho_1 = \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \operatorname{tg}^2 \omega)}$

für $\omega > \frac{1}{6}\pi$. Außerdem ist die Kugelhöhe z wie im vorigen Beispiele gleich $\sqrt{1 - \varrho^2}$, so daß das Integral, abgesehen von den Grenzen, dasselbe wie damals ist. Es kommt für die fragliche Fläche:

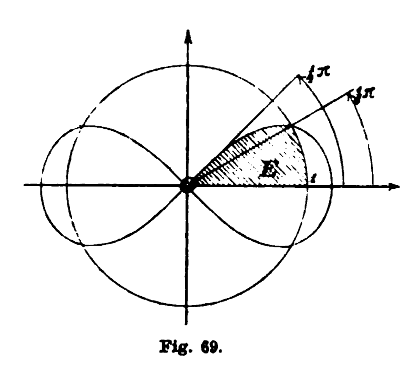


Fig. 69.

$$F = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} \left[\int_0^1 \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}} d\varrho \right] d\omega + \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \left[\int_0^{\varrho_1} \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}} d\varrho \right] d\omega$$

$$= \int_0^{\frac{1}{6}\pi} \left[-\sqrt{1 - \varrho^2} \right]_0^1 d\omega + \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \left[-\sqrt{1 - \varrho^2} \right]_0^{\varrho_1} d\omega,$$

d. h. nach (2):

$$F = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} d\omega + \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \left(1 - \sqrt{\tfrac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \omega - \tfrac{1}{2}}\right) d\omega$$

$$= \frac{1}{4}\pi - \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \sqrt{\tfrac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \omega - \tfrac{1}{2}}\, d\omega.$$

Der letzte Integrand läßt sich zerlegen in:

$$\frac{\frac{3}{2} \frac{1}{\cos^2 \omega}}{\sqrt{\frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \omega - \frac{1}{2}}} - \frac{2 \cos \omega}{\sqrt{2 \sin^2 \omega - \frac{1}{2}}},$$

so daß das Integral mittels der Substitutionen $\operatorname{tg}\omega = t$ bzw. $\sin\omega = t$ leicht auszuwerten ist. Es kommt:

$$F = \tfrac{1}{4}\pi - \Big[\sqrt{\tfrac{3}{2}}\ln\big(\operatorname{tg}\omega + \sqrt{\operatorname{tg}^2\omega - \tfrac{1}{3}}\big) - \sqrt{2}\ln\big(\sin\omega + \sqrt{\sin^2\omega - \tfrac{1}{4}}\big)\Big]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi + \sqrt{2}\ln\big(1 + \sqrt{2}\big) - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\ln\big(\sqrt{2} + \sqrt{3}\big).$$

Hierin sind alle Wurzeln positiv. Das achtfache dieses Wertes ist der Betrag des gesamten Flächenstückes, das der zu Anfang erwähnte Zylinder aus der Kugel ausschneidet.

592. Komplanation des allgemeinen Ellipsoids. Da in der Formel für die Oberfläche:

$$F = \iint\limits_E \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx\, dy,$$

siehe Satz 8, Nr 584, eine Quadratwurzel auftritt, ist die Komplanation, allgemein geredet, eine schwierigere Aufgabe als die Kubatur, und es hängt viel davon ab, daß man das Integral in geeigneter Weise zu vereinfachen sucht. Man kann dabei von dem Umstande Gebrauch machen, daß sich die Doppelintegrale nach Nr. 577 allgemeiner auffassen lassen, indem man sie als Grenzwerte von Summen betrachtet, bei denen der Integrationsbereich in einer dem gerade vorliegenden Probleme angepaßten Weise in Teilbereiche zerlegt wird.

Insbesondere kann man das Flächenstück F, dessen Komplanation ausgeführt werden soll, so zerlegen: Der Ort derjenigen Punkte der Fläche, deren Normalen denselben Richtungskosinus Z hinsichtlich der z-Achse haben, ist eine gewisse Kurve auf der Fläche. Wir denken uns solche Kurven, die zu verschiedenen konstanten Werten von Z gehören, in beliebiger Anzahl auf der Fläche F gezogen. So mögen zu den Werten Z und $Z + \Delta Z$ die Kurven c und c_1 gehören, und es seien c' und c_1' die Projektionen dieser beiden Kurven in der xy-Ebene, also im Integrationsbereiche E des Doppelintegrals. Den Streifen zwischen c' und c_1' können wir durch Querlinien in beliebig schmale krummlinig begrenzte Vierecke ΔE zerteilen. In jedem dieser Vierecke wählen wir als Punkt Q, von dem in Nr. 577 und auch in Nr. 584 die Rede war, einen Punkt auf

der Kurve c', so daß zu allen diesen Punkten *derselbe* Wert Z gehört. Zu der Summe

$$\sum \frac{1}{Z} \varDelta E,$$

siehe (4) in Nr. 584, tragen nun die betrachteten Vierecke $\varDelta E$ zwischen c' und c_1' den Summanden

$$\frac{1}{Z} \sum \varDelta E$$

bei, worin $\sum \varDelta E$ der Inhalt des ebenen Flächenstreifens zwischen c' und c_1' ist. Dieser Streifen, der nach Null strebt, wenn $\varDelta Z$ nach Null strebt, möge die Fläche $\varDelta G$ haben. Alsdann ist also das Doppelintegral der Grenzwert

$$(1) \qquad F = \lim \frac{\varDelta G}{Z},$$

der hervorgeht, wenn alle Unterschiede $\varDelta Z$ zwischen aufeinanderfolgenden Werten von Z, die zur Definition der Kurven c dienten, nach Null streben.

Diese Methode wollen wir an dem Falle des allgemeinen *Ellipsoids*

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

erläutern. Nach der dritten Formel (8) in Nr. 253 ist hier:

$$(3) \qquad Z = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Durch Elimination von z aus (2) und (3) geht die Gleichung

$$\frac{a^2 - (a^2 - c^2) Z^2}{a^4(1 - Z^2)} x^2 + \frac{b^2 - (b^2 - c^2) Z^2}{b^4(1 - Z^2)} y^2 = 1$$

hervor. Es ist dies also die Gleichung der Projektion c' derjenigen Kurve c auf dem Ellipsoide, längs derer der Richtungskosinus Z einen und denselben Wert hat. Man sieht, daß c' eine *Ellipse* ist. Die Fläche ω der Ellipse ist nach Nr. 220:

$$(4) \qquad \omega = \frac{\pi a^2 b^2 (1 - Z^2)}{\sqrt{a^2 - (a^2 - c^2) Z^2}\sqrt{b^2 - (b^2 - c^2) Z^2}}.$$

Wächst Z um $\varDelta Z$, so werden die Achsen dieser Ellipse kleiner, so daß der Zuwachs $\varDelta \omega$ von ω negativ wird. Hier ist also

[592

$-\Delta\omega$ die vorhin mit ΔG bezeichnete Größe der Fläche zwischen den zu Z und $Z + \Delta Z$ gehörigen Ellipsen c' und c_1', so daß die Formel (1) für die Fläche des Ellipsoids gibt:

$$F = -\lim \frac{\Delta\omega}{Z} = -\lim \frac{1}{Z}\frac{\Delta\omega}{\Delta Z}\Delta Z.$$

Wir beschränken uns auf diejenige halbe Ellipsoidoberfläche, für die z positiv ist. Für sie geht Z von 0 bis 1, denn die Normalen derjenigen Punkte des Ellipsoids, die in der xy-Ebene liegen, sind zur z-Achse senkrecht, während der höchste Punkt $z = c$ des Ellipsoids auf der z-Achse diese Achse selbst zur Normalen hat. Folglich ist die *ganze* Oberfläche des Ellipsoids gegeben durch:

$$F = -2\int_0^1 \frac{1}{Z}\frac{d\omega}{dZ}dZ, \tag{5}$$

also durch ein einfaches Integral. Die Veränderliche des Integranden ist hier Z und für $d\omega : dZ$ ist der Wert der Ableitung von (4) einzusetzen.

Ehe wir dies tun, führen wir hier zweckmäßig statt Z eine andere Veränderliche φ ein. Indem wir $a > b > c$ voraussetzen und zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)} = k^2, \quad \cos\mu = \frac{c}{a}, \quad \sin\mu = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},$$

d. h.

$$c = b\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}$$

gebrauchen, wobei alle Wurzeln positiv sein sollen und μ auf den Quadranten 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ beschränkt werden kann, definieren wir die neue Veränderliche φ durch die Substitution:

$$Z = \frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}}\sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sin\mu}. \tag{6}$$

Da Z von 0 bis 1 geht, können wir vorschreiben, daß φ von 0 bis μ wächst. Es ist jetzt $dZ = \cos\varphi\, d\varphi : \sin\mu$, so daß wir statt (5) erhalten:

$$F = -\frac{2}{a}\sqrt{a^2-c^2}\int_0^\mu \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}, \tag{7}$$

während nach (4) und (6)

$$(8)\qquad \omega = \pi a b \frac{1 - \frac{a^2}{a^2 - c^2}\sin^2\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

wird. Um die Einführung von $d\omega : d\varphi$ in (7) in günstiger Weise zu leisten, bemerken wir, daß nach (8):

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{\sin\varphi} &= d\frac{\omega}{\sin\varphi} + \frac{\omega\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi\\ &= d\frac{\omega}{\sin\varphi} + \pi a b\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{\pi a^2 b}{a^2-c^2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\end{aligned}$$

ist. Diesen Wert formen wir noch etwas weiter um. Es ist nämlich

$$\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = -d\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi} - \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi + \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

so daß kommt:

$$\frac{d\omega}{\sin\varphi} = d\left(\frac{\omega}{\sin\varphi} - \pi a b\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}\right) - \pi a b\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi - \frac{\pi a b c^2}{a^2-c^2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Demnach liefert (7):

$$\begin{aligned}F = &-\frac{2}{a}\sqrt{a^2-c^2}\left[\frac{\omega}{\sin\varphi} - \pi a b\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}\right]_0^\mu\\ &+ 2\pi b\sqrt{a^2-c^2}\int_0^\mu\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi + \frac{2\pi b c^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\int_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.\end{aligned}$$

Nach (8) ist nun

$$\left[\frac{\omega}{\sin\varphi} - \pi a b\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}\right]_0^\mu = \frac{\pi a}{b(a^2-c^2)}\left[\frac{\operatorname{tg}\varphi\cdot\{a^2(b^2-c^2)\cos^2\varphi - b^2c^2\}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]_0^\mu,$$

also gleich $-\pi a c^2 : \sqrt{a^2-c^2}$, so daß sich ergibt:

$$(9)\qquad F = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\{(a^2-c^2)E(k,\mu) + c^2F(k,\mu)\}$$

wenn wir die in Nr. 546 eingeführten Bezeichnungen für die elliptischen Integrale benutzen. Diese Formel für die Oberfläche des Ellipsoids rührt von *Legendre* her.

[592

Im Falle $b = c$ liegt, weil $a > b$ ist, ein verlängertes Rotationsellipsoid und im Falle $a = b$ ein abgeplattetes vor. In diesen Fällen wird $k = 0$ bzw. 1, so daß sich die Integrale nach Nr. 449, 450 elementar auswerten lassen. Wir kommen dadurch zu den Ergebnissen, die schon in Nr. 588 gefunden wurden.

§ 5. Einführung neuer Veränderlicher in Doppelintegralen.

593. Stetige Abbildung einer Ebene auf einer anderen Ebene. Wir haben die Absicht, zu untersuchen, wie sich ein vorgelegtes Doppelintegral darstellen wird, wenn darin statt x, y neue Veränderliche u, v vermöge zweier Gleichungen

$$(1) \qquad u = \Phi(x, y), \quad v = \Psi(x, y)$$

eingeführt werden. Dabei ist es zweckmäßig, diese Aufgabe zunächst geometrisch zu erfassen, weshalb wir uns vorläufig nur mit den beiden Gleichungen (1) beschäftigen.

Wir verstehen unter x, y rechtwinklige Koordinaten in eine Ebene und unter u, v rechtwinklige Koordinaten in einer zweiten Ebene. Wenn Φ und Ψ in einem gewissen Variabilitätsbereiche stetig sind, so wird der Bereich durch ein Gebiet in der xy-Ebene dargestellt. Nach (1) läßt sich alsdann zu jedem Punkte (x, y) dieses Bereiches ein Punkt (u, v) in der zweiten Ebene konstruieren. Dabei kann es vorkommen, daß zwei verschiedene Punkte (x, y) zu demselben Punkte (u, v) führen. Dies können wir dadurch vermeiden, daß wir den Bereich in der xy-Ebene hinreichend verkleinern, so daß zu jedem Punkte (x, y) des Bereiches *nur ein* Punkt (u, v) der zweiten Ebene gehört und damit ein Bereich in der zweiten Ebene gewonnen wird derart, daß zu jedem Punkte (u, v) dieses Bereiches *nur ein* Punkt (x, y) der ersten Ebene gehört. Wir kommen so zu einem solchen Bereiche in der xy-Ebene, in dem die Gleichungen (1) eindeutig *auflösbar* sind:

$$(2) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

Wir setzen nun für die Folge voraus:

Erstens: Die Funktionen φ und ψ und ihre partiellen Ab-

leitungen erster Ordnung φ_u, φ_v, ψ_u, ψ_v sollen in dem betrachteten Bereiche der Wertepaare u, v stetig sein.

Zweitens: Die *Funktionaldeterminante* von φ und ψ, nämlich

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} = \varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v,$$

soll ebenda von Null verschieden sein.

Da $\mathfrak{D}$ nach der ersten Voraussetzung stetig ist, so besagt die zweite, *daß $\mathfrak{D}$ überall im Bereiche einerlei Vorzeichen hat.* Ferner sind danach φ und ψ voneinander unabhängige Funktionen, siehe Satz 4, Nr. 80. Wir setzen ferner voraus:

Drittens: Jedem Wertepaare des Bereiches der u, v bezw. des Bereiches der x, y entspreche infolge der Gleichungen (2) bzw. ihrer Auflösungen (1) *ein* Wertepaar des andern Bereiches.

Nur falls diese Voraussetzungen der *Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Unabhängigkeit und Eindeutigkeit* erfüllt sind, wollen wir die durch (2) bzw. (1) vermittelte Abbildung der beiden Bereiche eine *stetige Abbildung* nennen.

Es mag hierbei hervorgehoben werden, daß x, y und ebenso u, v nicht notwendig rechtwinklige Koordinaten zu bedeuten haben; es könnten auch andere Koordinatensysteme, wie z. B. Polarkoordinaten oder schiefwinklige Koordinaten, verwendet werden. Allerdings werden wir meistens unter x, y und u, v rechtwinklige Koordinaten in den beiden Ebenen verstehen.

Von zusammengehörigen Stellen (x, y) und (u, v) heiße die eine der *Bildpunkt* der andern.

594. Eigenschaften im Kleinen für die stetige Abbildung einer Ebene auf einer anderen Ebene. Sind unter den in voriger Nummer gemachten Voraussetzungen zwei Punkte (u, v) und $(u + \Delta u,\ v + \Delta v)$ der einen Ebene ausgewählt, so gehören zu ihnen zwei Punkte (x, y) und $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ der andern Ebene. Dabei ist:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \Delta x &= \varphi(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - \varphi(u, v), \\ \Delta y &= \psi(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - \psi(u, v). \end{aligned}$$

Bedeutet nun σ irgend eine beliebig kleine positive Zahl, so sei unter der Umgebung (σ) der Stelle (u, v) der Bereich derjenigen Punkte $(u + \varDelta u,\ v + \varDelta v)$ verstanden, für die $|\varDelta u| < \sigma$, $|\varDelta v| < \sigma$ ist. Eine entsprechende Ausdrucksweise benutzen wir für die xy-Ebene.

Ist nun τ eine beliebig gewählte positive Zahl, so gibt es nach Satz 1, Nr. 570, zwei positive Zahlen σ_1 und σ_2 derart, daß aus $|\varDelta u| < \sigma_1$, $|\varDelta v| < \sigma_1$ folgt: $|\varDelta x| < \tau$, und daß aus $|\varDelta u| < \sigma_2$, $|\varDelta v| < \sigma_2$ folgt: $|\varDelta y| < \tau$. Wählen wir als die Zahl σ die kleinere der beiden Zahlen σ_1 und σ_2, so schließen wir also:

Zu jeder vorgegebenen beliebig kleinen positiven Zahl τ gibt es eine positive Zahl σ derart, daß der Punkt $(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y)$ in der Umgebung (τ) der Stelle (x, y) liegt, sobald der Punkt $(u + \varDelta u,\ v + \varDelta v)$ in der Umgebung (σ) der Stelle (u, v) gewählt wird.

Statt τ kann auch σ vorgegeben sein. Denn wenn g den größten Wert bezeichnet, den die absoluten Beträge der Ableitungen φ_u, φ_v, ψ_u, ψ_v in der Umgebung (σ) der Stelle (u, v) erreichen, und wenn $|\varDelta u| < \sigma$, $|\varDelta v| < \sigma$ gewählt wird, so sind $|\varDelta x|$ und $|\varDelta y|$ nach dem Mittelwertsatze 28, Nr. 137, nicht größer als die Beträge, die den Summen

$$|\varphi_u|\sigma + |\varphi_v|\sigma \quad \text{bzw.} \quad |\psi_u|\sigma + |\psi_v|\sigma$$

zukommen, d. h. nicht größer als $2g\sigma$. Wählen wir also τ größer als $2g\sigma$, so zieht die Annahme, daß der Punkt $(u + \varDelta u,\ v + \varDelta v)$ in der Umgebung (σ) der Stelle (u, v) liegt, wieder nach sich, daß der Punkt $(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y)$ in der Umgebung (τ) der Stelle (x, y) liegt.

Zu einer beliebig vorgegebenen positiven Zahl τ oder σ gibt es also eine zweite positive Zahl σ oder τ derart, *daß allen Punkten in der Umgebung* (σ) *der Stelle* (u, v) *nur solche Punkte entsprechen, die in der Umgebung* (τ) *der Stelle* (x, y) *gelegen sind.*

Sind x, y und u, v z. B. rechtwinklige Koordinaten, so sind die beiden Umgebungen umrandet von Quadraten, deren Mitten die Stellen (x, y) und (u, v) sind, deren Seiten den Achsen parallel laufen und die Längen 2τ und 2σ haben. Das

Ergebnis besagt daher, daß das ganze Innere des Quadrates (σ) der uv-Ebene abgebildet wird als ein Teil des Quadrates (τ) der xy-Ebene. Siehe Fig. 70, worin wir diesen Teil durch Schraffieren hervorgehoben haben.

Wir behaupten nun, daß dieser Teil die Stelle (x, y) völlig umschließt, d. h. daß die Stelle (x, y), die ja selbst dem Teile sicher angehört, nicht an seinem Rande, wie etwa in Fig. 71 oder gar ganz für sich liegt. In der Tat: Andernfalls gäbe es eine Stelle Q oder $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ beliebig nahe bei der Stelle (x, y) derart, daß der Bildpunkt Q' oder $(u + \Delta u,$ $v + \Delta v)$ außerhalb des Quadrates (σ) läge wie in Fig. 71, d. h. zwei Stellen (u, v) und $(u + \Delta u,\ v + \Delta v)$ der uv-Ebene, für die $|\Delta u|$ oder $|\Delta v|$ *größer* als σ ist, hätten Bildpunkte, die beliebig nahe beieinander liegen und zwar für einen endlichen Wert von σ. Daher würden zwei verschiedene Stellen der uv-Ebene denselben Bildpunkt (x, y) haben. Dies widerspricht der *dritten* Voraussetzung in Nr. 593.

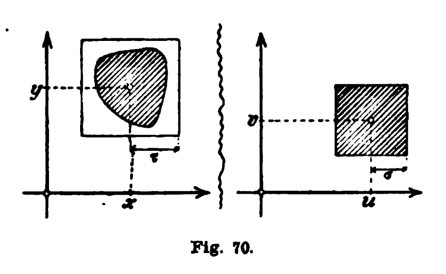


Fig. 70.

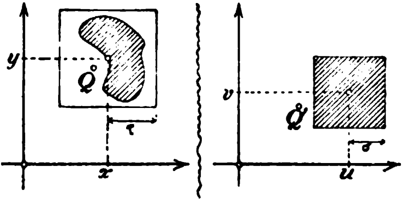


Fig. 71.

Derjenige Teil der Umgebung (τ) also, in dem alle Bildpunkte der Umgebung (σ) der Stelle (u, v) liegen, enthält die Stelle (x, y) in seinem *Innern*. Es gibt mithin eine kleinere Umgebung (τ') derart, daß *allen* Punkten in der Umgebung (τ') der Stelle (x, y) nur Punkte in der Umgebung (σ) der Stelle (u, v) entsprechen.

Zu jeder vorgegebenen beliebig kleinen positiven Zahl σ gibt es demnach eine positive Zahl τ' derart, daß aus $|\Delta x| < \tau'$, $|\Delta y| < \tau'$ stets $|\Delta u| < \sigma$, $|\Delta v| < \sigma$ folgt.

Da es in unserem Belieben steht, τ' noch kleiner zu wählen, so folgt schließlich:

Satz 10: Bei stetiger Abbildung der xy-Ebene auf der uv-Ebene gibt es zu einer beliebig klein gewählten positiven Zahl σ oder τ stets eine positive Zahl τ bzw. σ derart, daß allen Stellen in der Umgebung (τ) einer Stelle der einen Ebene nur Stellen in der Umgebung (σ) des Bildpunktes in der andern Ebene entsprechen.

595. Entsprechen der Richtungen bei stetiger Abbildung einer Ebene auf einer anderen Ebene. Bei dieser Gelegenheit wollen wir eine Eigenschaft der stetigen Abbildung erörtern, die allerdings erst später benutzt werden wird.

Nach (1) in voriger Nummer ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\psi(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - \psi(u,\ v)}{\varphi(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - \varphi(u,\ v)}. \tag{1}$$

Es gibt nun nach dem Mittelwertsatze 28, Nr. 137, positive echte Brüche θ und ϑ derart, daß der Zähler gleich

$$\frac{\partial}{\partial u}\psi(u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) \cdot \Delta u + \frac{\partial}{\partial v}\psi(u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) \cdot \Delta v$$

und der Nenner gleich

$$\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u + \vartheta\Delta u, v + \vartheta\Delta v) \cdot \Delta u + \frac{\partial}{\partial v}\varphi(u + \vartheta\Delta u, v + \vartheta\Delta v) \cdot \Delta v$$

wird, so daß die rechte Seite von (1) in den Faktoren Δu und Δv, die hier auftreten, homogen von nullter Ordnung wird. Wir lassen nun den Punkt $(u + \Delta u,\ v + \Delta v)$ nach der Stelle (u, v) derart hinwandern, daß die Richtung von (u, v) nach $(u + \Delta u,\ v + \Delta v)$ einer bestimmten Grenzlage zustrebt, d. h. wir lassen Δu und Δv derart nach Null streben, daß entweder das Verhältnis $\Delta u : \Delta v$ oder das reziproke Verhältnis $\Delta v : \Delta u$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat. Den Grenzwert von $\Delta u : \Delta v$ werden wir alsdann unter Benutzung der *Differentiale* du und dv mit $dv : du$ bezeichnen. Alsdann folgt, da φ_u, φ_v, ψ_u, ψ_v nach Voraussetzung stetig sind, daß $\Delta y : \Delta x$ dem Grenzwerte zustrebt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi_u du + \psi_v dv}{\varphi_u du + \varphi_v dv}. \tag{2}$$

Sind x, y und u, v insbesondere rechtwinklige Koordinaten, so ist der Grenzwert $dy : dx$ der Tangens des Winkels α, den

eine vom Punkte (x, y) ausgehende Richtung mit der positiven x-Achse bildet. Ebenso ist der Grenzwert $dv : du$ der Tangens des Winkels β, den eine vom Punkte (u, v) ausgehende Richtung mit der positiven u-Achse bildet. Zwischen diesen beiden Tangens besteht alsdann nach (2) die Beziehung:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\psi_u + \psi_v \operatorname{tg}\beta}{\varphi_u + \varphi_v \operatorname{tg}\beta}.$$

Sie ist *nicht* frei von $\operatorname{tg}\beta$, denn sonst müßte $\varphi_u : \varphi_v = \psi_u : \psi_v$, d. h. die Funktionaldeterminante $\mathfrak{D}$ entgegen der zweiten Voraussetzung in Nr. 593 gleich Null sein. Wir können die Gleichung (3) von dem Nenner befreien. Es ergibt sich alsdann

Satz 11: Bei einer stetigen Abbildung $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ einer xy-Ebene auf einer uv-Ebene entsprechen allen von einem Punkte der einen Ebene ausgehenden Richtungen diejenigen Richtungen, die von dem Bildpunkte ausgehen, in der Weise, daß zwischen den Bestimmungsstücken $dy : dx$ und $dv : du$ der beiden Richtungen die bilineare Gleichung besteht:

$$\varphi_v \cdot \frac{dy}{dx}\frac{dv}{du} + \varphi_u \cdot \frac{dy}{dx} - \psi_v \cdot \frac{dv}{du} - \psi_u = 0,$$

die sowohl nach $dy : dx$ als auch nach $dv : du$ auflösbar ist.

Infolge von (3) ist $\operatorname{tg}\alpha$ eine linear gebrochene Funktion von $\operatorname{tg}\beta$ allein, sobald wir u und v als bestimmt gewählt betrachten, und hat bei dieser Annahme die Ableitung:

$$\frac{d\operatorname{tg}\alpha}{d\operatorname{tg}\beta} = \frac{\psi_v(\varphi_u + \varphi_v \operatorname{tg}\beta) - \varphi_v(\psi_u + \psi_v \operatorname{tg}\beta)}{(\varphi_u + \varphi_v \operatorname{tg}\beta)^2}$$

oder:

$$\text{(4)} \qquad \frac{d\operatorname{tg}\alpha}{d\operatorname{tg}\beta} = \frac{\mathfrak{D}}{(\varphi_u + \varphi_v \operatorname{tg}\beta)^2}.$$

Diese Ableitung hat dasselbe Vorzeichen wie die Funktionaldeterminante $\mathfrak{D}$, die ja nach Nr. 593 überall im Bereiche positiv oder überall im Bereiche negativ ist. Nach Satz 9, Nr. 30, folgt, daß α mit β wächst oder abnimmt, je nachdem $\mathfrak{D}$ positiv oder negativ ist. Daher heißt die Abbildung *gleichsinnig*, wenn $\mathfrak{D} > 0$ ist, und *ungleichsinnig*, wenn $\mathfrak{D} < 0$ ist. Umläuft ein Punkt eine Stelle (x, y) der einen Ebene, so umläuft sein Bildpunkt die Bildstelle (u, v) in der andern

Ebene in demselben oder entgegengesetztem Sinne, je nachdem $\mathfrak{D} > 0$ oder < 0 ist, vorausgesetzt natürlich, daß dabei der erste bewegliche Punkt in einer hinreichend kleinen Umgebung der Stelle (x, y) verbleibt.

596. Grenzwert des Verhältnisses zweier Dreiecksinhalte bei stetiger Abbildung. Außer der Stelle (u, v) betrachten wir *zwei* benachbarte Stellen $(u + \Delta_1 u,\ v + \Delta_1 v)$ und $(u + \Delta_2 u,\ v + \Delta_2 v)$. Das Dreieck, dessen Ecken die Punkte in dieser Reihenfolge sind, hat, falls u, v rechtwinklige Koordinaten bedeuten, nach dem Beispiele in Nr. 530 den Flächeninhalt $\frac{1}{2}(\Delta_1 u\, \Delta_2 v - \Delta_2 u\, \Delta_1 v)$.

Zu den drei Punkten gehören Bildpunkte in der xy-Ebene, die wir entsprechend bezeichnen und deren Dreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2}(\Delta_1 x\, \Delta_2 y - \Delta_2 x\, \Delta_1 y)$ hat, so daß das Verhältnis beider Flächen den Wert

$$(1) \qquad \mathfrak{Q} = \frac{\Delta_1 x\, \Delta_2 y - \Delta_2 x\, \Delta_1 y}{\Delta_1 u\, \Delta_2 v - \Delta_2 u\, \Delta_1 v}$$

hat. Hierin ist:

$$\begin{aligned} \Delta_i x &= \varphi(u + \Delta_i u,\ v + \Delta_i v) - \varphi(u, v), \\ \Delta_i y &= \psi(u + \Delta_i u,\ v + \Delta_i v) - \psi(u, v) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2).$$

Nach dem Mittelwertsatze 28, Nr. 137, läßt sich hierfür schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta_i x = {} & \frac{\partial}{\partial u}\varphi(u + \theta_i \Delta_i u,\ v + \theta_i \Delta_i v) \cdot \Delta_i u + \\ & + \frac{\partial}{\partial v}\varphi(u + \theta_i \Delta_i u,\ v + \theta_i \Delta_i v) \cdot \Delta_i v, \\ \Delta_i y = {} & \frac{\partial}{\partial u}\psi(u + \vartheta_i \Delta_i u,\ v + \vartheta_i \Delta_i v) \cdot \Delta_i u + \\ & + \frac{\partial}{\partial v}\psi(u + \vartheta_i \Delta_i u,\ v + \vartheta_i \Delta_i v) \cdot \Delta_i v, \end{aligned}$$

wobei θ_1, θ_2, ϑ_1, ϑ_2 positive echte Brüche bedeuten. Wir setzen diese Werte in (1) ein und dividieren dann Zähler und Nenner durch $\Delta_1 u\, \Delta_2 u$. Lassen wir alsdann $\Delta_1 u$, $\Delta_1 v$, $\Delta_2 u$, $\Delta_2 v$ nach Null streben, doch so, daß die Brüche $\Delta_1 v : \Delta_1 u$ und $\Delta_2 v : \Delta_2 u$ (oder ihre reziproken Werte) bestimmte endliche Grenzwerte $d_1 v : d_1 u$ und $d_2 v : d_2 u$ (bzw. die reziproken Werte)

erreichen, so kommt, weil die Ableitungen von φ und ψ stetig sind:

$$\lim \Omega = \varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v = \mathfrak{D}.$$

Wir können daher sagen:

Satz 12: Vermitteln die Gleichungen $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ eine stetige Abbildung einer Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y auf einer Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten u, v und sind P, P_1, P_2 drei Punkte der ersten Ebene und P', P_1', P_2' ihre Bildpunkte, so ist der Grenzwert des Verhältnisses der Inhalte der beiden geradlinigen Dreiecke PP_1P_2 und $P'P_1'P_2'$ gleich dem Werte der Funktionaldeterminante $\varphi_u\psi_v - \psi_u\varphi_v$, gebildet für die Stelle P', sobald P_1' und P_2' so nach P' streben, daß den Richtungen der Seiten $P'P_1'$ und $P'P_2'$ bestimmte Grenzlagen zukommen.

Da wir ein Flächenstück einer Ebene, das sich in einem Punkt zusammenzuziehen strebt, in lauter Dreiecke zerlegen können, deren Seiten um so weniger von geraden Linien abweichen, je stärker die Zusammenziehung geworden ist, so könnten wir aus dem Ergebnisse den Schluß ziehen, daß das Verhältnis der Fläche eines Stückes der xy-Ebene zur Fläche des entsprechenden Stückes der uv-Ebene nach $\mathfrak{D}$ strebt, wobei $\mathfrak{D}$ für diejenige Stelle (u, v) zu bilden ist, nach der hin sich das zweite Stück zusammenzieht.

Dieser Schluß ist allerdings nicht streng. Wir werden aber später sehen, daß er doch richtig ist (in Nr. 599).

597. Das Problem der Transformation der Doppelintegrale. Nach diesen Vorbereitungen stellen wir uns die Aufgabe, in einem Doppelintegrale

$$(1) \qquad V = \iint_E f(x, y)\,dx\,dy$$

die neuen Veränderlichen u, v einzuführen, die mit x, y durch die Gleichungen

$$(2) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

verbunden sind.

Dabei setzen wir voraus, daß der Bereich E, auf den sich das Doppelintegral (1) bezieht, zu jenem Bereiche von

Wertepaaren x, y oder von Punkten (x, y) der xy-Ebene gehört, für den die in Nr. 593 formulierten drei Voraussetzungen gelten. Außerdem soll, wie immer, $f(x, y)$ eine stetige Funktion von x, y im Bereiche E sein.

Die gestellte Aufgabe hat eine einfache geometrische Deutung: Denken wir uns E in eine Anzahl Teilbereiche $\varDelta E$ zerlegt und in jedem einen Punkt Q gewählt, so ist V nach Satz 5, Nr. 577, als Grenzwert der Summe aller Produkte $f_Q \varDelta E$ aufzufassen, wobei f_Q den Wert von f für den Punkt Q bedeutet und der Grenzübergang in der Weise zu bewerkstelligen ist, daß die Ausdehnungen aller Teile $\varDelta E$ nach Null streben.

Jeder Stelle (x, y) des Bereiches E entspricht nun eine Stelle (u, v) der uv-Ebene, dem gesamten Bereiche E also ein Bereich E' der uv-Ebene und jeder Zerteilung von E in Gebiete $\varDelta E$ eine Zerteilung von E' in Gebiete $\varDelta E'$. Ferner entspricht der Stelle Q von $\varDelta E$ eine Stelle Q' von $\varDelta E'$. Wir wollen annehmen, Q' habe die Koordinaten u, v, und es sei schon der Wert bekannt, nach dem das Verhältnis $\varDelta E : \varDelta E'$ strebt, sobald sich $\varDelta E'$ auf die Stelle Q' zusammenzieht. Dieser Grenzwert wird eine Funktion ω von u und v sein:

$$\lim \frac{\varDelta E}{\varDelta E'} = \omega(u, v). \tag{3}$$

Alsdann ist:

$$\lim f_Q \varDelta E = \lim f_Q \omega(u, v) \varDelta E'. \tag{4}$$

Wenn Q die Koordinaten x, y hat, so daß f_Q den zugehörigen Wert $f(x, y)$ bedeutet, so folgt aus (2), daß f_Q gleich der Funktion von u und v:

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v),\ \psi(u, v)],$$

gebildet für die Stelle Q', ist. Alsdann gibt (4):

$$\lim \sum f_Q \varDelta E = \lim \sum F_{Q'} \omega(u, v) \varDelta E'$$

oder:

$$\int_E\!\!\int f(x, y)\, dx\, dy = \int_{E'}\!\!\int F(u, v)\, \omega(u, v)\, du\, dv.$$

Die gestellte Aufgabe wird also zu einer solchen Formel führen:

(5) $$\int\limits_E\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{E'}\int f(\varphi,\psi)\,\omega(u,v)\,du\,dv.$$

Das Doppelintegral rechts bezieht sich auf den Bereich E' der uv-Ebene, und sein Integrand ist das Produkt der alten Funktion f mit einer allerdings vorerst noch unbekannten Funktion $\omega(u, v)$.

Wenn wir in jedem Punkte (x, y) auf der xy-Ebene das Lot von der Länge

(6) $$z = f(x, y)$$

errichten und ebenso in jedem Punkte (u, v) auf der uv-Ebene das Lot von der Länge

(7) $$w = \omega(u, v) f(\varphi(u, v)\,\psi(u, v)),$$

so ergeben sich zwei krumme Flächen im xyz-Raume bzw. uvw-Raume, wobei x, y, z und u, v, w rechtwinklige Koordinaten sein sollen. Nach Nr. 578 stehen die beiden krummen Flächen wegen (5) alsdann in folgender Beziehung:

Ist ΔE irgend ein Teil des Bereiches E und $\Delta E'$ der zugehörige Teil des Bildbereiches E', so ist das Volumen des geraden Zylinders, der die Grundfläche ΔE hat und bis an die Fläche (6) reicht, stets gleich dem Volumen des geraden Zylinders, der die Grundfläche $\Delta E'$ hat und bis an die Fläche (7) reicht.

598. Ausführung der Transformation eines Doppelintegrals. Bei einem *einfachen* Integrale ist die Einführung *einer* neuen Veränderlichen mittels der Substitutionsmethode von Nr. 417 leicht zu bewerkstelligen. Wir führen daher die Aufgabe auf diese Methode zurück, indem wir einerseits das Doppelintegral V der letzten Nummer nach Nr. 576 als das Ergebnis der Aufeinanderfolge zweier einfacher Integrationen

$$\int\left[\int f(x, y)\,dy\right]dx$$

auffassen und andererseits die beiden neuen Veränderlichen u, v nicht zusammen, sondern nacheinander einführen.

Bei der Integration hinsichtlich *y spielt x die Rolle einer willkürlichen Konstanten.* Vermöge der ersten der beiden Gleichungen:

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v) \tag{1}$$

wird bei dieser Auffassung *u als eine gewisse Funktion von v* definiert, vorausgesetzt, daß diese erste Gleichung u wirklich enthält, d. h. *vorausgesetzt, daß $\varphi_u \neq 0$ ist.* Die so definierte Funktion u von v denken wir uns in die zweite Gleichung (1) substituiert, so daß eine Gleichung zwischen y und v hervorgeht, die also *y als Funktion von v* definiert. Dabei ist:

$$dy = \left(\psi_u \frac{du}{dv} + \psi_v\right) dv,$$

worin für $du : dv$ derjenige Wert zu setzen ist, der bei der Annahme $x =$ konst. aus der ersten Gleichung (1) folgt. Diese Gleichung gibt aber:

$$0 = \varphi_u \frac{du}{dv} + \varphi_v, \quad \text{d. h.} \quad \frac{du}{dv} = -\frac{\varphi_v}{\varphi_u},$$

so daß herauskommt:

$$dy = \left(-\psi_u \frac{\varphi_v}{\varphi_u} + \psi_v\right) dv = \frac{\mathfrak{D}}{\varphi_u} dv.$$

Substituieren wir v statt y in dem Integral $\int f(x, y)\, dy$, so ergibt sich daher:

$$\int f(x, y) \frac{\mathfrak{D}}{\varphi_u} dv,$$

wobei unter u und y die erwähnten Funktionen von v zu verstehen sind.

Wir sind jetzt zu einem Doppelintegrale

$$\int\int f(x, y) \frac{\mathfrak{D}}{\varphi_u} dx\, dv \tag{2}$$

gelangt, in dem x und v die Veränderlichen des Integranden bedeuten. Der Bereich E, auf den sich das in x und y ausgedrückte ursprüngliche Integral bezog, wird durch einen Rand begrenzt, längs dessen eine Beziehung zwischen x und y besteht. Anstelle dieses Bereiches ist jetzt ein Bereich von Wertepaaren x, v getreten, und die Grenze dieses Bereiches wird durch eine Beziehung zwischen x und v ausgedrückt.

Das neue Doppelintegral (2) können wir nun wieder als das Ergebnis zweier aufeinanderfolgender einfacher Integrationen auffassen, und wir dürfen zuerst hinsichtlich x und alsdann hinsichtlich v integrieren:

$$\int\left[\int f(x, y)\frac{\mathfrak{D}}{\varphi_u}dx\right]dv.$$

Bei der Integration hinsichtlich x *spielt alsdann* v *die Rolle einer willkürlichen Konstanten.* Nun können wir mittels der ersten Gleichung (1), nämlich:

$$x = \varphi(u, v),$$

statt x die neue Veränderliche u einführen, und es ist dabei:

$$dx = \varphi_u du$$

zu setzen, so daß kommt:

$$\int\left[\int f(x, y)\frac{\mathfrak{D}}{\varphi_u}\varphi_u du\right]dv.$$

Demnach hat das Doppelintegral schließlich diese Gestalt angenommen:

$$\int\int f(x, y)\mathfrak{D}du dv.$$

Darin sind jetzt die beiden neuen Veränderlichen u und v eingeführt, d. h. unter x und y sind darin die Werte (1) zu verstehen, so daß wir das neue Integral in dieser Gestalt erhalten:

(3) $$\int\int_{E'} f(\varphi, \psi)\mathfrak{D}du dv.$$

Hierin soll E' den Bereich derjenigen Wertepaare u, v bezeichnen, die vermöge (1) den Wertepaaren x, y des Bereiches E entsprechen.

Bei dieser Transformation haben wir jedoch auf einen Umstand nicht die gebührende Rücksicht genommen: Bei den Doppelintegralen haben wir stets die Veränderlichen des Integranden als *wachsende* Größen angenommen, indem wir die oberen Integralgrenzen größer als die unteren wählten. Dies geschah, weil die Doppelintegrale nach Satz 4, Nr. 575, eine geometrische Bedeutung als Volumina, d. h. als Grenzwerte von Summen von Prismeninhalten haben, wobei die Grundflächen

[598

der Prismen Rechtecke $\varDelta x \varDelta y$ waren, die wir als positive Größen auffaßten. Da nun die Grenzen der beiden einfachen Integrale, die das neue Doppelintegral (3) liefern, durch den Rand des neuen Bereiches E' bedingt werden, so können wir nicht erwarten, daß auch hier stets die oberen Grenzen größer als die unteren werden. Wollen wir diese Vorschrift aber machen, so werden wir eventuell genötigt sein, die Grenzen zu vertauschen, d. h. der neue Wert (3) ist, abgesehen von seinem Vorzeichen, richtig, und es bleibt noch übrig, das richtige Vorzeichen zu bestimmen.

Dies geschieht so: Der Bereich E der Wertepaare x, y zerfällt in zwei Teile E_1 und E_2; im einen ist $f(x, y) > 0$, im andern < 0, so daß bei dem Doppelintegrale:

$$(4) \quad \int\limits_E\int f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{E_1}\int f(x, y)\,dx\,dy + \int\limits_{E_2}\int f(x, y)\,dx\,dy$$

der erste Summand rechts positiv und der zweite negativ ist, weil sie als Folgen von einfachen Integrationen aufzufassen sind, bei denen die oberen Grenzen größer als die unteren sind, während der Integrand positiv bzw. negativ ist. Vgl. Satz 12, Nr. 412. Den Teilen E_1 und E_2 von E entsprechen Teile E_1' und E_2' von E'. Im ersten ist $f(\varphi, \psi) > 0$, im zweiten < 0. Wenn wir also auch beim transformierten Integrale die oberen Grenzen größer als die unteren wählen und es zerlegen in:

$$(5) \int\limits_{E'}\int f(\varphi,\psi)\mathfrak{D}\,du\,dv = \int\limits_{E_1'}\int f(\varphi,\psi)\mathfrak{D}\,du\,dv + \int\limits_{E_2'}\int f(\varphi,\psi)\mathfrak{D}\,du\,dv,$$

so haben hier die Summanden rechts dieselben Vorzeichen wie die in (4), sobald $\mathfrak{D} > 0$ ist, dagegen haben sie die entgegengesetzten Vorzeichen, wenn $\mathfrak{D} < 0$ ist. Wir erinnern hierbei daran, daß $\mathfrak{D}$ nach Nr. 593 überall einerlei Vorzeichen hat. Hieraus schließen wir nun: Die Summanden in (4) sind denen in (5) nur dann auch im Vorzeichen gleich, *wenn statt* $\mathfrak{D}$ *der absolute Betrag von* $\mathfrak{D}$ *gesetzt wird.* Also haben wir das Ergebnis der Transformation so darzustellen:

$$(6) \qquad \int\limits_E\int f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{E'}\int f(\varphi, \psi)\,|\,\mathfrak{D}\,|\,du\,dv.$$

Ferner wurde oben bei der Ausführung der Transformation $\varphi_u \neq 0$ vorausgesetzt. Diese Annahme ist, wie wir jetzt zeigen wollen, unnötig. Nach der zweiten Voraussetzung in Nr. 593 wird $\mathfrak{D}$ oder $\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v$ nirgends gleich Null, woraus folgt, daß an jeder Stelle entweder $\varphi_u \neq 0$ oder $\varphi_v \neq 0$ ist. Wir zerlegen nun den Bereich E in zwei Teile E_1 und E_2; dabei soll E_1 lauter solche Wertepaare x, y enthalten, für die infolge von (1) die Ableitung $\varphi_u \neq 0$ ist, und E_2 lauter solche, für die $\varphi_v \neq 0$ ist. Das vorgelegte Doppelintegral läßt sich nun wieder wie in (4) als Summe des auf E_1 und des auf E_2 bezüglichen darstellen. Beim ersten Summanden ist wegen $\varphi_u \neq 0$ die obige Transformation anwendbar, so daß er übergeht in:

$$\int\limits_{E_1'}\!\!\int f(\varphi, \psi)\,|\mathfrak{D}|\,du\,dv. \tag{7}$$

Beim zweiten Summanden verfahren wir, weil $\varphi_v \neq 0$ ist, genau so mit dem einzigen Unterschiede, daß wir bei der allmählichen Einführung der neuen Veränderlichen u, v diese beiden Größen ihre Rollen vertauschen lassen, d. h. wir führen zuerst statt x, y die Veränderlichen x und u und alsdann die Veränderlichen u und v ein. Dabei sind also φ_u und ψ_u mit φ_v und ψ_v zu vertauschen. Es zieht dies nach sich, daß $\mathfrak{D}$ durch $-\mathfrak{D}$ ersetzt werden muß. Weil aber nur der absolute Betrag von $\mathfrak{D}$ auftritt, so liefert der zweite Summand:

$$\int\limits_{E_2'}\!\!\int f(\varphi, \varphi)\,|\mathfrak{D}|\,du\,dv. \tag{8}$$

Die Summe der beiden Integrale (7) und (8) aber ist, da E_1' und E_2' den Bereich E' ausmachen, das in (6) rechts stehende Integral.

Wir gelangen also in *jedem* Falle zu der Transformationsformel (6).

Satz 13: Liegt ein Doppelintegral

$$V = \int\limits_{E}\!\!\int f(x, y)\,dx\,dy$$

vor, erstreckt über einen solchen Bereich E von Wertepaaren x, y,

in dem f eine stetige Funktion von x und y ist, und werden durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

die neuen Veränderlichen u und v eingeführt, so geht V über in

$$\iint\limits_{E'} f(\varphi, \psi)\,|\mathfrak{D}|\,du\,dv.$$

Dabei sind u, v ebenso wie x, y in V solche Veränderliche, die bei der Ausführung der Integrationen wachsen, und $\mathfrak{D}$ *bedeutet die Funktionaldeterminante:*

$$\mathfrak{D} = \varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v,$$

während E' der zum Bereiche E gehörige Bereich der Wertepaare u, v ist. Vorausgesetzt wird bei dieser Transformation, daß erstens φ *und* ψ *mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in dem Bereiche E' stetig seien, zweitens* $\mathfrak{D}$ *daselbst nirgends verschwinde und drittens die Bereiche E und E' gegenseitig eindeutig aufeinander bezogen seien.*

Beispiel: Ist $x = v\cos u$, $y = v\sin u$, so ist $\mathfrak{D} = -v$, also

$$\iint\limits_{E} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{E'} f(v\cos u, v\sin u)\,v\,du\,dv,$$

sobald $v > 0$ ist. Nun sind aber u und v auch als *Polarkoordinaten* ω und ϱ aufzufassen, da ja $x = \varrho\cos\omega$, $y = \varrho\sin\omega$ ist. Also kommt als neuer Ausdruck des Integrals:

$$\iint\limits_{E'} \varrho f(\varrho\cos\omega, \varrho\sin\omega)\,d\omega\,d\varrho.$$

Diesen Wert haben wir unter (3) in Nr. 582 direkt berechnet.

599. Grenzwert des Verhältnisses zweier entsprechender Flächenstücke bei stetiger Abbildung einer Ebene auf einer anderen Ebene. Wir sind jetzt in der Lage, die in Nr. 596 zum Schlusse versprochene Bemerkung zu machen. Nach Nr. 597 wissen wir, daß das Integral, in das

$$V = \iint\limits_{E} f(x, y)\,dx\,dy$$

bei der stetigen Abbildung

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

übergeht, die Form

$$(1) \qquad \int\!\!\int_{E'} f(\varphi, \psi)\,\omega(u, v)\,du\,dv$$

haben muß, worin

$$\omega(u, v) = \lim \frac{\Delta E}{\Delta E'}$$

ist. Dabei bedeuteten ΔE und $\Delta E'$ einander entsprechende positiv zu messende Flächenstücke von E und E', und der Grenzübergang sollte so stattfinden, daß sich $\Delta E'$ auf den Punkt (u, v) zusammenzieht. Die Vergleichung des Integrals (1) mit dem in Satz 13 angegebenen zeigt nun, daß $\omega = |\mathfrak{D}|$ ist. Also folgt:

Satz 14: Wenn bei einer stetigen Abbildung $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y in der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten u, v der zu einem Flächenstücke ΔE der ersten Ebene gehörige Teil $\Delta E'$ der zweiten Ebene die bestimmt gewählte Stelle (u, v) enthält und wenn die Ausdehnungen von $\Delta E'$ nach Null streben, so ist der Grenzwert

$$\lim \frac{\Delta E}{\Delta E'} = |\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v|.$$

600. Komplanation einer Fläche, die mittels krummliniger Koordinaten dargestellt ist. Die in Satz 13, Nr. 598, gefundene Formel für die Transformation eines Doppelintegrals wollen wir benutzen, um den in Satz 8, Nr. 584, gefundenen Wert

$$(1) \qquad \int\!\!\int_E \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dx\,dy$$

für ein Stück der Fläche

$$(2) \qquad z = f(x, y)$$

auf eine bemerkenswerte andere Form zu bringen.

Wenn wir wie in Nr. 593 neue Veränderliche u und v vermöge

(3) $$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

einführen, so wird z nach (2) ebenfalls eine Funktion χ von u und v. Die Fläche kann nun statt in der Form (2) auch in der Form:

(4) $$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

dargestellt werden, indem jetzt x, y und z Funktionen zweier Hilfsveränderlichen u, v sind. Von dieser Art der Darstellung einer Fläche war schon in Nr. 251 die Rede. Man nennt u und v *Gaußische oder krummlinige Koordinaten der Fläche*, und zwar aus folgendem Grunde: Geben wir z. B. u einen bestimmten Wert, so sind x, y, z nach (4) Funktionen einer einzigen Veränderlichen v, d. h. sie definieren eine *Kurve*, die auf der Fläche verläuft. Man nennt diese Kurve eine *Parameterlinie* (*u*) *der Fläche*. Ebenso gehört zu jedem Werte von v nach (4) eine *Parameterlinie* (*v*) *der Fläche*. Jeder Punkt der Fläche, der durch bestimmte Werte von u und v nach (4) definiert ist, erscheint als Schnittpunkt einer Parameterlinie (u) und einer Parameterlinie (v). Die Parameterlinien überdecken also die Fläche netzartig.

In (1) bedeuten p und q die Ableitungen von z nach x und y. Nun sind x, y nach den beiden ersten Gleichungen (4) Funktionen von u und v. Daher kommt:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{d v},$$

woraus folgt:

$$p = -\frac{y_u z_v - z_u y_v}{x_u y_v - y_u x_v}, \qquad q = -\frac{z_u x_v - x_u z_v}{x_u y_v - y_u x_v}.$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{D} = \varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v = x_u y_v - y_u x_v.$$

Das Flächenstück (1) stellt sich in den Veränderlichen u, v nach Satz 13, Nr. 598, so dar:

$$\int\!\!\int \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,|\mathfrak{D}|\,du\,dv.$$

Dies Doppelintegral bezieht sich auf einen gewissen Bereich von Wertepaaren u, v, d. h. auf einen gewissen Bereich von

Flächenpunkten mit den krummlinigen Koordinaten u, v. Nach den vorhergehenden Formeln hat dies Doppelintegral den Ausdruck:

$$\iint \sqrt{(y_u z_v - z_u y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2 + (x_u y_v - y_u x_v)^2}\, du\, dv,$$

wobei die Wurzel positiv ist. Der Radikand läßt sich so schreiben:

$$(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2.$$

Wenn wir nun unter E, F, G die drei Größen verstehen:

$$(5) \qquad \begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \qquad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \\ \qquad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \end{cases}$$

so nimmt das Doppelintegral die Form an:

$$(6) \qquad \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Die Größen E, F, G, die überhaupt eine wichtige Rolle in der Flächentheorie spielen, falls man Gaußische Koordinaten anwendet, heißen die auf die Fläche (4) bezüglichen *Fundamentalgrößen erster Ordnung*. Es gibt nämlich noch andere, die als die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung bezeichnet werden, aber hier nicht in Betracht kommen.

Die durch den Flächenpunkt (x, y, z) oder (u, v) gehende Parameterlinie (v) hat in diesem Punkte eine Tangente, deren Richtungskosinus nach (3) in Nr. 252 sofort aus (4) durch Differentiation nach u gewonnen werden:

$$\frac{x_u}{\sqrt{E}}, \quad \frac{y_u}{\sqrt{E}}, \quad \frac{z_u}{\sqrt{E}},$$

wobei die Wurzel positiv ist, falls wir die Kurve im Sinne wachsender Werte von u positiv rechnen. Entsprechend sind

$$\frac{x_v}{\sqrt{G}}, \quad \frac{y_v}{\sqrt{G}}, \quad \frac{z_v}{\sqrt{G}}$$

die Richtungskosinus der durch den Flächenpunkt gehenden Parameterlinie (u). Ist λ der Winkel beider Tangenten, so ist:

$$\cos\lambda = \frac{x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v}{\sqrt{E}\sqrt{G}} = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}},$$

wobei die Wurzeln positiv sind. Hieraus folgt:

$$\sin\lambda = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}\sqrt{G}},$$

wobei auch die Wurzel im Zähler positiv ist, wenn wir den Winkel λ zwischen 0 und π annehmen. Es ist jetzt hiernach und nach (6) die Oberfläche gleich dem Doppelintegrale:

(7) $$\int\int \sqrt{E}\sqrt{G}\sin\lambda\, du\, dv.$$

Nun ist das *Bogenelement* $d_u s$ der Parameterlinie (v) in dem betrachteten Flächenpunkte nach (4) in Nr. 257:

$$d_u s = \sqrt{(x_u du)^2 + (y_u du)^2 + (z_u du)^2} = \sqrt{E}du,$$

wobei $\sqrt{E}$ positiv ist. Ebenso ist $d_v s = \sqrt{G}dv$ das Bogenelement der Parameterlinie (u) in dem Flächenpunkte. Daher läßt sich das Doppelintegral (7) so darstellen:

(8) $$\int\int \sin\lambda\, d_u s\, d_v s.$$

Wir erinnern jetzt daran, daß das Doppelintegral

(9) $$\int\int dx\, dy$$

in der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, hinerstreckt über einen gewissen Bereich, nichts anderes ist als der Grenzwert der Summe aller Teilrechtecke $\Delta x \Delta y$ des Bereiches (nach Nr. 575), d. h. der Flächeninhalt des Bereiches. Die Formel (8) besagt etwas ganz Entsprechendes für den Flächeninhalt der krummen Fläche (4).

Zerlegen wir nämlich den betrachteten Bereich der Oberfläche durch Parameterlinien (u) und (v) in Teilbereiche, so daß etwa zu u, v und $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ vier Parameterlinien gehören, die ein krummes Viereck auf der Fläche begrenzen, so mögen $\Delta_u s$ und $\Delta_v s$ die Bogenlängen der vom Punkte (u, v) ausgehenden beiden Vierecksseiten auf den Parameterlinien (v) und (u) sein. Da die Parameterlinien im Punkte (u, v) Tangenten haben, die den Winkel λ einschließen, so nähert sich das Produkt $\sin\lambda\,\Delta_u s \Delta_v s$ um so mehr dem Werte des Flächeninhaltes des Vierecks, je kürzer die Seiten $\Delta_u s$ und $\Delta_v s$ werden,

weil das Viereck dabei danach strebt, einem ebenen Parallelogramme ähnlich zu werden. Ebenso wie wir in (9) unter $dx\,dy$ den Grenzwert eines Teilrechteckes $\Delta x \Delta y$ verstehen können, läßt sich also auch in (8) das Produkt $\sin\lambda\, d_u s\, d_v s$ als Grenzwert eines Teilvierecks der Fläche (4) auffassen.

601. Komplanation einer Fläche, die mittels räumlicher Polarkoordinaten dargestellt ist. Führen wir nach Nr. 97 räumliche Polarkoordinaten r, θ, ψ ein, indem wir setzen:

$$(1) \qquad x = r\sin\theta\cos\psi, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad z = r\cos\theta,$$

so läßt sich die Fläche $z = f(x, y)$ in der Form:

$$r\cos\theta = f(r\sin\theta\cos\psi, \quad r\sin\theta\sin\psi)$$

darstellen, und die Auflösung dieser Gleichung nach r möge ergeben:

$$(2) \qquad r = F(\theta, \psi),$$

so daß hiermit die Fläche in räumlichen Polarkoordinaten ausgedrückt ist. Wir können jetzt θ und ψ als die Gaußischen Koordinaten u und v in der vorigen Nummer auffassen. Alsdann ist nach den Formeln (1):

$$x_\theta = r\cos\theta\cos\psi + r_\theta\sin\theta\cos\psi, \quad x_\psi = -r\sin\theta\sin\psi + r_\psi\sin\theta\cos\psi,$$

$$y_\theta = r\cos\theta\sin\psi + r_\theta\sin\theta\sin\psi, \quad y_\psi = r\sin\theta\cos\psi + r_\psi\sin\theta\sin\psi,$$

$$z_\theta = -r\sin\theta + r_\theta\cos\theta, \qquad z_\psi = r_\psi\cos\theta,$$

so daß die Fundamentalgrößen E, F, G nach (5) in voriger Nummer diese werden:

$$E = r^2 + r_\theta^2, \qquad F = r_\theta r_\psi, \qquad G = r^2\sin^2\theta + r_\psi^2,$$

also

$$EG - F^2 = r^2[(r^2 + r_\theta^2)\sin^2\theta + r_\psi^2]$$

wird. Das Oberflächenintegral (6) der letzten Nummer wird somit dies:

$$(3) \qquad \iint r\sqrt{(r^2 + r_\theta^2)\sin^2\theta + r_\psi^2}\,d\theta\,d\psi.$$

Dabei soll die Koordinate r positiv gewählt sein.

Handelt es sich z. B. um die Komplanation eines Teiles der *Kugel*fläche vom Radius r, so ist r konstant, so daß sich das Doppelintegral reduziert auf:

$$r^2 \int\int |\sin\theta|\, d\theta d\psi.$$

602. Schwerpunkte von ebenen Flächen und Kurven. Als Anhang möge hier noch der Begriff des Schwerpunktes, der uns in Nr. 567 und Nr. 589 begegnete, definiert werden.

Es liege ein ebenes Flächenstück E, begrenzt durch eine stetige Kurve, vor, und dieser Bereich werde in Teilbereiche ΔE zerlegt. Außerdem sei in der Ebene eine Gerade g gegeben. Wählen wir in jedem Teilbereiche ΔE einen Punkt Q und verstehen wir unter q seine Entfernung von g, positiv oder negativ gerechnet, je nachdem Q auf der einen oder anderen Seite von g liegt, so wird q eine Funktion der Koordinaten x, y des Punktes Q sein. Die über alle Teilbereiche erstreckte Summe $\Sigma q \Delta E$ hat, falls die Ausdehnungen aller Teilbereiche nach Null streben, nach Nr. 577 einen von der Art der Zerlegung unabhängigen Grenzwert, nämlich den Wert eines gewissen Doppelintegrals.

Wenn die gegebene Gerade g in der Normalform die Gleichung hat:

(1)
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

so ist ihre linke Seite der Wert des Abstandes q des Punktes Q oder (x, y) von g und zwar positiv oder negativ gerechnet, je nachdem Q vom Anfangspunkte O durch die Gerade g getrennt wird oder nicht. Das erwähnte Doppelintegral ist also dieses

(2)
$$M_g = \int\int_E (x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)\, dx\, dy.$$

Man nennt es das *statische Moment* der Fläche E in bezug auf die Gerade g. Insbesondere, wenn g die x-Achse oder y-Achse ist, so ergeben sich die statischen Momente

(3)
$$M_x = \int\int_E y\, dx\, dy, \qquad M_y = \int\int_E x\, dx\, dy.$$

Nach (2) ist nun:

$$M_g = \cos\alpha\, M_y + \sin\alpha\, M_x - p \iint\limits_E dx\, dy.$$

Das letzte Doppelintegral aber ist die Fläche E selbst. Also folgt:

$$(4) \qquad M_g = \cos\alpha\, M_y + \sin\alpha\, M_x - pE.$$

Es gibt nun, behaupten wir, einen Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ in der Ebene, der so liegt, daß in bezug auf *jede* beliebige Gerade g der Ebene das Produkt des Abstandes des Punktes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ von g mit der Fläche E gerade gleich dem statischen Momente der Fläche E in bezug auf die gewählte Gerade g ist. In der Tat hat der Punkt mit den Koordinaten:

$$(5) \qquad \mathfrak{x} = \frac{M_y}{E}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{M_x}{E}$$

diese Eigenschaft. Denn sein Abstand von der Geraden g ist nach (1) gleich $\mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\sin\alpha - p$ oder also nach (5) gleich:

$$\frac{M_y}{E}\cos\alpha + \frac{M_x}{E}\sin\alpha - p$$

und gibt, mit der Fläche E multipliziert, nach (4) das statische Moment M_g.

Dieser Punkt (5) heißt der *Schwerpunkt der Fläche E.* Seine Koordinaten sind nach (3) und (5):

$$(6) \qquad \mathfrak{x} = \frac{1}{E}\iint\limits_E x\, dx\, dy, \qquad \mathfrak{y} = \frac{1}{E}\iint\limits_E y\, dx\, dy.$$

Ist insbesondere E die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$, der Abszissenachse und den zu x_0 und X gehörigen Ordinaten, so wird:

$$E = \int_{x_0}^{X} y\, dx$$

und:

$$\iint\limits_E x\, dx\, dy = \int_{x_0}^{X} xy\, dx, \qquad \iint\limits_E y\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{X} y^2\, dx,$$

so daß kommt:

$$(7) \qquad \mathfrak{x} = \frac{\int_{x_0}^{X} xy\, dx}{\int_{x_0}^{X} y\, dx}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\int_{x_0}^{X} y^2\, dx}{2\int_{x_0}^{X} y\, dx}.$$

[602

Den Wert von $\mathfrak{y}$ hatten wir in der Tat in Nr. 567 unter (1) benutzt.

Wir wenden uns nun zum Begriffe des *Schwerpunktes einer ebenen Kurve.* Die Koordinaten x und y der Punkte der Kurve seien als Funktionen der Bogenlänge s gegeben (vgl. Nr. 194):

$$x = \varphi(s), \qquad y = \psi(s). \tag{8}$$

Wenn wir die Gesamtlänge S der Kurve in beliebige Teile Δs zerlegen und jedesmal die zugehörige Sehne $\Delta\mathfrak{s}$ nennen, so können wir in bezug auf eine beliebige gegebene Gerade g der Ebene die Summe $\Sigma q \Delta\mathfrak{s}$ bilden, worin q der Abstand des Anfangspunktes der Sehne $\Delta\mathfrak{s}$ von g sein soll. Wenn wir die Zerlegung der Gesamtlänge S in Teile Δs so weit treiben, daß alle Teile Δs nach Null streben, so strebt diese Summe, weil $\lim \Delta\mathfrak{s} : \Delta s$ nach Satz 4, Nr. 544, gleich Eins ist, nach dem Werte

$$M_g = \int_0^S q\, ds,$$

und dieser Wert heißt das *statische Moment der Kurve* (8) in bezug auf die Gerade g.

Hat die Gerade g wieder in der Normalform die Gleichung (1), so ist

$$M_g = \int_0^S (x \cos\alpha + y \sin\alpha - p)\, ds. \tag{9}$$

Insbesondere sind

$$M_x = \int_0^S y\, ds, \qquad M_y = \int_0^S x\, ds \tag{10}$$

die statischen Momente der Kurve in bezug auf die x- und y-Achse. Es gibt nun wieder einen Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ in der Ebene derart, daß das Produkt seines Abstandes von einer *jeden* beliebigen Geraden g mit der Gesamtlänge S der Kurve gleich dem statischen Momente M_g ist. In der Tat hat der Punkt mit den Koordinaten:

$$\mathfrak{x} = \frac{M_y}{S}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{M_x}{S} \tag{11}$$

diese Eigenschaft, da er von g den Abstand $\mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\sin\alpha - p$ hat und also das Produkt dieses Abstandes mit S nach (11) und (10) gleich

$$\cos\alpha\int_0^S x\,ds + \sin\alpha\int_0^S y\,ds - pS,$$

d. h. nach (9) gleich M_g ist. Dieser ausgezeichnete Punkt (11) heißt der Schwerpunkt der Kurve (8). Seine Koordinaten sind nach (11) und (10) diese:

$$(12)\qquad \mathfrak{x} = \frac{1}{S}\int_0^S x\,ds, \quad \mathfrak{y} = \frac{1}{S}\int_0^S y\,ds$$

Die Abszisse $\mathfrak{x}$ haben wir in der Tat in Nr. 589 benutzt.

§ 6. Drei- und mehrfache Integrale.

603. Begriff des dreifachen Integrals. In diesem Paragraphen wollen wir, jedoch ohne alle Einzelheiten gründlich zu besprechen, auch die drei- und mehrfachen Integrale in den Bereich unserer Betrachtungen ziehen. Wir verzichten dabei auf die Existenzbeweise; sie sind analog den Existenzbeweisen für Doppelintegrale, für Volumina- und Flächenstücke, die in den vorhergehenden Paragraphen ausführlich gegeben wurden.

Ein Raumteil V sei durch eine stetige Fläche von dem übrigen Raume abgeschlossen; ferner sei eine Funktion $f(x, y, z)$ gegeben, die für jeden Punkt (x, y, z) des Raumteiles V stetig sei. Wir können das Volumen V in Teile ΔV zerlegen und in jedem Teile einen Punkt P wählen. Ist alsdann f_P der Wert von f für den Punkt P, so bilden wir die Summe $\Sigma f_P \Delta V$, erstreckt über alle Teile ΔV. Diese Summe hat einen von der Art der angewandten Teilung unabhängigen bestimmten endlichen Grenzwert, falls die Ausdehnungen aller Teile ΔV nach Null streben, wobei die Anzahl aller Teile über jede Zahl wächst (vgl. Nr. 577). Dieser Grenzwert wird als das *dreifache Integral* bezeichnet:

$$(1)\qquad J = \iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Der Index V gibt den Bereich an, über den das Integral zu erstrecken ist. Insbesondere kann man die Teilung dadurch bewirken, daß man Teilungsebenen $x =$ konst., $y =$ konst. und $z =$ konst. anwendet. Sind Δx, Δy, Δz die Abstände je zweier benachbarter Ebenen der ersten, zweiten oder dritten Art, so ist $\Delta x \Delta y \Delta z$ das Volumen eines Raumteiles ΔV, nämlich eines Rechtflachs. Die Summe $\Sigma f_p \Delta x \Delta y \Delta z$ ist eine dreifache Summe, erstreckt über alle Δx, alle Δy und alle Δz, und aus dieser dreifachen Summe geht in naturgemäßer Weise die Bezeichnung des Grenzwertes durch das dreifache Integral (1) hervor (vgl. Nr. 573). Bei der Bildung der Summe $\Sigma f_p \Delta x \Delta y \Delta z$ darf man ohne Beeinträchtigung des Grenzwertes J von den unvollständigen Rechtflachen absehen, die längs der äußeren Begrenzung von V gelegen sind (vgl. Nr. 575).

Die Auswertung des dreifachen Integrals J geschieht durch drei aufeinanderfolgende einfache Integrationen, z. B. zuerst hinsichtlich z, dann hinsichtlich y und schließlich hinsichtlich x. Dabei sind die Grenzen für die Integration hinsichtlich z Funktionen von x und y, die Grenzen für die Integration hinsichtlich y Funktionen von x und die Grenzen für die Integration hinsichtlich x Konstanten (vgl. Nr. 576). Außerdem sind die oberen Grenzen stets größer als die unteren.

604. Das Volumen als dreifaches Integral. Insbesondere stellt das vorhin betrachtete Integral J das Volumen V selbst dar, wenn die Funktion f gleich Eins gewählt wird:

$$(1) \qquad V = \int\int_V\int dx\,dy\,dz.$$

Sind x', y', z' schiefwinklige Koordinaten im Raume und α, β, γ die Winkel zwischen der y'- und z'-Achse, der z'- und x'-Achse sowie der x'- und y'-Achse, so werden wir Teilebenen parallel den Koordinatenebenen anwenden, so daß die Teile ΔV Parallelepipede werden. Das Volumen eines Parallelepipeds, dessen Kanten $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ den Achsen parallel sind, ist nun aber gleich $k \Delta x \Delta y \Delta z$, wobei die positive Konstante

$$k = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

ist. Somit ergibt sich:

$$V = k\iiint\limits_V dx'\,dy'\,dz'.$$

Es seien nun u, v, w *allgemeine krummlinige Koordinaten im Raume.* Von derartigen Koordinaten sprachen wir schon in Nr. 327. Sie sind definiert durch drei Gleichungen:

(2) $$x = \varphi(u, v, w), \qquad y = \chi(u, v, w), \qquad z = \psi(u, v, w).$$

Dabei setzen wir voraus (vgl. Nr. 593), daß φ, χ, ψ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in dem betrachteten Bereiche stetig seien, daß zweitens die Funktionaldeterminante von φ, χ, ψ, nämlich

(3) $$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \varphi\,\chi\,\psi \\ u\;v\;w \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \end{vmatrix}$$

ebenda von Null verschieden, also auch stets von einerlei Vorzeichen sei, und daß drittens zu jedem Wertsysteme u, v, w nur ein Wertsystem x, y, z und umgekehrt zu jedem Wertsysteme x, y, z nur ein Wertsystem u, v, w gehöre — natürlich innerhalb der zu benutzenden Variabilitätsbereiche. Durch diese Annahmen wird nämlich auch für die Systeme u, v, w ein Variabilitätsbereich vorgeschrieben.

Den Raumteil V können wir nun dadurch definieren, daß wir die Gleichung der stetigen Fläche, die ihn umschließt, durch Einführung der Werte (2) in der Form

$$F(u, v, w) = 0$$

schreiben, so daß hierdurch alle Wertsysteme u, v, w, die zu Punkten (x, y, z) auf der Oberfläche des Volumens V gehören, definiert sind. Es handelt sich alsdann darum, die neuen Veränderlichen u, v, w in die Volumenformel (1) einzuführen.

Dabei schicken wir voraus, daß die beiden ersten Gleichungen (2) gewiß nach zweien der drei Veränderlichen u, v, w auflösbar sind. Denn sonst wären die drei Funktionaldeterminanten

$$\varphi_v\chi_w - \chi_v\varphi_w, \qquad \varphi_w\chi_u - \chi_w\varphi_u, \qquad \varphi_u\chi_v - \chi_u\varphi_v$$

[604

gleich Null, also auch $\mathfrak{D}$, was der Voraussetzung widerspricht. Nehmen wir daher an, die beiden ersten Gleichungen (2) seien gerade nach u und v auflösbar, d. h. es sei

$$\varphi_u \chi_v - \chi_u \varphi_v \neq 0. \tag{4}$$

Ferner ist die erste Gleichung (2) gewiß nach u oder nach v auflösbar, weil sonst $\varphi_u = 0$ und $\varphi_v = 0$ wäre, was der Annahme (4) widerspricht. Wir nehmen deshalb an, die erste Gleichung (2) sei gerade nach u auflösbar, also:

$$\varphi_u \neq 0. \tag{5}$$

Nun können wir das dreifache Integral (1) durch drei aufeinanderfolgende einfache Integrationen auswerten; zunächst betrachten wir die Integration hinsichtlich z, bei der *x und y die Rollen von Konstanten spielen.* Fassen wir x und y so auf, so definieren die beiden ersten Gleichungen (2) *die Größen u und v als Funktionen von w,* weil diese Gleichungen nach u und v auflösbar sind. Dabei ist:

$$0 = \varphi_u \frac{du}{dw} + \varphi_v \frac{dv}{dw} + \varphi_w, \qquad 0 = \chi_u \frac{du}{dw} + \chi_v \frac{dv}{dw} + \chi_w.$$

Denken wir uns die Funktionen u und v von w in die dritte Gleichung (2) eingesetzt, so ist dies eine Gleichung zwischen z und w, so daß *z eine Funktion von w* wird mit der Ableitung:

$$\frac{dz}{dw} = \psi_u \frac{du}{dw} + \psi_v \frac{dv}{dw} + \psi_w.$$

Elimination von $du:dw$ und $dv:dw$ aus den drei letzten Gleichungen gibt:

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w - \dfrac{dz}{dw} \end{vmatrix} = 0,$$

also mit Rücksicht auf (3):

$$dz = \frac{\mathfrak{D}}{\varphi_u \chi_v - \chi_u \varphi_v} dw.$$

Wir substituieren nun in dem auf z bezüglichen einfachen Integrale die neue Veränderliche w, da wir ja z nach dem Vorhergehenden als Funktion von w auffassen können. Weil

das Differential dz alsdann den soeben berechneten Wert hat, so geht das dreifache Integral (1) über in:

$$(6) \qquad V = \int\int\int \frac{\mathfrak{D}}{\varphi_u \chi_v - \chi_u \varphi_v} dx\, dy\, dw.$$

Der Bereich von Wertsystemen x, y, w, auf den es sich bezieht, ist so festzustellen: Gegeben ist der Bereich der Wertsysteme x, y, z des ursprünglichen Integrals V. Lösen wir nun die drei Gleichungen (2) nach u, v, w auf, so wird w eine gewisse Funktion von x, y, z. Also ist dann der Bereich der Wertsysteme x, y, w aus dem der Wertsysteme x, y, z sofort zu erschließen.

Es steht aber in unserem Belieben, die Reihenfolge der drei einfachen Integrationen nach x, y, w, wodurch das Integral (6) ausgewertet wird, zu ändern. Wir können z. B. zuerst hinsichtlich y, dann hinsichtlich w und schließlich hinsichtlich x integrieren. Bei der auf y bezüglichen einfachen Integration sind alsdann *x und w wie willkürliche Konstanten zu behandeln.* Wegen (5) definiert jetzt die erste Gleichung (2) die Größe *u als Funktion von v*, für die

$$0 = \varphi_u \frac{du}{dv} + \varphi_v$$

ist. Einsetzung dieser Funktion u von v in die zweite Gleichung (2) gibt eine Gleichung, die *y als Funktion von v* definiert, für die

$$\frac{dy}{dv} = \chi_u \frac{du}{dv} + \chi_v$$

ist, so daß aus den beiden letzten Gleichungen durch Elimination von $du:dv$ folgt:

$$dy = \frac{\varphi_u \chi_v - \chi_u \varphi_v}{\varphi_u} dv.$$

Wenn wir nun in dem einfachen Integrale hinsichtlich y statt y die neue Veränderliche v einführen, so folgt aus (6), da sich das Differential dy in der soeben gefundenen Art ausdrückt:

$$(7) \qquad V = \int\int\int \frac{\mathfrak{D}}{\varphi_u} dx\, dv\, dw.$$

Jetzt liegt ein dreifaches Integral vor, das sich auf einen Bereich von Wertsystemen x, v, w bezieht, der wieder aus

[604

dem Bereiche der Wertsysteme x, y, z gewonnen werden kann, da v und w infolge von (2) Funktionen von x, y, z sind.

Wieder steht es in unserem Belieben, die Reihenfolge der drei einfachen Integrationen, die den Wert (7) von V liefern, abzuändern. Z. B. können wir zuerst hinsichtlich x, dann hinsichtlich v und schließlich hinsichtlich w integrieren. Bei der ersten dieser drei Integrationen *spielen v und w die Rolle von Konstanten*, so daß die erste Gleichung (2) sofort *x als Funktion von u* definiert, für die

$$dx = \varphi_u du$$

ist, so daß die Einführung dieser neuen Veränderlichen u statt x in dem Integrale (7) liefert:

$$V = \int\int\int \mathfrak{D} du dv dw. \tag{8}$$

Der Wertebereich u, v, w, auf den sich das neue Integral bezieht, ist aus dem Wertebereich x, y, z des ursprünglichen Integrals (1) zu gewinnen, da ja u, v, w infolge von (2) gewisse Funktionen von x, y, z sind.

Wenn wir nun aber vorschreiben wollen, daß u, v, w während der Integrationen stets wachsen sollen (vgl. Nr. 598), so müssen wir $\mathfrak{D}$ in (8) durch den absoluten Betrag von $\mathfrak{D}$ ersetzen. Also ist

$$V = \int\int\int |\mathfrak{D}| du dv dw \tag{9}$$

die Volumenformel für allgemeine krummlinige Koordinaten im Raume.

Die besonderen Ausnahmen (4) und (5), die wir bei der Ableitung der Formel machten, brauchen nun nicht im ganzen Bereiche erfüllt zu sein. In einem Teile des Bereiches z. B. kann es sein, daß die beiden ersten Gleichungen (2) nicht nach u und v auflösbar sind, sondern etwa nach u und w. Dann wird man in diesem Teile die Rollen, die v und w vorhin spielten, vertauschen. Aber auf das Endergebnis (9) ist dies ohne jeden Einfluß (ebenso wie in Nr. 598).

Beispiel: Benutzen wir insbesondere als krummlinige Koordinaten u, v, w die räumlichen Polarkoordinaten r, θ, ψ, vgl. Nr. 97, d. h. setzen wir:

$$x = r \sin\theta \cos\psi, \qquad y = r \sin\theta \sin\psi, \qquad z = r \cos\theta,$$

so ist die Funktionaldeterminante:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & \theta & \psi \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\cos\psi & -\sin\theta\sin\psi \\ \sin\theta\sin\psi & \cos\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} r^2$$

leicht zu berechnen, indem man sie nach dem Multiplikationsgesetze der Determinanten mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

multipliziert, die den Wert Eins hat. Es kommt:

$$\mathfrak{D} = r^2 \sin\theta.$$

Folglich ist nach (9) das Volumen:

$$(10) \qquad V = \int\!\!\int\!\!\int r^2 \,|\sin\theta\,|\, dr\, d\theta\, d\psi,$$

ausgedrückt in räumlichen Polarkoordinaten.

605. Räume von n Dimensionen. Wir beabsichtigen, den Begriff eines n-fachen Integrals einzuführen. Dabei legen wir der Betrachtung das Vorhandensein von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zugrunde. Diesen n Veränderlichen haben wir alsdann einen gewissen Variabilitätsbereich vorzuschreiben. Am bequemsten ist es, die n Veränderlichen als Koordinaten der Punkte in einem *Raume von n Dimensionen* zu deuten. Da uns jedoch für $n > 3$ in der Wirklichkeit der Dinge kein solcher Raum zur Verfügung steht, so wäre der Einwand berechtigt, daß wir dabei eine Veranschaulichung benutzen, der jede Berechtigung abzusprechen ist. Deshalb wollen wir zeigen, daß es bei anderer Deutung in der Tat Räume von n Dimensionen gibt. Der Unterschied ist nur der, daß wir nicht die Punkte, sondern andere Gebilde als die Elemente des Raumes auffassen.

Betrachten wir z. B. die Gesamtheit aller Kreise in der xy-Ebene. Ein Kreis ist gegeben, wenn wir die Koordinaten a und b seines Mittelpunktes und seinen Radius r kennen. Dabei können a und b beliebige positive oder negative Werte haben.

Auch der Radius r darf positiv oder negativ angenommen werden, wenn wir festsetzen, daß wir unter einem Kreise mit positivem bzw. negativem Radius einen solchen verstehen wollen, der in positivem bzw. negativem Sinne, also im Sinne der Drehung von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse oder im anderen Sinne durchlaufen werden soll. Wir verwenden also sogenannte *orientierte Kreise*. Wenn wir nun die Mittelpunktskoordinaten mit x, y und den Radius mit z bezeichnen, so gehört zu jedem reellen Wertsysteme x, y, z ein orientierter Kreis. Umgekehrt versinnlicht jeder orientierte Kreis ein Wertsystem x, y, z. Die Gesamtheit aller Wertsysteme x, y, z wird daher durch die Gesamtheit aller orientierter Kreise in der Ebene dargestellt.

Um alle Wertsysteme x, y, z zu veranschaulichen, braucht man also den Raum von *drei* Dimensionen, in dem x, y, z rechtwinklige Punktkoordinaten bedeuten, gar nicht. Man kann sich auf die *zwei*dimensionale Ebene beschränken, wenn man nur nicht ihre Punkte, sondern ihre Kreise als die *Träger* der Wertsysteme x, y, z auffaßt. Im Raume mit den drei rechtwinkligen Punktkoordinaten x, y, z würden wir einen Variabilitätsbereich V dadurch festlegen, daß wir z. B. ein Volumen, eingeschlossen durch eine Fläche, betrachten. Wir können aber auch bei der neuen Auffassung in der zweidimensionalen Ebene einen Variabilitätsbereich für Wertsysteme x, y, z definieren, indem wir nämlich aus der Gesamtheit aller orientierter Kreise eine Schar herausgreifen. Wenn wir z. B. alle Kreise betrachten, deren Mittelpunktskoordinaten x, y den Ungleichungen:

$$x_0 \leqq x \leqq X, \qquad y_0 \leqq y \leqq Y$$

unterworfen sind, während ihre Radien z den Ungleichungen:

$$z_0 \leqq z \leqq Z$$

genügen sollen, so haben wir einen gewissen Variabilitätsbereich der Wertsysteme x, y, z festgelegt. Wenn wir dagegen x, y, z als rechtwinklige Punktkoordinaten im Raume auffassen, so wäre dieser selbe Variabilitätsbereich durch das Volumen eines gewissen Rechtflachs dargestellt.

Wir können die Ebene auch als ein *vier*dimensionales Gebilde auffassen. Z. B. mögen x_1, x_2 und x_3, x_4 die Ab-

schnitte sein, die zwei Geraden g und h auf den Koordinatenachsen bestimmen. Zu jedem Wertsysteme x_1, x_2, x_3, x_4 gehört alsdann ein Geradenpaar g, h und umgekehrt zu jedem Geradenpaar g, h ein Wertsystem x_1, x_2, x_3, x_4. Dabei ist das Geradenpaar g, h ein anderes als das Paar h, g. Wir können auch so sagen: Zu jedem Winkel (g, h) in der xy-Ebene gehört ein Wertsystem x_1, x_2, x_3, x_4, und umgekehrt. Einen Variabilitätsbereich für die Wertsysteme x_1, x_2, x_3, x_4 können wir hier dadurch festlegen, daß wir aus der Gesamtheit aller Winkel (g, h) der Ebene eine Schar herausgreifen, die durch Ungleichungen bestimmt ist, z. B. alle Winkel, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen, oder alle Winkel, deren Scheitel innerhalb eines gegebenen Teiles der Ebene liegen, usw.

Auch den Raum, der nur drei Dimensionen hat, können wir zur Veranschaulichung der Systeme von *vier* unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 benutzen, indem wir z. B. x_1, x_2, x_3 als die rechtwinkligen Koordinaten der Mitte einer Kugel und x_4 als ihren Radius auffassen, wobei wir x_4 positiv oder negativ wählen, je nachdem wir die Normalen der Kugel nach außen oder nach innen positiv rechnen. Wir benutzen also *orientierte Kugeln*. Alle Kugeln z. B., deren Mitten in einem gegebenen Körper liegen, versinnlichen uns einen gewissen Variabilitätsbereich der Systeme von vier Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4.

Ebenso können wir Systeme von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ in der Ebene oder im dreidimensionalen Raume in realer Weise veranschaulichen, also die Ebene oder unseren Raum als ein Gebilde von n Dimensionen betrachten. Z. B. wenn n gerade ist, können wir in der Ebene ein Vieleck $P_1 P_2 \ldots P_{\frac{1}{2}n}$ von $\frac{1}{2}n$ Punkten betrachten. Hat P_1 die Koordinaten x_1, x_2, P_2 die Koordinaten x_3, x_4 usw., schließlich $P_{\frac{1}{2}n}$ die Koordinaten x_{n-1}, x_n, so stellt das Vieleck $P_1 P_2 \ldots P_{\frac{1}{2}n}$ ein System von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ dar. Ist n ungerade, also $n = 2k + 1$, so erreicht man dasselbe, wenn man z. B. an ein Vieleck von k Punkten noch eine unbegrenzte Gerade anschließt und etwa den Tangens ihres Winkels mit der positiven x-Achse als die n^{te} Veränderliche x_n einführt.

[**605**

Es sind dies alles nur sehr spezielle Arten der Veranschaulichung; es ist ein leichtes, beliebig viele andere Veranschaulichungen von Systemen von n Veränderlichen in der Ebene oder im Raume herzustellen.

Hiernach dürfen wir sagen, *daß es Räume von n Dimensionen gibt.* Dabei ist aber *nicht der Punkt*, sondern ein gewisses zweckmäßig gewähltes und geometrisch wohldefiniertes Gebilde in der Ebene oder in unserem realen Raume das Element oder der *Träger des Wertsystems* $x_1, x_2, \cdots x_n$. Wenn man trotzdem von Räumen von n Dimensionen spricht, in denen $x_1, x_2, \cdots x_n$ die Koordinaten eines beliebigen *Punktes* bedeuten sollen, so ist hierbei das Wort *Punkt* nur eine bequeme Bezeichnung des Trägers des Wertsystems $x_1, x_2, \cdots x_n$. Es ist nämlich zu beachten, daß man ein und dasselbe Wertsystem $x_1, x_2, \cdots x_n$ auf sehr viele verschiedene Arten in der Ebene oder im gewöhnlichen Raume durch ein geometrisches Gebilde veranschaulichen kann. Es wäre daher eine Bevormundung, wollten wir eine bestimmte Art der Veranschaulichung wie z. B. oben durch Kreise, Winkel, Kugeln oder Vielecke wählen. Um jedermann die Freiheit zu lassen, welche Art der Veranschaulichung er wählen will, benutzt man als symbolische Bezeichnung das Wort *Punkt*.

Diese Erläuterungen geben uns das Recht, von *Räumen von n Dimensionen* zu sprechen, wobei wir unter einem *Teile des Raumes* nichts anders verstehen, als einen durch Ungleichungen zu definierenden Variabilitätsbereich der n Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_n$.

606. Begriff und Transformation des n-fachen Integrals. Es seien $x_1, x_2, \cdots x_n$ insgesamt n voneinander unabhängige Veränderliche, die wir als die Koordinaten in einem Raume von n Dimensionen bezeichnen. Ferner sei ein Teil des Raumes ausgewählt, also ein Variabilitätsbereich V für die Wertsysteme $x_1, x_2, \cdots x_n$ vorgeschrieben. Endlich bedeute $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ eine solche Funktion der n Veränderlichen, die in dem Variabilitätsbereiche V stetig ist.

Wenn wir nun V in Teile ΔV in beliebiger Art zerlegen, in jedem Teile einen Punkt P wählen, d. h. ein Wertsystem

$x_1, x_2, \cdots x_n$ auswählen, das dem Teile angehört, und darauf den Wert f_P bilden, den die Funktion f für dieses Wertsystem hat, so können wir die Summe $\Sigma f_P \Delta V$ betrachten, erstreckt über alle Teilbereiche ΔV. Es läßt sich beweisen (vgl. Nr. 577), daß diese Summe einen von der Art der Teilung unabhängigen bestimmten endlichen Grenzwert hat, sobald alle Teile ΔV nach Null streben und dementsprechend ihre Anzahl über jede Grenze wächst. Hierbei meinen wir mit $\lim \Delta V = 0$, daß die Intervalle, innerhalb derer die Größen $x_1, x_2, \cdots x_n$ in jedem einzelnen Teilbereiche ΔV noch veränderlich sind, sämtlich nach Null streben sollen.

Den Grenzwert bezeichnet man als ein *n-faches Integral*:

$$(1) \qquad J = \int\int_V \cdots \int f(x_1, x_2, \cdots x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n,$$

und die Auswertung des Integrals kann durch n aufeinanderfolgende einfache Integrationen geleistet werden (vgl. Nr. 576), wobei die oberen Grenzen der Integrale stets größer als die unteren sind.

Es seien nun $u_1, u_2, \cdots u_n$ neue Veränderliche, die mit $x_1, x_2, \cdots x_n$ durch n Gleichungen verknüpft sind:

$$(2) \qquad x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \cdots u_n) \qquad (i = 1, 2 \cdots n).$$

Wir setzen dabei voraus (vgl. Nr. 593), daß alle n Funktionen φ_i nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in dem Bereiche V stetig seien, ferner die Funktionaldeterminante

$$(3) \qquad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \varphi_1\, \varphi_2 \cdots \varphi_n \\ u_1\, u_2 \cdots u_n \end{pmatrix}$$

ebenda von Null verschieden, also überall in V von einerlei Vorzeichen sei und endlich zu jedem Wertsysteme $u_1, u_2, \cdots u_n$ infolge von (2) nur ein Wertsystem $x_1, x_2, \cdots x_n$ und umgekehrt zu jedem Wertsysteme $x_1, x_2, \cdots x_n$ infolge von (2) nur ein Wertsystem $u_1, u_2, \cdots u_n$ gehöre. Es soll also durch die wegen $\mathfrak{D} \neq 0$ nach $u_1, u_2, \cdots u_n$ auflösbaren Gleichungen (2) auch für die Wertsysteme $u_1, u_2, \cdots u_n$ ein Variabilitätsbereich U so definiert sein, daß die Bereiche V und U gegenseitig eindeutig aufeinander bezogen sind.

Wir können alsdann genau so wie in Nr. 604 nacheinander statt $x_1, x_2, \cdots x_n$ die Wertsysteme

$$x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, u_n, \quad x_1, x_2, \cdots x_{n-2}, u_{n-1}, u_n \quad \text{usw.}$$

und schließlich das Wertsystem $u_1, u_2, \cdots u_n$ einführen. Die Betrachtungen sind so einfach, daß wir sie hier nicht zu wiederholen brauchen. Man kann das Endergebnis auch durch den Schluß von $n-1$ auf n völlig korrekt ableiten. Wir begnügen uns mit der Angabe des schließlichen Wertes des Integrals (1):

$$(4) \qquad J = \int\int_U \cdots \int |\mathfrak{D}\, f(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n) du_1\, du_2 \cdots du_n.$$

607. Eine Formel von Dirichlet für gewisse bestimmte Integrale. Als Beispiel betrachten wir mit *Dirichlet* das Integral:

$$J_{n,p} = \int\int \cdots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n)^{p-1} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n,$$

worin $p_1, p_2, \cdots p_n, p$ positive Konstanten sind und das Integral über denjenigen Variabilitätsbereich V erstreckt werden soll, in dem $x_1, x_2, \cdots x_n$ sämtlich positiv sind und ihre Summe $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ nicht größer als Eins ist. Das Integral $J_{n,p}$ kann durch n aufeinanderfolgende einfache Integrationen ausgewertet werden. Die erste möge sich auf x_n beziehen. Bei ihr sind $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ als Konstanten zu behandeln. Die Grenzen dieses einfachen Integrals hinsichtlich x_n sind 0 und $1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$. Wir wollen nun eine neue Veränderliche t statt x_n vermöge der Substitution

$$x_n = (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})t, \quad dx_n = (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}) dt$$

einführen. Dabei geht t von 0 bis 1. Also kommt:

$$J_{n,p} = \int\int \cdots \int x_1^{p_1-1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})^{p+p_n-1}\, t^{p_n-1} (1-t)^{p-1} dx_1 \cdots dx_{n-1} dt,$$

wobei das auf t bezügliche einfache Integral dieses ist:

$$\int_0^1 t^{p_n-1} (1-t)^{p-1} dt = B(p_n, p),$$

nach (1) in Nr. 496. Das n-fache Integral $J_{n,p}$ reduziert sich demnach auf ein $(n-1)$-faches, nämlich auf das Produkt von $B(p_n, p)$ und:

$$\int\int\cdots\int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} (1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1})^{p+p_n-1} dx_1\, dx_2 \cdots dx_{n-1}.$$

Dies Integral hat wieder die Form des Integrals $J_{n,p}$. An die Stelle von n ist aber $n-1$ getreten, an die von p die Zahl $p+p_n$. Was den Bereich betrifft, über den sich das $(n-1)$-fache Integral erstreckt, so ist zu bemerken, daß $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ positiv sein müssen und ihre Summe $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ nicht größer als Eins sein darf. Wir haben also bei den $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ genau denjenigen Bereich zu wählen, der dem bei den n Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_n$ sinngemäß entspricht, so daß wir das neue Integral mit $J_{n-1, p+p_n}$ zu bezeichnen berechtigt sind.

Demnach hat sich die *Rekursionsformel* ergeben:

$$J_{n,p} = B(p_n, p)\, J_{n-1, p+p_n},$$

die auch für die niederen Werte der Zahl n entsprechend gilt. Gehen wir bis $n = 2$, so ergibt sich durch Multiplikation aller Formeln:

$$J_{n,p} = B(p_n, p) B(p_{n-1}, p+p_n) B(p_{n-2}, p+p_n+p_{n-1}) \cdots$$
$$\cdots B(p_2, p+p_n+p_{n-1}+\cdots+p_3) J_{1, p+p_n+\cdots+p_2}.$$

Hierin ist nach (1), Nr. 496:

$$J_{1, p+p_n+\cdots+p_2} = \int_0^1 x_1^{p_1-1}(1-x_1)^{p+p_n+\cdots+p_2-1} dx_1$$
$$= B(p_1, p+p_n+\cdots+p_2).$$

Also folgt:

$$J_{n,p} = B(p_n, p) B(p_{n-1}, p+p_n) \cdots B(p_1, p+p_n+\cdots+p_2)$$

oder nach (5) in Nr. 497:

(1) $$J_{n,p} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p+p_1+p_2+\cdots+p_n)}.$$

Da $\Gamma(1) = 1$ ist (vgl. Nr. 498), so geht insbesondere für $p = 1$ hervor:

(2) $$\int\int\cdots\int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_n^{p_n-1} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(1+p_1+p_2+\cdots+p_n)}.$$

Setzen wir hierin allgemein

$$x_i = \left(\frac{z_i}{a_i}\right)^{\alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

indem wir unter $a_1, a_2, \ldots a_n$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ positive Konstante verstehen, so besteht der Variabilitätsbereich der Wertsysteme $z_1, z_2, \ldots z_n$ aus allen denjenigen positiven Werten von $z_1, z_2, \ldots z_n$, für die

$$(3) \qquad \left(\frac{z_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{z_2}{a_2}\right)^{\alpha_2} + \cdots + \left(\frac{z_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} \leqq 1$$

ist. Da die Funktionaldeterminante von $z_1, z_2, \cdots z_n$ hinsichtlich $x_1, x_2, \cdots x_n$ den positiven Wert

$$\mathfrak{D} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}{a_1 a_2 \cdots a_n} \left(\frac{z_1}{a_1}\right)^{\alpha_1 - 1} \left(\frac{z_2}{a_2}\right)^{\alpha_2 - 1} \cdots \left(\frac{z_n}{a_n}\right)^{\alpha_n - 1}$$

hat, so folgt aus (2) durch Einführung der neuen Veränderlichen $z_1, z_2, \cdots z_n$ nach der Formel (4) der vorigen Nummer:

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \int\int \cdots \int \left(\frac{z_1}{a_1}\right)^{\alpha_1 p_1 - 1} \left(\frac{z_2}{a_2}\right)^{\alpha_2 p_2 - 1} \cdots \left(\frac{z_n}{a_n}\right)^{\alpha_n p_n - 1} dz_1 dz_2 \cdots dz_n$$
$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \ldots \Gamma(p_n)}{\Gamma(1 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n)}.$$

Setzen wir jetzt

$$\alpha_i p_i = \pi_i, \quad \text{d. h.} \quad p_i = \frac{\pi_i}{\alpha_i} \qquad (i = 1, 2 \cdots n),$$

so daß $\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_n$ wieder positive Zahlen sind, so kommt:

$$(4) \qquad \int\int \cdots \int z_1^{\pi_1 - 1} z_2^{\pi_2 - 1} \ldots z_n^{\pi_n - 1} dz_1 dz_2 \cdots dz_n$$
$$= \frac{a_1^{\pi_1} a_2^{\pi_2} \ldots a_n^{\pi_n}}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{\pi_1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\frac{\pi_2}{\alpha_2}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{\pi_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\pi_1}{\alpha_1} + \frac{\pi_2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{\pi_n}{\alpha_n}\right)}.$$

Die Ungleichung (3) bestimmt, falls $n = 3$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$ ist, alle Punkte mit den rechtwinkligen Koordinaten z_1, z_2, z_3, die im Innern des *Ellipsoids*

$$(5) \qquad \left(\frac{z_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{a_3}\right)^2 = 1$$

liegen und positive Koordinaten haben. Alsdann ist für diesen Variabilitätsbereich nach (4):

$$\int\int\int z_1^{\pi_1-1} z_2^{\pi_2-1} z_3^{\pi_3-1}\, dz_1\, dz_2\, dz_3 = \frac{a_1^{\pi_1} a_2^{\pi_2} a_3^{\pi_3}}{8} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\pi_1)\Gamma(\frac{1}{2}\pi_2)\Gamma(\frac{1}{2}\pi_3)}{\Gamma[1+\frac{1}{2}(\pi_1+\pi_2+\pi_3)]}.$$

Diese Formel gibt für $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1$ das Volumen des betrachteten Oktanten des Ellipsoids (5), nach (1) in Nr. 604. Setzt man dagegen zwei der Exponenten π_1, π_2, π_3 gleich 1 und den dritten gleich 2, so kann man hieraus die Koordinaten des *Schwerpunktes* des Ellipsoid-Oktanten berechnen. Der Schwerpunkt nämlich ist analog wie der eines ebenen Flächenstückes in Nr. 602 auch für Körper definierbar, indem man die *statischen Momente*

$$M_x = \int\int\int x\, dx\, dy\, dz, \qquad M_y = \int\int\int y\, dx\, dy\, dz,$$
$$M_z = \int\int\int z\, dx\, dy\, dz$$

des Körpers hinsichtlich der yz-Ebene, der zx-Ebene und der xy-Ebene bildet und alsdann unter dem Schwerpunkte den Punkt mit den Koordinaten:

$$\mathfrak{x} = \frac{M_x}{V}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{M_y}{V}, \qquad \mathfrak{z} = \frac{M_z}{V}$$

versteht, wobei V das Volumen des Körpers sein soll.

Siebentes Kapitel.

Integration vollständiger Differentiale und Integration längs Kurven.

---

§ 1. Integration vollständiger Differentiale.

608. Bedingung für ein vollständiges Differential in zwei Veränderlichen. Nach Nr. 74 heißt

(1) $$df = f_x dx + f_y dy$$

das vollständige Differential einer Funktion f von zwei unabhängigen Veränderlichen. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Funktion in einem gewissen Variabilitätsbereiche von x, y stetig sei und ebenda stetige partielle Ableitungen erster Ordnung f_x und f_y habe. Wenn ferner auch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung f_{xy} und f_{yx} ebenda stetig sind, so besteht nach Satz 3, Nr. 65, die Beziehung:

(2) $$f_{xy} = f_{yx} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}.$$

Umgekehrt nehmen wir jetzt an: Es sei ein Differentialausdruck von der Form

(3) $$U(x, y)\,dx + V(x, y)\,dy$$

vorgelegt; dabei sollen U und V in einem gewissen Variabilitätsbereiche stetige Funktionen von x und y sein, und außerdem soll ebenda U eine stetige partielle Ableitung nach y sowie V eine stetige partielle Ableitung nach x haben. Alsdann erhebt sich die Frage, ob der vorgelegte Ausdruck das vollständige Differential einer noch zu bestimmenden Funktion f von x und y ist.

Weil für das vollständige Differential (1) die Bedingung (2) gilt, so lehrt die Vergleichung von (1) und (3), daß die Frage gewiß zu verneinen ist, sobald nicht überall im Bereiche

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{4}$$

ist. Wenn aber diese Bedingung überall im Bereiche erfüllt ist, so werden wir eine Funktion bilden, die (3) zum vollständigen Differential hat, und so in der nächsten Nummer erkennen, daß die Bedingung (4) zwar notwendig, aber auch *hinreichend* ist.

609. Integration eines vollständigen Differentials in zwei Veränderlichen. Unter den soeben gemachten Voraussetzungen, wonach also insbesondere überall im Bereiche

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{1}$$

sein soll, bilden wir durch eine einfache Integration die Funktion:

$$F = \int_a^x U(x, y)\, dx. \tag{2}$$

Dabei sollen alle Wertepaare von a, y bis x, y dem Bereiche angehören. Nach Satz 18, Nr. 487, ist F alsdann im Bereiche eine stetige Funktion von x und y. Ihre Ableitung nach x ist gleich $U(x, y)$, dagegen ergibt sich ihre Ableitung nach y infolge des Satzes 19, Nr. 488, durch Differentiation nach y unterhalb des Integralzeichens:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial U}{\partial y}\, dx.$$

Hierfür können wir aber nach (1) schreiben:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial V}{\partial x}\, dx = [V]_a^x = V(x, y) - V(a, y).$$

Es ist somit

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = V(x, y) - V(a, y),$$

d. h. die Funktion F hat das vollständige Differential:

(3) $$dF = U(x, y)dx + [V(x, y) - V(a, y)]dy.$$

Es ist dies der gegebene Differentialausdruck $Udx + Vdy$, aber vermindert um $V(a, y)dy$. Nun aber ist $V(a, y)$ der Differentialquotient einer Funktion Φ von y allein, nämlich von:

(4) $$\Phi = \int_b^y V(a, y)dy,$$

wobei wir annehmen, daß alle Wertepaare von a, b bis a, y dem Bereiche angehören. Da also

(5) $$d\Phi = V(a, y)dy$$

ist, so folgt aus (3) und (5):

$$d(F + \Phi) = U(x, y)dx + V(x, y)dy.$$

Also hat $F + \Phi$ das vorgelegte vollständige Differential, d. h.:

Satz 1: Sind U und V innerhalb eines endlichen Variabilitätsbereiches stetige Funktionen von x und y mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung U_y und V_x, so ist der Differentialausdruck

$$U(x, y)dx + V(x, y)dy$$

dann und nur dann ein vollständiges Differential, wenn überall im Bereiche

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

ist. Insbesondere ist dann

$$\int_a^x U(x, y)dx + \int_b^y V(a, y)dy$$

eine im Bereiche stetige Funktion von x und y, deren vollständiges Differential das vorgelegte ist, vorausgesetzt, daß die Integrationsintervalle dem Bereiche angehören..

Beispiel: Hiernach ist

$$\frac{x}{(x-y)^2}dx - \frac{x^2}{y(x-y)^2}dy,$$

wobei $x \neq y$ sei, ein vollständiges Differential, und es kommt:

$$\int_a^x U(x, y)\,dx = \int_a^x \frac{x\,dx}{(x-y)^2} = \ln\frac{x-y}{a-y} - \frac{y}{x-y} + \frac{y}{a-y},$$

$$\int_b^y V(a, y)\,dx = \int_b^y \frac{-a^2\,dy}{y(a-y)^2} = \ln\frac{b(a-y)}{y(a-b)} - \frac{a}{a-y} + \frac{a}{a-b},$$

so daß die Summe

$$\ln\frac{x-y}{y} - \frac{y}{x-y} - \ln\frac{a-b}{b} + \frac{b}{a-b}$$

eine Funktion ist, deren vollständiges Differential das vorgelegte ist. Die beiden letzten Glieder sind konstant. Allgemein ist also auch

$$f = \ln\frac{x-y}{y} - \frac{y}{x-y} + \text{konst.}$$

eine solche Funktion.

Nach Satz 10, Nr. 74, könnten wir zu Satz 1 hinzufügen, daß

$$f = \int_a^x U(x, y)\,dx + \int_b^y V(a, y)\,dy + \text{konst.}$$

die *allgemeinste* Funktion ist, die unter der Voraussetzung (1) das vollständige Differential $U dx + V dy$ hat.

610. Verallgemeinerung auf den Fall von n Veränderlichen. Es seien $U_1, U_2, \ldots U_n$ solche Funktionen von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die innerhalb eines gewissen Bereiches stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Soll alsdann

(1) $$U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + \cdots + U_n dx_n$$

das vollständige Differential einer Funktion f sein:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

so muß

$$U_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad U_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \cdots \quad U_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

sein. Es ist aber nach Satz 4, Nr. 65:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Deshalb müssen $U_1, U_2, \ldots U_n$ die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Bedingungen erfüllen:

(2)
$$\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Umgekehrt wollen wir jetzt zeigen, daß es, falls diese Bedingungen erfüllt sind, auch stets Funktionen f gibt, die den gegebenen Differentialausdruck (1) zum vollständigen Differential haben, und zwar behaupten wir, daß

(3)
$$f = \int_{a_1}^{x_1} U_1(x_1, x_2, \ldots x_n)\,dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} U_2(a_1, x_2, \ldots x_n)\,dx_2$$
$$+ \int_{a_3}^{x_3} U_3(a_1, a_2, x_3, \cdots x_n)\,dx_3 + \cdots + \int_{a_n}^{x_n} U_n(a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, x_n)\,dx_n$$

eine solche Funktion ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß die unteren Grenzen $a_1, a_2, \ldots a_n$, von denen die $n-1$ ersten nach und nach, wie man bemerken wird, in den Integranden statt $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ eingesetzt worden sind, so als Konstanten gewählt seien, daß alle Integrationsintervalle dem Bereiche angehören.

Jedes der n Integrale in (3) ist eine stetige Funktion seiner oberen Grenze und nach Satz 18, Nr. 487, auch eine stetige Funktion jeder einzelnen sonst noch in seinem Integranden auftretenden Veränderlichen und kann nach Satz 19, Nr. 488, nach diesen letzteren Größen unterhalb des Integralzeichens differenziert werden. Also ist die partielle Ableitung von f nach x_i diese:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial U_1(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_i}\,dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial U_2(a_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_i}\,dx_2 + \cdots$$
$$+ \int_{a_{i-1}}^{x_{i-1}} \frac{\partial U_{i-1}(a_1, a_2, \ldots a_{i-2}, x_{i-1}, \ldots x_n)}{\partial x_i}\,dx_{i-1} + U_i(a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, x_i, \ldots x_n).$$

Weil die Bedingungen (2) erfüllt sein sollen, sind hier die Integranden

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_i}, \frac{\partial U_2}{\partial x_i}, \cdots \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x_i} \quad \text{durch} \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_1}, \frac{\partial U_i}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial U_i}{\partial x_{i-1}}$$

ersetzbar, und deshalb lassen sich alle Integrale auswerten. Es kommt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} = {} & U_i(x_1, x_2, \cdots x_n) - U_i(a_1, x_2, \cdots x_n) \\ & + U_i(a_1, x_2, \cdots x_n) - U_i(a_1, a_2, x_3, \cdots x_n) \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + U_i(a_1, \cdots a_{i-2}, x_{i-1}, \cdots x_n) - U_i(a_1, \cdots a_{i-1}, x_i, \cdots x_n) \\ & + U_i(a_1, \cdots a_{i-1}, x_i, \cdots x_n),\end{aligned}$$

d. h. einfacher:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = U_i(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

was zu beweisen war.

611. Nachweis der Stetigkeit des Integrals eines vollständigen Differentials. Die in voriger Nummer aufgestellte Funktion f, die wir als ein *Integral des vorgelegten vollständigen Differentials* bezeichnen, ist gewiß hinsichtlich jeder einzelnen der n Veränderlichen stetig. Es steht aber noch der Beweis dafür aus, daß sie eine stetige Funktion von *allen* n Veränderlichen ist, und wir führen ihn durch Schluß von $n-1$ auf n, da er schon für $n=1$ und $n=2$ geliefert worden ist. Wir nehmen also an, daß die Integration eines $(n-1)$gliedrigen vollständigen Differentials in $n-1$ Veränderlichen eine stetige Funktion der $n-1$ Veränderlichen liefert.

Nun hat die unter (3) in voriger Nummer aufgestellte Funktion f, wenn man darin die Summe der $n-1$ ersten Integrale mit φ bezeichnet, die Form:

$$f = \varphi + \int_{a_n}^{x_n} U_n(a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, x_n)\,dx_n.$$

Das letzte Integral enthält nur die eine Veränderliche x_n. Es genügt daher nachzuweisen, daß die Funktion φ von $x_1, x_2, \cdots x_n$

stetig ist. Wenn wir aber den nur $(n-1)$ gliedrigen Differentialausdruck betrachten:

$$U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + \cdots + U_{n-1} dx_{n-1}, \tag{1}$$

in dem außer den $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ und ihren Differentialen noch die n^{te} Veränderliche x_n ohne ihr Differential vorkommt, und bedenken, daß unter den $\frac{1}{2}n(n-1)$ Bedingungen (2) der letzten Nummer insbesondere die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Bedingungen für $i \leqq n-1$ und $k \leqq n-1$ enthalten sind, so sehen wir, daß der Differentialausdruck (1) ein vollständiges Differential in den $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ ist, wobei x_n die Rolle eines Parameters spielt, und daß die mit φ bezeichnete Funktion von $x_1, x_2, \cdots x_n$, wenn man auch in ihr x_n als einen Parameter betrachtet, ein Integral dieses vollständigen Differentials ist. Nach der vorausgeschickten Annahme steht also fest, daß φ eine stetige Funktion der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ ist. Es erübrigt, zu zeigen, daß φ auch eine stetige Funktion aller n Veränderlichen x_1, $x_2, \cdots x_n$ sein muß.

Wir lassen alle Veränderlichen x_i um Größen Δx_i innerhalb des Variabilitätsbereiches wachsen, so daß φ die Zunahme erfährt:

$$\Delta\varphi = \varphi(x_1+\Delta x_1, \cdots x_{n-1}+\Delta x_{n-1}, x_n+\Delta x_n) - \varphi(x_1, \cdots x_{n-1}, x_n),$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = \varphi(x_1+\Delta x_1, &\cdots x_{n-1}+\Delta x_{n-1}, x_n+\Delta x_n)\\ &-\varphi(x_1, \cdots x_{n-1}, x_n+\Delta x_n) + \varphi(x_1, \cdots x_{n-1}, x_n+\Delta x_n)\\ &-\varphi(x_1, \cdots x_{n-1}, x_n).\end{aligned}$$

Drücken wir die Zunahme, die eine Funktion erfährt, wenn nur $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ um Größen $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_{n-1}$ geändert werden, durch das vorgesetzte Zeichen Δ_1 aus, dagegen die Zunahme, die sie erfährt, wenn nur x_n um Δx_n geändert wird, durch das vorgesetzte Zeichen Δ_2, so ist also:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x_1, \cdots x_{n-1}, x_n) = \Delta_1 &\varphi(x_1, \cdots x_{n-1}, x_n+\Delta x_n)\\ &+\Delta_2\varphi(x_1, \cdots x_{n-1}, x_n).\end{aligned} \tag{2}$$

Ebenso wie eine stetige Funktion von *zwei* Veränderlichen innerhalb ihres Variabilitätsbereiches *gleichmäßig stetig* ist, vgl.

611]

Nr. 486, ist es auch eine stetige Funktion von mehr als zwei Veränderlichen, da sich dies gerade so wie in Nr. 486 zeigen läßt. Also folgt, weil φ eine stetige Funktion von $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ ist: Wenn x_n bestimmt gewählt wird und σ eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl bedeutet, so gibt es eine positive Zahl h derart, daß infolge von

$$(3) \qquad |\Delta x_1| < h, \quad |\Delta x_2| < h, \cdots |\Delta x_{n-1}| < h$$

auch $|\Delta_1 \varphi| < \sigma$ ist. Für verschiedene Werte von x_n kann h verschieden ausfallen, und in (2) tritt bei $\Delta_1 \varphi$ ja überdies $x_n + \Delta x_n$ statt x_n auf. Wir wählen deshalb eine positive Zahl, die kleiner ist als alle Zahlen h, die zu den verschiedenen Werten von x_n im Bereiche gehören, und benutzen nun diese als die Zahl h, so daß die Ungleichung $|\Delta_1 \varphi| < \sigma$ unter den Annahmen (3) im ganzen Variabilitätsbereiche gilt.

Da $\Delta_2 \varphi$ der Zuwachs ist, den φ erfährt, wenn sich nur x_n um Δx_n ändert, und da φ die Summe der $n-1$ ersten Integrale in der Formel (3) der vorigen Nummer bedeutet, so ergibt sich:

$$\Delta_2 \varphi = \int_{a_1}^{x_1} \Delta_2 U_1(x_1, x_2, \cdots x_n)\, dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} \Delta_2 U_2(a_1, x_2, \cdots x_n)\, dx_2 + \\ \cdots + \int_{a_{n-1}}^{x_{n-1}} \Delta_2 U_{n-1}(a_1, a_2, \cdots a_{n-2}, x_{n-1}, x_n)\, dx_{n-1}.$$

Weil nun $U_1, U_2, \cdots U_{n-1}$ nach Voraussetzung stetig sind, so gibt es eine positive Zahl k derart, daß infolge von

$$(4) \qquad |\Delta x_n| < k$$

auch $|\Delta_2 U_1|, |\Delta_2 U_2|, \cdots |\Delta_2 U_{n-1}|$ sämtlich kleiner als σ werden, so daß sich nach Satz 2, Nr. 4, Satz 16, Nr. 414, und Satz 14, Nr. 413, ergibt:

$$|\Delta_2 \varphi| < \left|\int_{a_1}^{x_1} \sigma\, dx_1\right| + \left|\int_{a_2}^{x_2} \sigma\, dx_2\right| + \cdots + \left|\int_{a_{n-1}}^{x_{n-1}} \sigma\, dx_{n-1}\right|$$

oder:

$$|\Delta_2 \varphi| < \sigma(|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| + \cdots + |x_{n-1} - a_{n-1}|).$$

Nach (2) ist demnach unter den Voraussetzungen (3) und (4) auch:

(5) $$|\Delta\varphi| < \sigma(1 + |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| + \cdots + |x_{n-1} - a_{n-1}|).$$

Bezeichnen wir von jetzt an die kleinere der beiden Zahlen h und k mit h, so gilt also (5) unter den Voraussetzungen:

(6) $$|\Delta x_1| < h, \quad \cdots |\Delta x_{n-1}| < h, \quad |\Delta x_n| < h.$$

Wenn wir nun annehmen, daß alle Integrationsintervalle $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2, \cdots x_{n-1} - a_{n-1}$ endlich seien, so können wir, sobald eine beliebig kleine positive Zahl τ vorgegeben ist, σ so klein wählen, daß die rechte Seite von (5) kleiner als τ wird, so daß $|\Delta\varphi| < \tau$ wird infolge der Voraussetzungen (6). Folglich ist φ eine *stetige* Funktion aller n Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_n$, und dasselbe gilt nach dem Früheren von der Funktion f.

Ehe wir die Ergebnisse der vorigen und dieser Nummer als Satz formulieren, weisen wir noch auf Satz 10 von Nr. 74 hin, woraus folgt, daß das allgemeinste Integral des vorgelegten vollständigen Differentials gleich $f + C$ ist, wobei C eine willkürliche Konstante bedeutet. Außerdem heben wir hervor, daß die aufgestellte Funktion f für $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $\cdots x_n = a_n$ verschwindet, siehe (3) in Nr. 610. Daraus folgt, daß f gerade dasjenige Integral ist, das an der Stelle $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ den Wert Null hat.

Nunmehr können wir die Ergebnisse zusammenfassen in dem

Satz 2: Sind $U_1, U_2, \cdots U_n$ innerhalb eines endlichen Bereiches stetige Funktionen von $x_1, x_2, \cdots x_n$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung, so ist der Differentialausdruck:

$$U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + \cdots + U_n dx_n$$

dann und nur dann ein vollständiges Differential, wenn die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots n).$$

Werden sie erfüllt, so ist dasjenige Integral des Differentials, das an einer Stelle $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ des Bereiches verschwindet, darstellbar in der Form:

$$\int_{a_1}^{x_1} U_1(x_1, x_2, \cdots x_n)dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} U_2(a_1, x_2, \cdots x_n)dx_2 + \int_{a_3}^{x_3} U_3(a_1, a_2, x_3, \cdots x_n)dx_3$$

$$+ \cdots + \int_{a_n}^{x_n} U_n(a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, x_n)\,dx_n,$$

vorausgesetzt, daß alle Integrationsintervalle dem Bereiche angehören. Das allgemeinste Integral des Differentials geht aus diesem einen durch Addition einer willkürlichen Konstanten hervor.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

heißen die *Integrabilitätsbedingungen des Differentialausdrucks*

$$U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + \cdots + U_n dx_n.$$

Anstatt nämlich zu sagen, dieser Ausdruck sei ein vollständiges Integral, sagt man auch zuweilen, er sei *integrabel.*

Beispiel: Als Beispiel betrachten wir den Ausdruck

$$(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz,$$

der integrabel ist, denn die drei Koeffizienten U, V, W genügen hier den Bedingungen

$$V_z = W_y, \qquad W_x = U_z, \qquad U_y = V_x.$$

Es kommt nun:

$$\int_a^x U(x, y, z)dx = \int_a^x (y + z)\,dx = (y + z)(x - a),$$

$$\int_b^y V(a, y, z)\,dy = \int_b^y (z + a)dy = (z + a)(y - b),$$

$$\int_c^z W(a, b, z)dz = \int_c^z (a + b)\,dz = (a + b)(z - c).$$

Daher ist die Summe

$$yz + zx + xy - bc - ca - ab$$

das an der Stelle (a, b, c) verschwindende Integral, während

$$yz + zx + xy + \text{konst.}$$

das allgemeinste Integral vorstellt.

§ 2. Multiplikatoren eines Differentialausdrucks in zwei Veränderlichen.

612. Bedingung für den Multiplikator oder Integrabilitätsfaktor. Wenn ein Differentialausdruck in *zwei* Veränderlichen x und y:

$$(1) \qquad U(x, y)dx + V(x, y)dy$$

die Integrabilitätsbedingung $U_y = V_x$ des Satzes 1, Nr. 609, *nicht* erfüllt, so kann es doch eine Funktion M von x und y geben, die, als Faktor angebracht, den vorgelegten Differentialausdruck zu einem vollständigen Differentiale

$$(2) \qquad MUdx + MVdy$$

macht. Eine solche Funktion M heißt ein *Eulerscher Multiplikator* oder *Integrabilitätsfaktor.*

Die notwendige und hinreichende Bedingung für M läßt sich sofort aufstellen. Denn der Ausdruck (2) ist nach dem erwähnten Satze dann und nur dann integrabel, wenn

$$(3) \qquad \frac{\partial MU}{\partial y} = \frac{\partial MV}{\partial x}$$

ist. Weil MU und MV partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich y bzw. x haben sollen, so setzen wir voraus, daß M ebenso wie U und V im Variabilitätsbereiche stetig sei und daß die Ableitungen M_x, M_y, U_y, V_x ebenda stetig seien. Alsdann läßt sich die Bedingung (3) so schreiben:

$$M_y U + M U_y - M_x V - M V_x = 0$$

oder nach Division mit M, die erlaubt ist, da der Wert $M = 0$ ausgeschlossen werden muß:

$$(4) \qquad U\frac{\partial \ln M}{\partial y} - V\frac{\partial \ln M}{\partial x} = V_x - U_y.$$

Dies ist eine *lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung* für die noch unbekannte Funktion $\ln M$ von x und y, vgl. Nr. 89. Wir sagen also:

Satz 3: Damit M ein Multiplikator oder Integrabilitätsfaktor des Differentialausdrucks $Udx + Vdy$ sei, d. h. damit $M(Udx + Vdy)$ ein vollständiges Differential sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\ln M$ *der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt:*

$$U\frac{\partial \ln M}{\partial y} - V\frac{\partial \ln M}{\partial x} = V_x - U_y.$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß U und V nebst ihren Ableitungen U_y und V_x innerhalb eines Variabilitätsbereiches stetig seien, in dem auch $\ln M$ *nebst den partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sein soll.*

Beispiel: Der Ausdruck $ydx + dy$ ist kein vollständiges Differential. Multiplizieren wir ihn aber mit $M = 1:y$, so geht das vollständige Differential $dx + dy:y$ der Funktion $x + \ln y$ hervor. Hier ist $U = y$, $V = 1$, und die partielle Differentialgleichung wird in der Tat durch die Annahme $\ln M = -\ln y$ erfüllt.

613. Geometrische Deutung des Multiplikators. Sobald M ein Multiplikator von $Udx + Vdy$ ist und f ein Integral des vollständigen Differentials $M(Udx + Vdy)$ bedeutet, also

$$f_x = MU, \qquad f_y = MV \tag{1}$$

ist, können wir die Gleichung $f(x, y) =$ konst. als die *Gleichung einer Schar von Kurven* in der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x und y deuten. Wir fassen einen bestimmten Punkt P und die durch ihn gehende Kurve der Schar ins Auge. Hat f für die Koordinaten des Punktes P den Wert α, so ist $f(x, y) = \alpha$ die Gleichung dieser Kurve. Da längs der Kurve $f_x dx + f_y dy = 0$ ist, so gelten für den Winkel ν, den die Kurvennormale mit der positiven x-Achse bildet, nach (2) in Nr. 169 die Formeln:

$$\cos\nu = \frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}, \qquad \sin\nu = \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}. \tag{2}$$

Geben wir der Quadratwurzel das Pluszeichen, so bedeutet dies, daß wir die Normale in der Richtung nach denjenigen

Punkten seitlich von der Kurve $f = \alpha$ positiv rechnen, für deren Koordinaten $f(x, y)$ größer als α ist. Es folgt dies genau so wie in dem allgemeineren Falle einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ in Nr. 253.

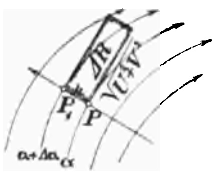


Fig. 72.

Auf der Normalen von P wählen wir einen Punkt P_1 im Abstande h von P, wobei wir h positiv im Sinne der positiven Normalen rechnen. (Siehe Fig. 72.) Hat P die Koordinaten x, y, so hat P_1 die Koordinaten $x + h\cos\nu$, $y + h\sin\nu$. Durch P_1 geht eine Kurve $f(x, y) =$ konst., bei der die Konstante einen anderen Wert als α hat, etwa den Wert $\alpha + \Delta\alpha$. Dann ist:

$$\frac{\Delta\alpha}{h} = \frac{f(x + h\cos\nu,\ y + h\sin\nu) - f(x, y)}{h}.$$

Nach Satz 25, Nr. 129, folgt hieraus für $\lim h = 0$ der Grenzwert:

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta\alpha}{h} = f_x \cos\nu + f_y \sin\nu$$

oder nach (1) und (2)

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta\alpha}{h} = M\sqrt{U^2 + V^2},$$

wobei die Wurzel positiv ist, also auch

$$M = \lim_{h=0} \frac{\Delta\alpha}{h\sqrt{U^2 + V^2}}. \tag{3}$$

Wenn wir auf der Tangente der Kurve $f = \alpha$ im Punkte P die Strecke $\sqrt{U^2 + V^2}$ abtragen, so ist der in (3) rechts stehende Nenner der Flächeninhalt ΔR des Rechtecks, das diese Strecke zur Grundlinie und h zur Höhe hat. Mithin ergibt sich die folgende von *Lie* herrührende geometrische Deutung des Multiplikators:

Satz 4: Ist M ein Multiplikator des Differentialausdrucks $U dx + V dy$, so daß $M(U dx + V dy)$ das vollständige Differential einer Funktion $f(x, y)$ ist, so ist der Wert von M für einen Punkt P oder (x, y) der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y gleich dem Grenzwerte:

$$M = \lim_{h=0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta R}.$$

Darin bedeutet $\Delta\alpha$ die Zunahme, die der Wert von $f(x, y)$ an der Stelle P erfährt, wenn ein Punkt von P aus um die Strecke h auf der Normalen der durch P gehenden Kurve $f =$ konst. weiterwandert, während ΔR der Flächeninhalt des Rechtecks mit der Grundlinie $\sqrt{U^2 + V^2}$ und der Höhe h ist.

614. Die verschiedenen Multiplikatoren desselben Differentialausdrucks. Sind M und N beides Multiplikatoren von $Udx + Vdy$, d. h. sind $M(Udx + Vdy)$ und $N(Udx + Vdy)$ die vollständigen Differentiale zweier Funktionen f und φ, so ist:

(1) $$f_x = MU, \quad f_y = MV; \qquad \varphi_x = NU, \quad \varphi_y = NV.$$

Daher wird die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. φ hängt von f ab, nach Satz 4, Nr. 80, ist also eine Funktion F von f allein:

$$\varphi(x, y) = F(f(x, y)).$$

Alsdann aber folgt:

$$\varphi_x = F' \cdot f_x, \qquad \varphi_y = F' \cdot f_y,$$

wenn F' die Ableitung von F nach f bedeutet. Weiterhin gibt (1):

$$N = \frac{\varphi_x}{U} = \frac{\varphi_x}{f_x} M = F'(f) M.$$

Umgekehrt: Es sei wie vorher M ein Multiplikator von $Udx + Vdy$ und $f(x, y)$ ein zugehöriges Integral. Dagegen sei N eine solche Funktion, die aus M durch Multiplikation mit irgend einer Funktion Ω von f allein hervorgeht:

$$N = \Omega(f) \cdot M.$$

Unter dieser Annahme ergibt sich:

$$N(Udx + Vdy) = \Omega(f) M(Udx + Vdy) = \Omega(f) df,$$

d. h. $N(Udx + Vdy)$ ist ein vollständiges Differential, nämlich das von $\int \Omega(f) df$. Daher muß N ebenfalls ein Multiplikator von $Udx + Vdy$ sein.

Beide Betrachtungen zusammen liefern die beiden Sätze:

Satz 5: Sind M und N Multiplikatoren ein und desselben Differentialausdrucks $Udx + Vdy$, so sind die Integrale von $M(Udx + Vdy)$ und von $N(Udx + Vdy)$ voneinander abhängig.

Satz 6: Ist M ein Multiplikator des Differentialausdrucks $Udx + Vdy$, so daß $M(Udx + Vdy)$ das vollständige Differential einer Funktion $f(x, y)$ wird, so ist jede Funktion von der Form $\Omega(f) \cdot M$ ein Multiplikator desselben Differentialausdrucks. Dabei bedeutet $\Omega(f)$ eine beliebige Funktion von f. Ferner hat überhaupt jeder Multiplikator von $Udx + Vdy$ diese Form $\Omega(f) \cdot M$.

Schließlich können wir den Satz 5 auch noch so aussprechen:

Satz 7: Wenn der Differentialausdruck $Udx + Vdy$ durch Multiplikation mit verschiedenen Funktionen integrabel gemacht wird, so sind doch alle zugehörigen Integrale voneinander abhängig.

Wir werden die Sätze über Multiplikatoren im dritten Bande anwenden.

§ 3. Kurvenintegrale.

615. Das Kurvenintegral als Grenzwert einer Summe. Wenn ein Differentialausdruck in zwei Veränderlichen x und y vorliegt:

$$Udx + Vdy,$$

der *kein* vollständiges Differential ist, so können wir zunächst auch nicht von Integralen dieses Ausdrucks sprechen. Aber indem wir den Begriff des Kurvenintegrals einführen, gelingt es doch, an diesen Ausdruck ein Integrationsverfahren anzuknüpfen. Wir werden es wie den Begriff des einfachen Integrals in § 2 des 1. Kap. durch einen Grenzprozeß gewinnen.

Es sei nämlich eine Kurve k in der xy-Ebene gegeben, etwa vom Punkte (x_0, y_0) bis zum Punkte (X, Y), wobei wir rechtwinklige Koordinaten benutzen. Wir zerlegen alsdann die Kurve durch eingeschaltete Punkte

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots \quad (x_{n-1}, y_{n-1})$$

in etwa n Stücke, siehe Fig. 73. Wenn U und V an jeder Stelle der Kurve vom Punkte (x_0, y_0) bis zum Punkte (X, Y), d. h. also für jedes Wertepaar x, y, das zu einem dazwischen liegenden Punkte der Kurve gehört, bestimmte endliche Werte haben, so können wir die Summe bilden:

$$J = [U_0(x_1 - x_0) + V_0(y_1 - y_0)] + [U_1(x_2 - x_1) + V_1(y_2 - y_1)] + \cdots + [U_{n-1}(X - x_{n-1}) + V_{n-1}(Y - y_{n-1})].$$

Hierin sollen U_0, V_0 die Werte von U und V an der Stelle (x_0, y_0) bedeuten, allgemein U_i, V_i die Werte von U und V an der Stelle (x_i, y_i). Die Summe J ist die natürliche Verallgemeinerung der Summe J in Nr. 404, wo an Stelle der Kurve eine geradlinige Strecke, nämlich ein Stück der x-Achse von x_0 bis X, auftrat, so daß die Punkte der Strecke durch nur *eine* Koordinate x bestimmt waren, während hier für die Punkte der Kurve k *beide* Koordinaten x und y nötig sind.

Fig. 73.

Stellen wir uns nun vor, daß längs der Kurve k immer mehr Punkte (x_i, y_i) zwischen dem Anfangspunkte (x_0, y_0) und dem Endpunkte (X, Y) derartig eingeschaltet werden, *daß alle Differenzen zwischen entsprechenden Koordinaten aufeinanderfolgender Punkte nach Null streben*, wobei die Anzahl n aller Teilstücke der Kurve über jede Zahl wächst, so wollen wir unter gewissen Voraussetzungen beweisen, daß die Summe J bei diesem Grenzübergange nach einem bestimmten endlichen Werte strebt, den wir alsdann das längs der Kurve k von (x_0, y_0) bis (X, Y) erstreckte *Kurvenintegral*

$$\int_k (U dx + V dy)$$

nennen.

Die Summe J, um deren Grenzwert es sich handelt, läßt sich etwas übersichtlicher schreiben: Verstehen wir unter x, y irgend eines der eingeschalteten Wertepaare x_i, y_i und unter Δx, Δy die Differenzen $x_{i+1} - x_i$, $y_{i+1} - y_i$, so können wir die Summe so darstellen:

(1) $$J = \sum_k [U(x, y)\Delta x + V(x, y)\Delta y],$$

[615

wobei der Index k andeuten soll, daß sich die Summe auf alle Differenzen Δx und Δy der Koordinaten längs der Kurve k beziehen soll.

616. Nachweis der Existenz des Grenzwertes. In bezug auf die Kurve k machen wir nunmehr die folgenden Voraussetzungen: Sie sei mittels einer Hilfsveränderlichen t in der Form dargestellt:

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Zu $t = t_0$ sollen die Werte $x = x_0$, $y = y_0$ und zu $t = T$ die Werte $x = X$, $y = Y$ gehören. Im Intervalle von t_0 bis T sollen φ und ψ stetige Funktionen von t mit stetigen Ableitungen $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ sein. In bezug auf die Funktionen U und V machen wir ferner die Voraussetzung, daß sie *längs der Kurve k stetig* seien. Dies soll bedeuten: Ist (x_1, y_1) irgend ein Punkt der Kurve k, so sollen einerseits U und V daselbst bestimmte Werte U_1 und V_1 haben und andererseits diese Werte übereinstimmen mit denjenigen Grenzwerten von U und V, die hervorgehen, wenn x und y *längs der Kurve* nach x_1 und y_1 streben. Vgl. die Definition in Nr. 20. Dies läßt sich so ausdrücken: Ist σ eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl, so soll es eine positive Zahl h derart geben, daß für jede Stelle (x, y) der Kurve, die den Bedingungen

$$|x - x_1| < h, \qquad |y - y_1| < h$$

genügt, auch

$$|U - U_1| < \sigma, \qquad |V - V_1| < \sigma$$

ist. Alsdann werden U und V vermöge der Substitution (1) auch stetige Funktionen $U(\varphi, \psi)$ und $V(\varphi, \psi)$ von t.

Nun läßt sich die Summe J der vorigen Nummer, ausgedrückt in t, nach (1) so schreiben:

$$(2) \qquad J = \sum_{t_0}^{T} [U(\varphi, \psi)\Delta\varphi + V(\varphi, \psi)\Delta\psi],$$

wobei

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t), \qquad \Delta\psi = \psi(t + \Delta t) - \psi(t)$$

ist und die Summe über alle Differenzen Δt von t_0 bis T zu erstrecken ist. Da φ und ψ stetige Funktionen von t mit

stetigen ersten Ableitungen sind, so ist nach dem Mittelwertsatze 3 von Nr. 28:

(3) $\Delta\varphi = \Delta t \cdot \varphi'(t + \theta \Delta t), \qquad \Delta\psi = \Delta t \cdot \psi'(t + \vartheta \Delta t),$

wobei θ und ϑ positive echte Brüche sind. Da ferner $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ stetig sind, so gibt es, falls σ eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl bedeutet, eine positive Zahl h derart, daß für $|\Delta t| < h$

$$|\varphi'(t + \theta \Delta t) - \varphi'(t)| < \sigma, \quad |\psi'(t + \vartheta \Delta t) - \psi'(t)| < \sigma$$

ist, so daß $\Delta\varphi$ und $\Delta\psi$ von $\Delta t \cdot \varphi'(t)$ bzw. $\Delta t \cdot \psi'(t)$ um weniger als $\sigma \Delta t$ abweichen. Für verschiedene Werte von t im Intervalle von t_0 bis T kann h verschieden ausfallen. Wir verstehen deshalb in der Folge unter h die kleinste aller dieser Zahlen. Alsdann ergibt sich nach (2), daß die Summe J von

$$J' = \sum_{t_0}^{T} [U(\varphi, \psi)\varphi'(t) + V(\varphi, \psi)\psi'(t)]\Delta t$$

um weniger als

$$K = \sigma \sum_{t_0}^{T} [|U(\varphi, \psi)| + |V(\varphi, \psi)|]\,|\Delta t|$$

abweicht. Ist nun g der größte Wert, den $|U(\varphi, \psi)| + |V(\varphi, \psi)|$ im Intervalle von t_0 bis T erreicht, so ist K nicht größer als

$$g\sigma \left| \sum_{t_0}^{T} \Delta t \right| = g\sigma\,|T - t_0|.$$

Für $\lim \sigma = 0$ strebt dieser Ausdruck nach Null. Also ist auch $\lim K = 0$, d. h. $\lim J = \lim J'$.

Wir betrachten deshalb von jetzt an die Summe J'. Darin ist der Inhalt der eckigen Klammer eine gewisse stetige Funktion $f(t)$, so daß

$$J' = \sum_{t_0}^{T} f(t)\Delta t$$

wird. Diese Summe hat aber, abgesehen davon, daß t statt x steht, genau die Form der Summe (2) in Nr. 404, von der wir wissen, daß ihr Grenzwert, falls alle Δt nach Null streben,

[616

gleich dem Integrale von $f(t)$, erstreckt von t_0 bis T, ist, nach Satz 6, Nr. 410. Demnach kommt:

Satz 8: Ist eine Kurve k vom Punkte (x_0, y_0) bis zum Punkte (X, Y) durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

definiert, indem zu $t = t_0$ die Werte x_0, y_0 und zu $t = T$ die Werte X, Y gehören, und sind φ und ψ nebst ihren Ableitungen φ' und ψ' im Intervalle von t_0 bis T stetig, sind ferner $U(x, y)$ und $V(x, y)$ längs der Kurve k stetige Funktionen von x und y und teilt man nun die Kurve durch eingeschaltete Punkte (x_i, y_i) in Intervalle, so hat die Summe:

$$\sum [U(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + V(x_i, y_i)(y_{i+1} - y_i)]$$

erstreckt über alle Teilintervalle, einen bestimmten endlichen Grenzwert, falls alle Differenzen $x_{i+1} - x_i$ und $y_{i+1} - y_i$ nach Null streben und dementsprechend die Anzahl aller Teilintervalle über jede Zahl wächst. Der Grenzwert ist gleich dem bestimmten Integrale:

$$\int_k (U dx + V dy) = \int_{t_0}^{T} [U(\varphi, \psi)\varphi'(t) + V(\varphi, \psi)\psi'(t)]\, dt.$$

617. Verallgemeinerung des Integrationsweges. Die Kurve k heißt der *Integrationsweg* des betrachteten Kurvenintegrals

$$\int_k (U dx + V dy).$$

Wir haben in dem letzten Satze über diesen Weg beschränkende Annahmen gemacht, die wir jetzt erweitern wollen.

Es seien *zwei* Kurven k_1 und k_2 gegeben, die erste gehe von P_0 nach P_1, die zweite von P_1 nach P_2. Auf jeder von ihnen sollen die Voraussetzungen des Satzes gelten, d. h. die Kurve k_1 soll mittels einer Hilfsveränderlichen durch zwei stetige Funktionen mit stetigen Ableitungen dargestellt sein, und ebenso die Kurve k_2. Dagegen brauchen k_1 und k_2 in P_1 nicht dieselbe Tangente zu haben, siehe Fig. 74. Ferner sollen U und V längs beider Kurven k_1 und k_2 stetige Funktionen

von x und y sein. Alsdann versteht man unter dem Kurvenintegral

$$\int_{k_1, k_2} (U dx + V dy),$$

hinerstreckt über den ganzen Weg, der aus k_1 und k_2 besteht, die Summe der beiden einzelnen Kurvenintegrale:

$$\int_{k_1} (U dx + V dy) + \int_{k_2} (U dx + V dy),$$

die nach dem letzten Satze wohldefiniert sind. Dies läßt sich noch weiter verallgemeinern:

Der Integrationsweg darf nicht nur *eine* Stelle haben, an der sich die Tangente unstetig ändert, vielmehr eine beliebige, aber *endliche* Anzahl von solchen Stellen aufweisen, so daß das Kurvenstück zwischen je zwei solchen Punkten den Voraussetzungen des Satzes 8 der vorigen Nummer genügt. Wir definieren dann das Kurvenintegral als die Summe der einzelnen Kurvenintegrale, von denen sich jedes auf eine der Teilkurven bezieht. Es ist nur eine *endliche* Anzahl von Sprungstellen der Tangente statthaft, weil sonst das Gesamtintegral in eine Summe von unendlich vielen Gliedern zerfiele, so daß die Konvergenz noch zu untersuchen wäre.

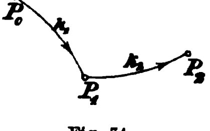


Fig. 74.

Im folgenden verstehen wir unter einem *Integrationswege* stets eine solche *Kurve, die aus einer endlichen Anzahl von Kurvenstücken zusammengesetzt ist, von denen jedes einzelne in der Form*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

darstellbar ist, wo φ und ψ stetige Funktionen mit stetigen Ableitungen φ' und ψ' bedeuten sollen.

Es erhellt nun ohne weiteres daraus, daß das Kurvenintegral der Grenzwert einer Summe ist, daß die Sätze gelten:

Satz 9: Das längs eines Integrationsweges k von P_0 bis P_1 erstreckte Kurvenintegral

$$\int_k (U dx + V dy)$$

ist entgegengesetzt gleich dem Werte desjenigen Kurvenintegrals, das längs desselben Weges im umgekehrten Sinne, nämlich von P_1 *nach* P_0 *hin, erstreckt wird.*

Satz 10: Besteht der Integrationsweg k aus mehreren Teilen $k_1, k_2, \cdots k_n$*, so ist das längs k erstreckte Kurvenintegral gleich der Summe der längs der Teile* $k_1, k_2, \cdots k_n$ *erstreckten Kurvenintegrale.*

618. Das Kurvenintegral längs eines geschlossenen Integrationsweges dargestellt als Flächenintegral. Es seien U und V innerhalb eines Bereiches der xy-Ebene stetige Funktionen von x und y, und es bedeute k einen in diesem Bereiche verlaufenden, sich selbst jedoch nicht schneidenden, aber geschlossenen Integrationsweg. Es seien x_0 und $X > x_0$ die äußersten Werte, die x auf k erreicht, und y_0 und $Y > y_0$ die äußersten Werte, die y auf k erreicht. Wir wollen ferner zunächst noch annehmen, daß eine zur y-Achse parallele Gerade mit irgend einer Abszisse x aus dem Intervalle von x_0 bis X die Kurve k nur in zwei Punkten (x, y_1) und (x, y_2) treffe, wobei $y_2 > y_1$ sei, siehe Fig. 75. Ebenso soll eine zur x-Achse parallele Gerade mit irgend einer Ordinate y aus dem Intervalle von y_0 bis Y die Kurve k nur in zwei Punkten (x_1, y) und (x_2, y) treffen, wobei $x_2 > x_1$ sei.

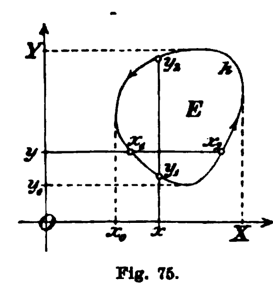


Fig. 75.

Der Integrationsweg k werde im *positiven* Sinne durchlaufen, d. h. so, daß die von k eingeschlossene Fläche E linker Hand liegt (wie die positive y-Achse gegenüber der positiven x-Achse, vgl. auch Nr. 530). Bei der Berechnung des Kurvenintegrals

$$(1) \qquad \int_k (U dx + V dy)$$

ist es übrigens einerlei, wo wir den Anfang von k annehmen, da der Integrationsweg geschlossen ist. Nach der Definition ist das Kurvenintegral der Grenzwert einer Summe von zwei Gliedern, nämlich der Summe

$$J = \sum_k U(x, y)\,\Delta x + \sum_k V(x, y)\,\Delta y,$$

vgl. (1) in Nr. 615. Den ersten Summanden dürfen wir auf eine solche Teilung des Integrationsweges beziehen, die durch Parallelen zur y-Achse bewirkt wird, siehe Fig. 76, und den zweiten auf eine solche Teilung, die durch Parallelen zur x-Achse bewirkt wird, siehe Fig. 77. Denn wir wissen, daß beide Summanden bestimmte endliche Grenzwerte haben, wie auch die Teilung des Integrationsweges vorgenommen werden möge.

Dem Intervalle zwischen zwei Teilgeraden (x) und $(x + \Delta x)$ in Fig. 76 gehören zwei Teilstücke der Kurve k an. Wegen

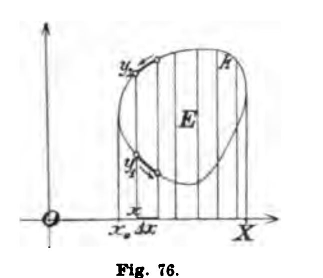


Fig. 76.

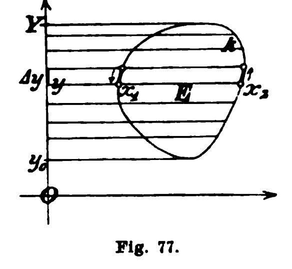


Fig. 77.

des festgesetzten Umlaufssinnes wird Δx bei der Stelle (x, y_1) in positivem Sinne, bei der Stelle (x, y_2) jedoch in negativem genommen. Daher ist:

$$\lim \sum_k{}' U(x,y)\Delta x = \lim \sum_{x_0}^{X}{}' [U(x,y_1) - U(x,y_2)]\Delta x$$
$$= \int_{x_0}^{X} [U(x,y_1) - U(x,y_2)]\,dx.$$

Dem Intervalle zwischen zwei Teilgeraden (y) und $(y + \Delta y)$ in Fig. 77 gehören ebenfalls zwei Teilstücke der Kurve k an. Jedoch wird hier Δy bei der Stelle (x_1, y) in negativem Sinne und bei der Stelle (x_2, y) in positivem Sinne genommen. Daher kommt:

$$\lim \sum_k{}' V(x,y)\Delta y = \lim \sum_{y_0}^{Y}{}' [V(x_2,y) - V(x_1,y)]\Delta y$$
$$= \int_{y_0}^{Y} [V(x_2,y) - V(x_1,y)]\,dy.$$

Das Kurvenintegral (1) ist somit gleich:

$$(2)\quad \int_{x_0}^{X}[U(x,y_1)-U(x,y_2)]dx+\int_{y_0}^{Y}[V(x_2,y)-V(x_1,y)]dy.$$

Nehmen wir nun an, daß $U(x,y)$ im betrachteten Bereiche eine stetige partielle Ableitung U_y und $V(x,y)$ ebenda eine stetige partielle Ableitung V_x habe, so können wir andererseits das *Doppelintegral* betrachten:

$$(3)\quad \iint_E (V_x-U_y)\,dx\,dy,$$

erstreckt über die von k eingeschlossene Fläche E. Nach Nr. 576 werten wir den Teil

$$\iint_E V_x dx\,dy \quad \text{bzw.} \quad \iint_E U_y dx\,dy$$

des Doppelintegrals aus, indem wir zuerst hinsichtlich x bzw. y integrieren. Es kommt dann:

$$\iint_E V_x dx\,dy=\int_{y_0}^{Y}[V(x_2,\,y)-V(x_1,\,y)]dy,$$

$$\iint_E U_y dx\,dy=\int_{x_0}^{X}[U(x,\,y_2)-U(x,\,y_1)]dx.$$

Daher ist das Doppelintegral (3) gerade gleich dem Werte (2). Somit hat sich ergeben:

$$(4)\quad \int_k (Udx+Vdy)=\iint_E (V_x-U_y)dx\,dy.$$

Es ist also das längs der Kurve k erstreckte Integral über $Udx+Vdy$ als Flächenintegral darstellbar, erstreckt über den von k umschlossenen Bereich E.

Dabei ist jedoch vorausgesetzt, daß der Rand k von einer Parallelen zur x- oder y-Achse höchstens zweimal getroffen werde. Um zu zeigen, daß diese Voraussetzung unnötig ist, beweisen wir, daß das Ergebnis auch für die Summe zweier

aneinander grenzender Bereiche E_1 und E_2 gilt, falls es für E_1 und E_2 einzeln richtig ist. Nach (4) haben wir nämlich:

$$(5) \qquad \begin{cases} \displaystyle\iint_{E_1} (V_x - U_y)\,dx\,dy = \int_{k_1} (U dx + V dy), \\ \displaystyle\iint_{E_2} (V_x - U_y)\,dx\,dy = \int_{k_2} (U dx + V dy), \end{cases}$$

wobei die Ränder k_1 und k_2 von E_1 und E_2 positiv, also so durchlaufen werden, daß die Fläche E_1 bzw. E_2 links liegt. Nach Satz 10 der letzten Nummer können wir die rechtsstehenden Kurvenintegrale in Summen zerlegen. Ist $\varkappa$ der gemeinsame Teil von k_1 und k_2, sind dagegen k_1' und k_2' die übrigen Teile von k_1 bzw. k_2, so ist das erste Kurvenintegral gleich der Summe der beiden längs k_1' und $\varkappa$ erstreckten und das zweite gleich der Summe der beiden längs k_2' und $\varkappa$ erstreckten Integrale. Man bemerkt aber in Fig. 78, daß bei den beiden auf $\varkappa$ bezüglichen Integralen der Weg in verschiedenen Sinnen durchlaufen wird, so daß diese beiden Integrale nach Satz 9 der letzten Nummer entgegengesetzt gleich sind und die Addition der beiden Formeln (5) ergibt: Das Flächenintegral über den von E_1 und E_2 gebildeten Gesamtbereich ist gleich dem Kurvenintegral, erstreckt längs des von k_1' und k_2' gebildeten Randes dieses Bereiches, vorausgesetzt, daß das Entsprechende für die Teilbereiche E_1 und E_2 gilt.

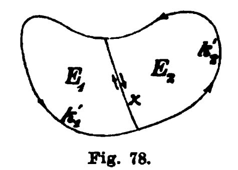


Fig. 78.

Liegt nun ein beliebiges ebenes Flächenstück E innerhalb des erlaubten Variabilitätsbereiches vor, so können wir es immer so zerlegen, daß der Rand eines jedes Teiles von einer Parallelen zur x- oder y-Achse höchstens zweimal getroffen wird. Aus der Gültigkeit des Satzes für die Teile folgt alsdann die Gültigkeit für das ganze Flächenstück E.

Satz 11: Ist E ein solches Flächenstück in der xy-Ebene, dessen Rand k aus Teilen besteht, die in der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ darstellbar sind, wobei φ, ψ, φ' und ψ' stetige Funktionen von t bedeuten, sind ferner $U(x, y)$ und $V(x, y)$ innerhalb E und auf dem Rande k von E stetige Funktionen von x und y

[618

mit stetigen partiellen Ableitungen U_y *und* V_x, *so ist das längs des Randes* k *erstreckte Kurvenintegral über* $U dx + V dy$ *mittels der Formel*

$$\int_k (U dx + V dy) = \int\int_E (V_x - U_y) dx\, dy$$

darstellbar als ein auf die ganze Fläche E *bezügliches Doppelintegral. Bei der Bildung des Kurvenintegrals sind dabei alle Teile von* k *in positivem Sinne zu durchlaufen, d. h. so, daß die Fläche* E *gegenüber der Richtung des Durchlaufens gerade so gelegen ist wie die positive* y*-Achse gegenüber der positiven* x*-Achse.*

Dies Ergebnis gilt z. B. auch im Falle einer Fläche E, wie sie in Fig. 79 dargestellt ist. Hier besteht der Rand k aus zwei getrennten Stücken, und es zerfällt das Kurvenintegral in eine Summe von zweien, von denen sich jedes auf eine der beiden Randlinien bezieht. Dabei ist der Umlaufungssinn so wie in der Figur zu nehmen, weil die Fläche E stets links liegen soll. Daß der Satz auch für derartige Fälle gilt, erkennt man sofort, wenn man noch eine Linie von dem äußeren nach dem inneren Rande hin zieht und den Satz auf die jetzt einfach umrandete Fläche E anwendet.

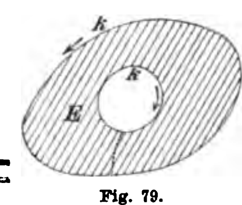


Fig. 79.

619. Das Kurvenintegral über ein vollständiges Differential. Wieder sollen die Funktionen U und V von x und y nebst ihren partiellen Ableitungen U_y und V_x in einem Bereiche der xy-Ebene stetig sein. Wir wählen irgend zwei Stellen (x_0, y_0) und (X, Y) in diesem Bereiche, siehe Fig. 80, und ziehen von der ersten zur zweiten zwei verschiedene Integrationswege k_1 und k_2, von denen wir vorerst annehmen wollen, daß sie einander nicht schneiden. Die Kurven k_1 und k_2 schließen ein Flächenstück E ein. *Wenn dies Flächenstück* E *vollständig zu jenem Bereiche gehört, in dem* U, V, U_y *und* V_x *stetig sind*, so können wir den letzten Satz auf E

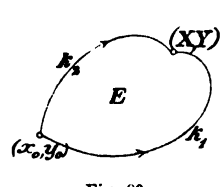


Fig. 80.

anwenden. Sobald wir dabei k_1 und k_2 im Sinne der Bewegung von der Stelle (x_0, y_0) zur Stelle (X, Y) durchlaufen, ergibt sich, weil E in Fig. 80 alsdann links von k_1, aber rechts von k_2 liegt, die Formel:

$$(1)\quad \int_{k_1}(U\,dx + V\,dy) - \int_{k_2}(U\,dx + V\,dy) = \int\!\!\int_E (V_x - U_y)\,dx\,dy.$$

Ist nun insbesondere $U\,dx + V\,dy$ ein *vollständiges Differential*, so verschwindet die Differenz $V_x - U_y$ nach Satz 1, Nr. 609, so daß die rechte Seite gleich Null wird. Dann kommt:

$$(2)\qquad \int_{k_1}(U\,dx + V\,dy) = \int_{k_2}(U\,dx + V\,dy),$$

wobei k_1 und k_2 im Sinne von der Stelle (x_0, y_0) zur Stelle (X, Y) zu durchlaufen sind.

Dasselbe Ergebnis gilt, wenn k_1 und k_2 einander durchsetzen. Denn z. B. im Falle der Fig. 81, wo k_1 und k_2 einander im Punkte (x_1, y_1) begegnen, zerlegen wir k_1 und k_2 in die Teile k_{11}, k_{12} und k_{21}, k_{22}, die durch diesen Teilpunkt bestimmt werden. Alsdann ist das längs k_{11} erstreckte Integral gleich dem längs k_{21} erstreckten — im Sinne der Bewegung von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1). Ebenso ist das längs k_{12} erstreckte Integral gleich dem längs k_{22} erstreckten — im Sinne der Bewegung von (x_1, y_1) nach (X, Y). Addition ergibt, daß die Formel (2) auch jetzt besteht, nach Satz 10, Nr. 617.

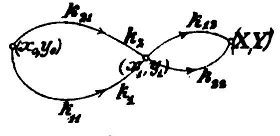
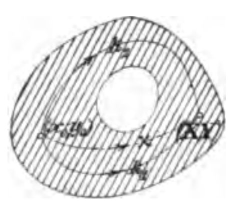


Fig. 81.

Satz 12: Sind U und V innerhalb eines Bereiches der xy-Ebene stetige Funktionen von x und y mit stetigen partiellen Ableitungen U_y und V_x und ist $U\,dx + V\,dy$ ein vollständiges Differential, so ist der Wert des von einer Stelle (x_0, y_0) des Bereiches bis zu einer Stelle (X, Y) des Bereiches längs eines Weges k_1 erstreckten Kurvenintegrals über $U\,dx + V\,dy$ gleich dem Werte des längs eines andern Weges k_2 von demselben Anfangspunkte bis zu demselben Endpunkte erstreckten Kurvenintegrals über $U\,dx + V\,dy$, vorausgesetzt, daß nicht nur k_1 und k_2 vollständig dem Bereiche angehören, sondern auch zwischen k_1 und k_2 keine Stelle liegt, die nicht auch dem Bereiche angehört.

[619

Daß diese letzte Voraussetzung für den Beweis durchaus wesentlich ist, soll noch die Fig. 82 erläutern, worin der Bereich das schraffierte ringförmige Stück sei. Das Flächenstück zwischen k_1 und k_2 ist hier ein Gebiet, das nicht als Bereich E für ein *Flächen*integral dienen kann, wie es die Anwendbarkeit des Satzes 11 der vorigen Nummer erfordert. Dagegen gehört hier zu k_1 und zu dem Wege x derselbe Integralwert.


Fig. 82.

620. Umkehrung der Betrachtung. Wir machen dieselben Voraussetzungen wie vorher über die Stetigkeit hinsichtlich der Funktionen U und V, wollen aber nicht annehmen, daß $Udx + Vdy$ gerade ein vollständiges Differential sei. Fragen wir uns dann, unter welchen Umständen das von (x_0, y_0) bis (X, Y) erstreckte Kurvenintegral über $Udx + Vdy$ einen vom Wege k unabhängigen Betrag haben kann, vorausgesetzt, daß alle statthaften Wege dem Bereiche angehören und keine zwei von ihnen eine Stelle einschließen, die nicht dem Bereiche angehört. Nach (1) in der letzten Nummer müßte

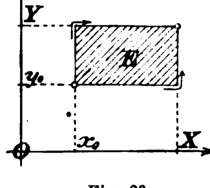


Fig. 83.

(1) $$\iint_E (V_x - U_y)\,dx\,dy = 0$$

sein für *jedes* Stück E der Ebene, das dem Bereiche angehört. Dies gilt z. B. für irgend ein *Rechteck*, dessen Seiten den Achsen parallel sind, siehe Fig. 83, vorausgesetzt, daß die Ecken (x_0, y_0) und (X, Y) so nahe beieinander gewählt werden, daß das ganze Rechteck im Variabilitätsbereiche enthalten ist. Für dieses Rechteck besagt die Formel (1) nach Nr. 573:

$$\int_{x_0}^{X}\left[\int_{y_0}^{Y}(V_x - U_y)\,dy\right]dx = 0.$$

Da X innerhalb gewisser Grenzen veränderlich ist, so steht links eine Funktion von X, die gleich Null ist, so daß auch ihre Ableitung verschwindet:

$$\int_{y_0}^{Y} (V_x - U_y)\,dy = 0,$$

woraus ebenso folgt: $V_x - U_y = 0$, d. h. $Udx + Vdy$ ist doch ein vollständiges Differential, nach Satz 1, Nr. 609.

Satz 13: Sind U und V innerhalb eines Bereiches der xy-Ebene stetige Funktionen von x und y mit stetigen partiellen Ableitungen U_y und V_x, so ist der Differentialausdruck $Udx + Vdy$ dann und nur dann ein vollständiges Differential, wenn das Kurvenintegral

$$\int_k (Udx + Vdy),$$

hinerstreckt von einer Stelle (x_0, y_0) des Bereiches bis zu irgend einer andern Stelle (X, Y) des Bereiches, einen Wert hat, der stets derselbe bleibt, falls der Integrationsweg k durch irgend einen anderen Integrationsweg von der ersten Stelle bis zur zweiten ersetzt wird, vorausgesetzt, daß zwischen beiden Integrationswegen keine Stelle gelegen ist, die nicht dem Variabilitätsbereiche angehört.

Achtes Kapitel.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

§ 1. Definition der monogenen Funktionen.

621. Vorbemerkung. Wir knüpfen jetzt, namentlich um den Integralbegriff auch auf den komplexen Bereich ausdehnen zu können, an das elfte Kapitel des ersten Bandes an. Dort, in Nr. 365, definierten wir $w = u + iv$ als eine *Funktion* von $z = x + iy$, wenn eine Vorschrift vorhanden war, nach der jedem Werte der komplexen Veränderlichen z innerhalb eines Variabilitätsbereiches der komplexen Zahlenebene ein Wert der komplexen Veränderlichen w zugeordnet wird. Es ist also ein Variabilitätsbereich für ein *reelles* Wertepaar x, y anzunehmen. Sind alsdann $u(x, y)$ und $v(x, y)$ *reelle* Funktionen von x und y in diesem Variabilitätsbereiche, so ist

$$(1) \qquad w = u(x, y) + iv(x, y)$$

der allgemeine Ausdruck einer Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$. *Diesen Funktionsbegriff werden wir nun zweckmäßig einschränken.* Diejenigen Funktionen nämlich, die wir im 11. Kapitel des 1. Bandes genauer untersuchten, z. B. die Potenzreihen, die goniometrischen und Exponentialfunktionen, der Logarithmus sowie die rationalen ganzen oder gebrochenen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, haben ausnahmslos *Ableitungen* $dw : dz$. Wir wollen deshalb feststellen, unter welchen Bedingungen die Funktion (1) eine Ableitung $dw : dz$ hat, und uns alsdann auf Funktionen beschränken, denen Ableitungen zukommen.

Die Ableitung ist nach Nr. 27 zu definieren als der Grenzwert des Bruches:

$$(2) \qquad \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta(u + iv)}{\Delta(x + iy)} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y},$$

worin:

$$\Delta u = u(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - u(x,\ y),$$
$$\Delta v = v(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - v(x,\ y)$$

ist, und zwar als derjenige Grenzwert, der hervorgeht, *falls Δx und Δy beide unabhängig voneinander nach Null streben.*

Im allgemeinen kann eine von Δx und Δy abhängige Größe verschiedenen Grenzwerten zustreben je nach der Art, wie man Δx und Δy sich der Null nähern läßt, da hier ein *doppelter* Grenzübergang zu machen ist. Z. B. der sehr einfache Ausdruck $\Delta y : \Delta x$ kann für $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$ alle möglichen Werte annehmen. Man setze nämlich, indem man unter k irgend eine bestimmte Zahl versteht, $\Delta y = k\Delta x$. Für $\lim \Delta x = 0$ ist dann auch $\lim \Delta y = 0$, während der Grenzwert des Bruches $\Delta y : \Delta x$ gleich k wird. Die Zahl k aber konnte ganz beliebig gewählt werden. Der Bruch $\Delta y : \Delta x$ also hat für $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$ keinen bestimmten Grenzwert. Daher wird auch der Bruch (2) für $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$ nur unter gewissen Bedingungen einen bestimmten Grenzwert haben.

622. Bedingungen für die Existenz einer Ableitung. Unter der Voraussetzung, daß $u(x, y)$ und $v(x, y)$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige reelle Funktionen von x, y innerhalb des Variabilitätsbereiches seien, ist es leicht, die Bedingungen für das Vorhandensein eines solchen Grenzwertes aufzustellen.

Wir schreiben *zunächst* vor, daß Δx und Δy so nach Null streben sollen, daß dabei stets $\Delta y = k\Delta x$ bleibt, wobei k eine beliebig gewählte Zahl bedeute. Alsdann ist:

$$\Delta u = u(x + \Delta x,\ y + k\Delta x) - u(x,\ y),$$
$$\Delta v = v(x + \Delta x,\ y + k\Delta x) - v(x,\ y)$$

und:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}}{1 + ik}.$$

Die Brüche $\Delta u : \Delta x$ und $\Delta v : \Delta x$ sind jetzt so beschaffen, daß ihre Zähler und Nenner für $\Delta x = 0$ verschwinden, so daß wir ihre Grenzwerte nach Satz 25, Nr. 129, bilden, indem wir Zähler und Nenner für sich nach Δx differenzieren und alsdann $\Delta x = 0$ setzen. Es kommt so:

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + k \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \qquad \lim \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + k \frac{\partial v(x, y)}{\partial y},$$

mithin:

(1) $$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u_x + k u_y + i(v_x + k v_y)}{1 + ik}.$$

Dieser Grenzwert ist nur dann von der willkürlich gewählten Zahl k unabhängig, wenn sich auch vom Zähler der Faktor $1 + ik$ absondern läßt, d. h. wenn der Zähler für $k = i$ verschwindet. Also ist zu fordern:

$$u_x + i u_y + i(v_x + i v_y) = 0$$

oder:

$$u_x - v_y + i(u_y + v_x) = 0.$$

Da u und v *reelle* Funktionen sind, zerfällt diese Bedingung in die beiden:

(2) $$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gibt (1) für jeden Wert von k:

(3) $$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x - i u_y.$$

Aber die Vorschrift, daß $\Delta y : \Delta x$ eine Konstante k sei, haben wir willkürlich in die Betrachtung hineingebracht. Es handelt sich darum, zu untersuchen, ob $\Delta w : \Delta z$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat, wie auch immer Δx und Δy nach Null streben mögen. Wir wissen daher bis jetzt nur, daß die Bedingungen (2) *notwendig* sind, und wollen nun zeigen, daß sie auch *hinreichen*.

Nunmehr also nehmen wir an, daß die Bedingungen (2) erfüllt seien, und lassen Δx und Δy in beliebiger Weise nach Null streben. Da wir voraussetzen, daß u und v stetig seien, so ist nach Satz 28, Nr. 137:

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \{\Delta x \cdot u_x + \Delta y \cdot u_y\}_{x + \theta \Delta x,\, y + \theta \Delta y},$$
$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = \{\Delta x \cdot v_x + \Delta y \cdot v_y\}_{x + \vartheta \Delta x,\, y + \vartheta \Delta y},$$

622]

wobei θ und ϑ positive echte Brüche bedeuten und die Indizes andeuten sollen, daß x und y in den geschweiften Klammern durch diese Indizes zu ersetzen sind. Es wird jedoch bequemer sein, das Wertepaar $x + \theta \Delta x$, $y + \theta \Delta y$ mit x_1, y_1 und das Wertepaar $x + \vartheta \Delta x$, $y + \vartheta \Delta y$ mit x_2, y_2 zu bezeichnen und dementsprechend $u(x_1, y_1)$ mit u_1 und $v(x_2, y_2)$ mit v_2, so daß

$$(4) \qquad \Delta u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \Delta y, \qquad \Delta v = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Delta x + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \Delta y$$

wird. Infolge der Annahme (2) ist nun:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial y_2}, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial y_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

wenn $u(x_2, y_2)$ mit u_2 bezeichnet wird Demnach lassen sich die Zunahmen (4) so ausdrücken:

$$\Delta u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \Delta y, \qquad \Delta v = -\frac{\partial u_2}{\partial y_2} \Delta x + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Delta y,$$

so daß sich der Bruch

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x}}{1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

auf die Form bringen läßt:

$$(5) \qquad \frac{\Delta w}{\Delta z} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i \frac{\partial u_2}{\partial y_2}\right) \frac{1 + i \dfrac{\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - i \frac{\partial u_1}{\partial y_1}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i \frac{\partial u_2}{\partial y_2}} \cdot \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{1 + i \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Wenn nun u und v, wie wir annehmen, *stetige* partielle Ableitungen erster Ordnung haben, so streben

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial u_1}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y_2}$$

für $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$ nach

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{ bzw. } \frac{\partial u}{\partial y},$$

weil x_1, y_1 und ebenso x_2, y_2 von x, y nur um $\theta \Delta x$, $\theta \Delta y$ bzw. $\vartheta \Delta x$, $\vartheta \Delta y$ abweichen. Folglich ist der Grenzwert des

in (5) rechts im Zähler auftretenden Bruches, nämlich des Faktors von $i\Delta y : \Delta x$, gleich Eins, so daß wie in (3) hervorgeht:

(6) $$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Also gilt der

Satz 1: Sind $u(x,y)$ und $v(x,y)$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung reelle stetige Funktionen von x und y innerhalb eines Variabilitätsbereiches, so daß

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ innerhalb des entsprechenden Bereiches der komplexen Zahlenebene ist, so hat der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

für $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$ *dann und nur dann einen bestimmten endlichen Grenzwert, der von der Art, wie Δx und Δy nach Null streben, unabhängig ist, wenn innerhalb des Bereiches die Bedingungen:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

erfüllt sind.

623. Monogene Funktionen. Es soll von nun an

(1) $$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

eine *monogene Funktion* der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ innerhalb eines gewissen Bereiches der komplexen Zahlenebene heißen, wenn u und v nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung innerhalb des zugehörigen Bereiches der reellen Wertepaare x, y reelle stetige Funktionen von x und y sind, die den Bedingungen

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

genügen. Man nennt diese Bedingungen die *Cauchy-Riemannschen Gleichungen.*

Jede monogene Funktion hat nach den Ergebnissen der letzten Nummer innerhalb des Bereiches überall eine *Ableitung:*

$$\frac{dw}{dz} = \lim \frac{\Delta w}{\Delta z},$$

die wir auch ihren *Differentialquotienten* nennen und die nach der Formel (6) der letzten Nummer den Wert

(3) $$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

hat, wofür wir auch nach (2) schreiben können:

(4) $$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(u+iv)}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Wenn wir künftig eine monogene Funktion von z mit $f(z)$ bezeichnen, so soll natürlich $f'(z)$ ihre Ableitung bedeuten.

Wir behaupten nun umgekehrt:

Satz 2: Ist innerhalb eines Bereiches der komplexen Zahlenebene die Größe $w = u + iv$ als eine Funktion der Größe $z = x + iy$ definiert und zwar derart, daß der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

für lim $\Delta x = 0$, lim $\Delta y = 0$ *einen bestimmten endlichen Grenzwert $\varphi + i\psi$ hat, so ist w eine monogene Funktion von z, sobald u, v, φ und ψ innerhalb des Bereiches stetige reelle Funktionen von x und y sind.*

Ist nämlich σ eine beliebig kleine positive Zahl, so gibt es nach den Annahmen des Satzes eine positive Zahl h derart, daß für

(5) $$|\Delta x| < h, \quad |\Delta y| < h$$

auch stets

(6) $$\left|\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} - (\varphi + i\psi)\right| < \sigma$$

ist. Wählen wir insbesondere $\Delta y = 0$, so kommt:

$$\left|\frac{\Delta u}{\Delta x} - \varphi + i\left(\frac{\Delta v}{\Delta x} - \psi\right)\right| < \sigma$$

oder nach einer Bemerkung in Nr. 357:

$$\left|\frac{\Delta u}{\Delta x} - \varphi\right| < \sigma, \quad \left|\frac{\Delta v}{\Delta x} - \psi\right| < \sigma,$$

d. h. u und v haben stetige partielle Ableitungen φ und ψ nach x:

(7) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \psi.$$

[623

Ebenso liefert (6) bei der Annahme $\Delta x = 0$:

$$\left|\frac{\Delta v}{\Delta y} - \varphi - i\left(\frac{\Delta u}{\Delta y} + \psi\right)\right| < \sigma,$$

d. h.

$$\left|\frac{\Delta u}{\Delta y} + \psi\right| < \sigma, \quad \left|\frac{\Delta v}{\Delta y} - \varphi\right| < \sigma,$$

so daß u und v die stetigen partiellen Ableitungen nach y haben:

$$(8) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\psi, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi.$$

Die Ableitungen (7) und (8) erfüllen offenbar die Cauchy-Riemannschen Gleichungen (2); folglich ist unser Satz 2 bewiesen. Wir können ihn etwas knapper so formulieren:

Satz 3: Ist innerhalb eines Bereiches der komplexen Zahlenebene $f(z)$ eine solche stetige Funktion von $z = x + iy$, die ebenda eine stetige Ableitung $f'(z)$ hat, so ist $f(z)$ in dem Bereiche eine monogene Funktion.

In Nr. 365 definierten wir die *analytischen* Funktionen, nämlich die Potenzreihen:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

Sie sind nach Satz 16, Nr. 367, innerhalb ihrer Konvergenzkreise stetig und haben dort nach Satz 19, Nr. 370, die ebenfalls stetigen Ableitungen:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + \cdots + nc_n(z - z_0)^{n-1} + \cdots.$$

Hieraus folgt nach unserem Satze: *Die analytischen Funktionen sind monogene Funktionen.* Nach Nr. 366, Nr. 373 und Nr. 374 gehören die ganzen rationalen Funktionen und die Funktionen e^z, $\sin z$, $\cos z$, $(1 + z)^m$ zu den analytischen und demnach auch zu den monogenen Funktionen. Dasselbe gilt nach Nr. 376 für den *Hauptwert des Logarithmus,* wenn dabei von den Stellen der negativen reellen Achse abgesehen wird. Daß auch die andern, im 11. Kap. des 1. Bandes vorkommenden besonderen Funktionen monogen sind, wird sich in den nächsten Nummern zeigen.

Wir werden später sogar erkennen (in Nr. 643), daß sich jede monogene Funktion in der Umgebung einer Stelle z_0

ihres Bereiches als Potenzreihe nach steigenden ganzen positiven Potenzen von $z - z_0$ entwickeln läßt, d. h. in jener Umgebung eine analytische Funktion ist.

624. Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von monogenen Funktionen. Sind $u_1 + iv_1$ und $u_2 + iv_2$ in einem gemeinsamen Bereiche monogene Funktionen w_1 und w_2 von z oder $x + iy$, so ist:

$$(1) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}; \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Im gemeinsamen Bereiche genügen nun auch die vier Funktionen

$$w_1 + w_2, \quad w_1 - w_2, \quad w_1 w_2, \quad w_1 : w_2$$

den Cauchy-Riemannschen Gleichungen, wenn nur bei der letzten Funktion von denjenigen Stellen abgesehen wird, wo w_2 verschwindet. Es wird genügen, den Beweis etwa für das Produkt $w_1 w_2$ anzudeuten. Bringen wir es auf die Form $u + iv$, so kommt:

$$u = u_1 u_2 - v_1 v_2, \qquad v = u_1 v_2 + v_1 u_2.$$

Differentiation dieser Funktionen gibt nach (1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} u_2 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x} v_2 - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} u_2 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} v_2 + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} v_2 + u_1 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} u_2 + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} v_2 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} u_2 + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y},$$

d. h.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ebenso ergibt sich die zweite Cauchy-Riemannsche Gleichung. Da Entsprechendes in den andern Fällen gilt, so können wir sagen:

Satz 4: Sind w_1 und w_2 in einem gemeinsamen Bereiche monogene Funktionen von $z = x + iy$, so gilt dasselbe ebenda von ihrer Summe, ihrer Differenz, ihrem Produkte und ihrem Quotienten. Nur muß man im letzten Falle den Bereich soweit einschränken, daß die Funktion w_2 darin nirgends verschwindet.

Z. B. folgt hieraus, daß $\operatorname{tg} z = \sin z : \cos z$, die in Nr. 375 eingeführte Funktion, monogen in einem solchen Bereiche ist,

wo $\cos z$ nicht verschwindet. Entsprechendes gilt von $\operatorname{ctg} z = \cos z : \sin z$. Auch erhellt jetzt, daß eine *gebrochene rationale Funktion* (Nr. 379) monogen in einem jeden solchen Bereiche ist, in dem ihr Nenner nicht verschwindet.

625. Funktionen von Funktionen. Es gilt der

Satz 5: Ist $w = f(z)$ innerhalb eines Bereiches für z eine monogene Funktion von z und ferner $W = F(w)$ innerhalb eines Bereiches für w eine monogene Funktion von w, so ist auch W eine monogene Funktion von z für diejenigen Werte von z innerhalb des ersten Bereiches, denen vermöge $w = f(z)$ solche Werte w zugehören, die im zweiten Bereiche liegen.

Es sei nämlich $z = x + iy$ und

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad W = F(w) = U(u,v) + iV(u,v).$$

Nach Voraussetzung sind u und v im ersten Bereiche reelle stetige Funktionen von x und y mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung, die den Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

genügen. Ebenso sind U und V im zweiten Bereiche reelle stetige Funktionen von u und v mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung, die entsprechend den Gleichungen:

$$(2) \qquad \frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial v}, \qquad \frac{\partial U}{\partial v} = -\frac{\partial V}{\partial u}$$

genügen. Beschränken wir uns auf solche Wertepaare x, y des ersten Bereiches, zu denen infolge von $w = f(z)$ Wertepaare u, v gehören, die im zweiten Bereiche liegen, so sind U und V als Funktionen von u und v nach Satz 8, Nr. 22, stetige Funktionen von x und y, die nach Satz 21, Nr. 41, die stetigen partiellen Ableitungen haben:

$$(3) \qquad \begin{cases} U_x = U_u u_x + U_v v_x, & U_y = U_u u_y + U_v v_y, \\ V_x = V_u u_x + V_v v_x, & V_y = V_u u_y + V_v v_y. \end{cases}$$

Aus (1) und (2) ersehen wir, daß $U_x = V_y$ und $U_y = -V_x$ ist, d. h. U und V, als Funktionen von x und y aufgefaßt, wiederum den Cauchy-Riemannschen Gleichungen genügen, was zu beweisen war.

Nach (4) in Nr. 623 hat die somit monogene Funktion W von z die Ableitung $U_x + i V_x$, die sich nach (3) so darstellt:

$$\frac{dW}{dz} = U_u u_x + U_v v_x + i(V_u u_x + V_v v_x),$$

d. h. mit Rücksicht auf (1) und (2) so:

$$\frac{dW}{dz} = (U_u + i V_u)(u_x + i v_x)$$

oder:

(4) $$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw}\frac{dw}{dz}.$$

Die Regel für die Differentiation einer Funktion von einer Funktion (Nr. 33) gilt demnach auch für monogene Funktionen.

Als eine Anwendung des Satzes 5 erwähnen wir, daß mit

$$W = \frac{1}{2i}\ln w, \qquad w = \frac{1+iz}{1-iz}$$

auch

$$W = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz},$$

d. h. nach (1) in Nr. 377 der *Arkustangens* von z eine monogene Funktion von z ist.

§ 2. Konforme Abbildung.

626. Die durch eine monogene Funktion vermittelte Abbildung. Wenn

(1) $$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

innerhalb eines Bereiches eine monogene Funktion von $z = x + iy$ ist, so entspricht jeder Stelle z des Bereiches eine komplexe Zahl w. Wie wir z durch einen Punkt der komplexen Zahlenebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x und y veranschaulichen, können wir die komplexe Zahl w durch einen Punkt einer zweiten Zahlenebene mit den rechtwinkligen Koordinaten u und v darstellen. Da u und v nach (1) Funktionen von x und y sind, so entspricht jeder Stelle z des Bereiches in der z-Ebene eine Stelle w der w-Ebene, d. h. der Bereich der z-Ebene wird in der w-Ebene *abgebildet*.

In § 5 des sechsten Kapitels sprachen wir allgemein über Abbildungen einer Ebene auf einer anderen Ebene. Wenn wir

die dort gebrauchten Bezeichnungen x, y und u, v vertauschen, so sind die beiden ersten in Nr. 593 formulierten Voraussetzungen diese: Erstens sollen u und v und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktionen von x und y sein, was auch hier der Fall ist, sobald wir uns auf den Variabilitätsbereich der monogenen Funktion w beschränken. Zweitens soll die Funktionaldeterminante

$$\mathfrak{D} = u_x v_y - v_x u_y \neq 0$$

sein. Auch diese Voraussetzung können wir erfüllen, denn wegen der Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$(2) \qquad u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

ist

$$(3) \qquad \mathfrak{D} = u_x^2 + u_y^2,$$

also nur dann $\mathfrak{D} = 0$, wenn u_x und u_y beide gleich Null sind. Im ganzen Bereiche könnte dies nur dann der Fall sein, wenn $u =$ konst. wäre, und aus (2) würde sich noch $v =$ konst., also $w =$ konst. ergeben, ein Fall, von dem wir natürlich absehen. Wohl aber ist es denkbar, daß u_x und u_y und nach (2) folglich auch v_x und v_y an einzelnen Stellen des Bereiches oder längs einzelner Kurven im Bereiche der z-Ebene zugleich verschwinden. *Alle solche Stellen schließen wir ausdrücklich vom Bereiche aus.* Die dritte in Nr. 593 formulierte Voraussetzung bezieht sich nur auf die *Umkehrung* der Abbildung, die wir hier nicht in Betracht ziehen wollen.

Nach Satz 11, Nr. 595, entspricht jeder Richtung, die von einer Stelle z der z-Ebene ausgeht und mit der positiven x-Achse den Winkel α bilde, eine von der Bildstelle w ausgehende Richtung, die etwa mit der positiven u-Achse den Winkel β einschließe. Dabei ist nach (3) in Nr. 595, worin x, y, α mit u, v, β vertauscht werden müssen und φ und ψ mit u und v zu bezeichnen sind:

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{v_x + v_y \operatorname{tg}\alpha}{u_x + u_y \operatorname{tg}\alpha} = \frac{-u_y + u_x \operatorname{tg}\alpha}{u_x + u_y \operatorname{tg}\alpha}.$$

Der letzte Ausdruck geht durch Anwendung von (2) hervor. Es kommt also:

$$(5) \qquad \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = -\frac{u_y}{u_x}.$$

Die Formel (4) von Nr. 595 lautet hier so:

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,\beta}{d\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{\mathfrak{D}}{(u_x + u_y\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2},$$

woraus mit Rücksicht auf (3) und (4) folgt:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\mathfrak{D}\cos^2\beta}{(u_x + u_y\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2\cos^2\alpha} = \frac{u_x^2 + u_y^2}{(u_x\cos\alpha + u_y\sin\alpha)^2 + (-u_y\cos\alpha + u_x\sin\alpha)^2}$$

oder einfacher:

(6) $$\frac{d\beta}{d\alpha} = 1, \quad \text{d. h.} \quad \beta = \alpha + \text{konst.}$$

Die geometrische Bedeutung dieser Formel ist diese: Fassen wir eine *bestimmte* Stelle z der z-Ebene und ihr Bild w in der w-Ebene ins Auge, so ist für zugeordnete Richtungen $\beta = \alpha +$ konst., wie auch die Richtung α von z aus gewählt sein mag; jedoch für einen *anderen* Punkt z wird die additive Konstante eine andere. Man sieht dies auch aus (5), denn danach ist

$$\beta = \alpha - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{u_y}{u_x},$$

das letzte Glied also von x und y, d. h. von der Wahl der Stelle z abhängig.

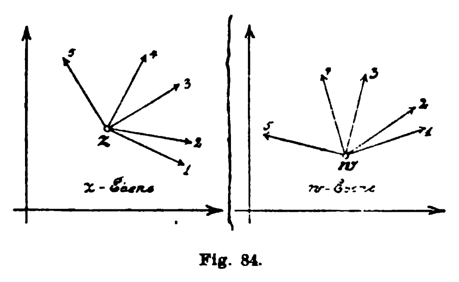


Fig. 84.

Wenn wir die z-Ebene und die w-Ebene nebeneinander legen, so erhalten wir die den Richtungen α (von z aus) entsprechenden Richtungen β (vom Bildpunkte w aus) einfach durch Drehung des Büschels *aller* Richtungen α um einen gewissen Winkel, der allerdings von Stelle zu Stelle im allgemeinen ein anderer sein wird, siehe Fig. 84. Es ergibt sich also: *Zwei Kurven, die von der Stelle z ausgehen, bilden sich als zwei Kurven ab, die von der Bildstelle w ausgehen und dort denselben Winkel miteinander einschließen wie jene Kurven an der Stelle z, und zwar stimmen auch die Drehsinne beider Winkel überein.* Die Abbildung heißt daher *gleichsinnig winkeltreu.*

Betrachten wir außer einer Stelle z eine benachbarte Stelle $z + \Delta z$ in der z-Ebene. Der Bildpunkt sei mit $w + \Delta w$

[626

bezeichnet. Die Strecke von z nach $z + \Delta z$ sei gleich Δs und die Strecke von w nach $w + \Delta w$ gleich $\Delta \sigma$. Alsdann ist, wenn die Stelle $z + \Delta z$ die rechtwinkligen Koordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ und die Stelle $w + \Delta w$ die rechtwinkligen Koordinaten $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ hat:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \quad (\Delta \sigma)^2 = (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2,$$

d. h.

$$(7) \qquad \left(\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}\right)^2 = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \cdot \frac{\Delta u - i\Delta v}{\Delta x - i\Delta y}.$$

Nach Nr. 622 aber ist für $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$ der Grenzwert des ersten Bruches rechts, der ja auch mit $\Delta w : \Delta z$ bezeichnet werden kann, nichts anderes als die Ableitung $dw : dz$ oder $u_x - iu_y$. Wenn wir in den Schlußfolgerungen von Nr. 622 überall i durch $-i$ ersetzen, erkennen wir, daß der Grenzwert des zweiten Bruches rechts in (7) gleich $u_x + iu_y$ ist. Also folgt mit Rücksicht auf (3):

$$(8) \qquad \lim \left(\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}\right)^2 = u_x^2 + u_y^2 = \mathfrak{D}.$$

Allen Stellen der z-Ebene in der Umgebung einer Stelle z entsprechen demnach die dem Bildpunkte w benachbarten Stellen der w-Ebene derart, daß das Verhältnis aus entsprechenden Strecken einen Grenzwert hat, der zwar von der Lage des Punktes z, jedoch *nicht* von der Richtung abhängt, in der man von z zu einer benachbarten Stelle gelangt. Man kann also auch sagen: Je kleiner ein Kreis mit der Mitte z in der z-Ebene gewählt wird, um so mehr nähert sich sein Bild einem Kreise in der w-Ebene, dessen Mitte der Bildpunkt w von z ist. Verbinden wir hiermit die Bemerkung über die Winkeltreue, so können wir sagen: Eine in der Umgebung der Stelle z angenommene Figur hat ein Bild, das dem Originale *ähnlich* wird, wenn die Dimensionen der Figur nach Null streben. Man sagt auch nach *Gauß*, von dem diese Betrachtungen herrühren: *die Abbildung ist in den kleinsten Teilen ähnlich.* Eine solche Abbildung heißt *konform.*

Der Ähnlichkeitsmaßstab ist allerdings von Stelle zu Stelle veränderlich, wie die Formel (8) zeigt, weil $\mathfrak{D}$ eine Funktion von x und y ist.

Wir fassen die Ergebnisse zusammen in dem

Satz 6: Ist $w = u + iv$ innerhalb eines gewissen Bereiches eine monogene Funktion von $z = x + iy$, so vermittelt sie eine Abbildung dieses Bereiches der z-Ebene in der w-Ebene, und zwar ist die Abbildung gleichsinnig winkeltreu oder konform. Abzusehen ist jedoch von allen denjenigen Stellen des Bereiches, an denen die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung von u und demnach auch die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung von v gleich Null sind.

627. Die Gesamtheit aller konformen Abbildungen. In dem letzten Satze heißt es: gleichsinnig winkeltreu *oder* konform. Daß in der Tat die gleichsinnige Winkeltreue ohne weiteres nach sich zieht, daß die Abbildung konform ist, folgt daraus, daß es keine anderen gleichsinnig winkeltreuen Abbildungen gibt als diejenigen, die durch monogene Funktionen vermittelt werden. Dies wollen wir hier beweisen.

Wenn

$$(1) \qquad u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y)$$

die Gleichungen einer Abbildung der xy-Ebene in der uv-Ebene sind, wobei wir voraussetzen, daß φ und ψ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in einem gewissen Bereiche stetig seien und daselbst die Funktionaldeterminante

$$(2) \qquad \mathfrak{D} = \varphi_x \psi_y - \psi_x \varphi_y \neq 0$$

sei, so bestehen zwischen den Winkeln α, β einander zugeordneter Richtungen, die von zusammengehörigen Punkten (x, y) und (u, v) beider Ebenen ausgehen, nach Nr. 595 die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\psi_x + \psi_y \operatorname{tg} \alpha}{\varphi_x + \varphi_y \operatorname{tg} \alpha}, \quad \frac{d \operatorname{tg} \beta}{d \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\mathfrak{D}}{(\varphi_x + \varphi_y \operatorname{tg} \alpha)^2}.$$

Wir müssen nämlich, wie die Vergleichung von (1) mit den Formeln (2) in Nr. 593 zeigt, wieder x, y, α mit u, v, β vertauschen. Hieraus folgt nun weiter:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\mathfrak{D}}{(\varphi_x \cos \alpha + \varphi_y \sin \alpha)^2 + (\psi_x \cos \alpha + \psi_y \sin \alpha)^2}.$$

Die Abbildung ist dann und nur dann gleichsinnig winkeltreu,

wenn für jede Richtung α der Bruch $d\beta : d\alpha = 1$ ist, woraus einzeln folgt, daß

(3) $\varphi_x^2 + \psi_x^2 = \mathfrak{D}, \quad \varphi_x\varphi_y + \psi_x\psi_y = 0, \quad \varphi_y^2 + \psi_y^2 = \mathfrak{D}$

sein muß. Aus der zweiten Gleichung (3) und aus (2) ergibt sich nun durch Auflösung nach φ_y und ψ_y:

$$\varphi_y = -\frac{\psi_x \mathfrak{D}}{\varphi_x^2 + \psi_x^2}, \quad \psi_y = \frac{\varphi_x \mathfrak{D}}{\varphi_x^2 + \psi_x^2},$$

d. h. wegen der ersten Gleichung (3):

$$\varphi_y = -\psi_x, \quad \psi_y = \varphi_x.$$

Dies aber sind die Cauchy-Riemannschen Gleichungen für φ und ψ, so daß also $\varphi + i\psi$ eine monogene Funktion von $z = x + iy$ sein muß.

Hiermit ist der Satz bewiesen:

Satz 7: Jede gleichsinnig winkeltreue Abbildung einer Ebene ist auch konform und wird durch eine monogene Funktion vermittelt.

628. Beispiel einer konformen Abbildung. Es ist

(1) $$w = u + iv = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

eine monogene Funktion, bei der

(2) $$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

ist. Der Variabilitätsbereich der Funktion ist die ganze z-Ebene, abgesehen vom Nullpunkte $x = 0$, $y = 0$, wo u, v, u_x, u_y, v_x und v_y unstetig werden. Die Funktionaldeterminante ist hier:

$$\mathfrak{D} = u_x^2 + u_y^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$

und wird nirgends im Bereiche gleich Null. Die Gleichungen (2) vermitteln also eine konforme Abbildung der ganzen xy-Ebene, abgesehen vom Nullpunkte, auf eine uv-Ebene, und wir wollen diese spezielle konforme Abbildung etwas genauer untersuchen.

Sie läßt sich leicht mittels der sogenannten *Transformation durch reziproke Radien herstellen.* Ist O der Anfangspunkt der

xy-Ebene und P ein beliebiger Punkt dieser Ebene, so besteht die Transformation durch reziproke Radien darin, daß man auf dem Radiusvektor OP von P zu demjenigen Punkte Q übergeht, dessen Radiusvektor OQ gleich dem reziproken Werte des Radiusvektors OP von P ist, so daß stets

$$OP \cdot OQ = 1$$

ist. Man findet Q, indem man die Polare p von P hinsichtlich des Einheitskreises um O konstruiert (siehe Figur 85 und Fig. 86, je nachdem P außerhalb oder innerhalb des Kreises

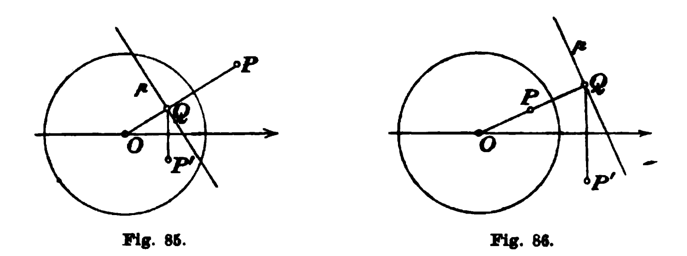


Fig. 85. Fig. 86.

liegt) und in Q mit der Geraden OP zum Schnitte bringt. Hat P die Koordinaten x, y, so hat Q die Koordinaten

$$\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Wenn wir nun Q an der x-Achse spiegeln, d. h. P' so bestimmen, daß die x-Achse die Mittelsenkrechte zu QP' wird, so hat P' gerade die in (2) angegebenen Koordinaten u, v.

Sobald wir also die uv-Ebene mit entsprechenden Achsen auf die xy-Ebene legen, ergibt sich der Bildpunkt P' oder (u, v) eines Punktes P oder (x, y), indem man zunächst auf P die Transformation durch reziproke Radien und auf den so gewonnenen Punkt Q die Spiegelung an der x-Achse ausführt. Wir wollen aber im folgenden die beiden Ebenen wieder voneinander trennen.

Es ist bekannt, daß die Transformation durch reziproke Radien jeden Kreis in einen Kreis, insbesondere jeden Kreis durch O in eine Gerade und jede Gerade in einen Kreis durch O verwandelt. Da die Spiegelung hieran nichts ändert, so gilt dasselbe von der zu betrachtenden konformen Ab-

bildung. Es ist leicht, dies direkt zu zeigen. Denn nach (2) haben wir:

$$(3) \qquad x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \qquad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Nun ist allgemein:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

die Gleichung eines Kreises in der xy-Ebene. Vermöge der konformen Abbildung entspricht dem Kreise eine Kurve in der uv-Ebene, deren Gleichung durch Einsetzen der Werte (3) hervorgeht und daher lautet:

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0,$$

also in der Tat die Gleichung eines Kreises in der uv-Ebene ist. Ist $A = 0$, so sehen wir: Jeder Geraden der

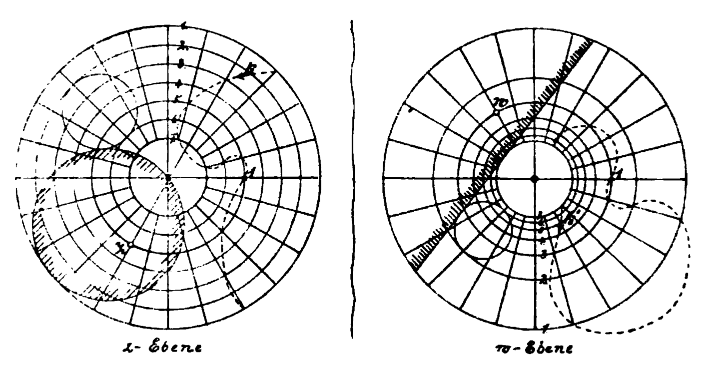


Fig. 87.

xy-Ebene entspricht ein Kreis durch den Anfangspunkt der uv-Ebene. Ist dagegen $D = 0$, so sehen wir: Jedem Kreise durch den Anfangspunkt der xy-Ebene entspricht eine Gerade der uv-Ebene. Insbesondere entsprechen der Geraden $x =$ konst. und $y =$ konst. bei der konformen Abbildung die Kreise

$$u^2 + v^2 = \text{konst.}\, u \quad \text{und} \quad u^2 + v^2 = \text{konst.}\, v$$

der uv-Ebene, d. h. diejenigen Kreise, die von der v- bzw. u-Achse im Anfangspunkte berührt werden.

In Fig. 87 sind zwei einander entsprechende Gebiete beider Ebenen veranschaulicht. Verfolgt man in der linken Figur irgend eine Kurve k, so kann man leicht in der rechten Figur ihr Bild k' Punkt für Punkt ermitteln.

§ 3. Integration im komplexen Bereiche.

629. Definition des Integrals. Es sei $f(z)$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$. Vorläufig bedürfen wir noch nicht der besonderen Voraussetzung, daß $f(z)$ eine monogene Funktion sei. Es genügt vielmehr, anzunehmen, daß $f(z)$ innerhalb eines gewissen Bereiches der z-Ebene eine *stetige* Funktion von z sei, vgl. Nr. 365 und Nr. 367. Ferner sei k ein von z_0 bis Z erstreckter *Integrationsweg*, der innerhalb des Bereiches verläuft und denjenigen Anforderungen genügt, die wir in Nr. 617 an einen solchen Weg stellten.

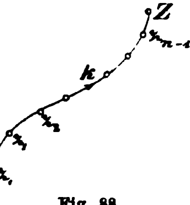


Fig. 88.

Wir schalten längs k zwischen z_0 und Z beliebig viele Stellen $z_1, z_2, \dots z_{n-1}$ ein, siehe Fig. 88. Für jede dieser Stellen hat $f(z)$ einen bestimmten Wert. Alsdann bilden wir gerade so wie in Nr. 404 die Summe:

(1) $J = f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \cdots + f(z_{n-1})(Z - z_{n-1})$

und fragen, ob sie einen bestimmten endlichen Grenzwert hat, falls die Anzahl der eingeschalteten Punkte längs der Kurve k ohne Ende so vermehrt wird, daß *alle* Differenzen $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1, \dots Z - z_{n-1}$ nach Null streben und demgemäß die Anzahl n dieser Differenzen über jede Zahl wächst.

Aber im Unterschiede von den Betrachtungen in § 2 des 1. Kap. ist hier zu beachten, daß $f(z)$ ebenso wie z eine komplexe Größe ist. Es sei:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

und

$$z_0 = x_0 + iy_0,\ z_1 = x_1 + iy_1,\ \dots\ z_{n-1} = x_{n-1} + iy_{n-1},\ Z = X + iY.$$

Der $(l+1)^{\text{te}}$ Summand von J hat nun den Wert

$$f(z_l)(z_{l+1} - z_l) = [u(x_l, y_l) + iv(x_l, y_l)][(x_{l+1} - x_l) + i(y_{l+1} - y_l)].$$

Multiplizieren wir dies aus und trennen wir dadurch das Reelle ab, so ergibt sich, wenn wir noch zur Vereinfachung $u(x_l, y_l)$ und $v(x_l, y_l)$ mit u_l und v_l bezeichnen: Die Summe J läßt sich auf die Form

(2) $$J = P + iQ$$

bringen, wo P und Q die *reellen* Summen sind:

$$P = \sum_0^{n-1} i [u_i(x_{i+1} - x_i) - v_i(y_{i+1} - y_i)],$$

$$Q = \sum_0^{n-1} i [u_i(y_{i+1} - y_i) + v_i(x_{i+1} - x_i)].$$

Natürlich sind dabei unter x_n und y_n die Endwerte X, Y zu verstehen. Wenn wir nun

$$U = u(x, y), \qquad V = -v(x, y)$$

setzen, so hat die Summe P genau die Form der Summe J in Nr. 615, und dasselbe gilt von der Summe Q, wenn wir

$$U = v(x, y), \qquad V = u(x, y)$$

setzen. Nach Satz 8, Nr. 616, der hinsichtlich der Natur des Integrationsweges in Nr. 617 verallgemeinert wurde, folgt also, daß die Grenzwerte von P und Q die reellen Kurvenintegrale sind:

$$\lim P = \int_k (u\,dx - v\,dy), \qquad \lim Q = \int_k (v\,dx + u\,dy).$$

Mit Rücksicht auf (2) ergibt sich folglich

Satz 8: Ist k ein von der Stelle z_0 nach der Stelle Z gehender Integrationsweg innerhalb des Variabilitätsbereiches einer stetigen Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ und werden längs k zwischen z_0 und Z der Reihe nach beliebig viele Stellen z_1, z_2, ... z_{n-1} eingeschaltet, so hat die Summe

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \cdots + f(z_{n-1})(Z - z_{n-1}),$$

falls alle Differenzen $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, ... $Z - z_{n-1}$ nach Null streben und demnach ihre Anzahl n über jede Zahl wächst, den Grenzwert

$$\int_k (u\,dx - v\,dy) + i \int_k (v\,dx + u\,dy).$$

Hierin bedeuten u und v diejenigen stetigen Funktionen von x und y, die durch die Zerlegung

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

hervorgehen.

Wie wir schon erwähnten, ist die betrachtete Summe J und die sich daran anknüpfende Untersuchung die naturgemäße Verallgemeinerung der in Nr. 404 eingeführten Summe J und der damals angestellten Untersuchung, so daß es nahe liegt, den gefundenen Grenzwert als das *bestimmte Integral von* $f(z)$ *längs* k zu bezeichnen. Dann haben wir:

$$(3) \qquad \int_k f(z)dz = \int_k (u\,dx - v\,dy) + i\int_k (v\,dx + u\,dy).$$

Die Bezeichnung mit $\int f(z)dz$ ist erlaubt, weil wir bisher noch gar nicht Integrale im komplexen Bereiche definiert haben und weil sich das neue Symbol im reellen Falle auf das alte Symbol $\int f(x)dx$ reduziert.

Übrigens läßt sich die Zerlegung des Integrals in der Form (3) sofort gewinnen, wenn man die Multiplikation ausführt:

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + i\,dy) = u\,dx - v\,dy + i(v\,dx + u\,dy)$$

und alsdann die Integralzeichen einsetzt.

Aus der Definition des Integrals als Grenzwertes einer Summe ergeben sich sofort die folgenden Sätze entsprechend den Sätzen 9 und 10 von Nr. 617:

Satz 9: Das längs eines Integrationsweges k von z_0 bis Z erstreckte Integral einer stetigen Funktion $f(z)$ ist entgegengesetzt gleich dem längs desselben Weges k, jedoch im umgekehrten Sinne, nämlich von Z bis z_0, erstreckten Integral derselben Funktion.

Satz 10: Besteht der Integrationsweg k des Integrals einer stetigen Funktion $f(z)$ aus mehreren Teilen $k_1, k_2, \cdots$, so ist das Integral gleich der Summe der auf die einzelnen Teile $k_1, k_2, \cdots$ bezüglichen Integrale derselben Funktion.

630. Mittelwertsatz. Es sei G der größte und K der kleinste Wert, den der absolute Betrag von $f(z)$ längs des Integrationsweges k erreicht. Aus Satz 2, Nr. 4, folgt alsdann, daß der absolute Betrag der in voriger Nummer betrachteten Summe J zwischen

$$K\sum_0^{n-1} |z_{i+1} - z_i| \quad \text{und} \quad G\sum_0^{n-1} |z_{i+1} - z_i|$$

liegt. Nach Nr. 356 aber ist $|z_{i+1} - z_i|$ die positiv gemessene Länge σ_{i+1} der Strecke von der Stelle z_i nach der Stelle z_{i+1}. Also kommt:

$$K(\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n) \leqq |J| \leqq G(\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n).$$

Nach Nr. 543 ist der Grenzwert der Summe aller σ gleich der positiv gemessenen Länge s der Kurve k von z_0 bis Z, weil der Integrationsweg k nach Nr. 617 aus lauter Teilen besteht, die den Voraussetzungen in Nr. 543 genügen. Also folgt:

Satz 11: Ist k ein Integrationsweg im Bereiche der stetigen Funktion $f(z)$ und s seine positiv gemessene Bogenlänge, ist ferner K bzw. G der kleinste bzw. größte Wert, den der absolute Betrag von $f(z)$ längs der Kurve k erreicht, so ist

$$Ks \leqq \left|\int_k f(z)\,dz\right| \leqq Gs.$$

An einer gewissen Stelle z_1 von k hat also $f(z)$ gerade einen solchen absoluten Betrag, für den

$$(1) \qquad \left|\int_k f(z)\,dz\right| = |f(z_1)|\, s$$

ist. Wenn nun ferner $f(z_1)$ als komplexe Zahl die Amplitude ω hat, so ist

$$(2) \qquad f(z_1) = |f(z_1)|\,(\cos\omega + i\sin\omega),$$

nach Nr. 355. Ferner hat auch das Integral

$$\int_k f(z)\,dz$$

als komplexe Größe eine gewisse Amplitude φ, d. h. es ist

$$\int_k f(z)\,dz = \left|\int_k f(z)\,dz\right|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Alsdann folgt aus (1) und (2):

$$\int_k f(z)\,dz = |f(z_1)|\, s\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = f(z_1)\, s\, \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\omega + i\sin\omega}$$
$$= f(z_1)\, s\,[\cos(\varphi - \omega) + i\sin(\varphi - \omega)] = f(z_1)\, s\, e^{i(\varphi - \omega)},$$

nach Nr. 373. Bezeichnen wir $\varphi - \omega$ mit ϑ, so folgt:

Satz 12 (Mittelwertsatz): Ist k ein Integrationsweg im Bereiche einer stetigen Funktion $f(z)$ und s seine positiv gemessene Bogenlänge, so gibt es eine Stelle z_1 auf k und eine reelle Größe ϑ derart, daß die Gleichung gilt:

$$\int_k f(z)\,dz = e^{i\vartheta} f(z_1)\,s.$$

631. Integrale von monogenen Funktionen. Bisher verstanden wir unter $f(z)$ irgend eine stetige Funktion der komplexen Größe $z = x + iy$. Von jetzt an wollen wir annehmen, daß $f(z)$ insbesondere eine *monogene Funktion* sei. Ist wieder

$$f(z) = u + iv,$$

so bestehen alsdann die Cauchy-Riemannschen Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

die nach Satz 1, Nr. 609, besagen, daß

$$v\,dx + u\,dy \quad \text{und} \quad u\,dx - v\,dy$$

vollständige Differentiale sind. Das Integral (vgl. (3) in Nr. 629):

$$(1) \qquad \int_k f(z)\,dz = \int_k (u\,dx - v\,dy) + i\int_k (v\,dx + u\,dy)$$

ist also jetzt zurückgeführt auf zwei reelle Integrale über vollständige Differentiale. Hieraus ist nach Satz 12, Nr. 619, ein sehr wichtiger Schluß zu ziehen; es geht nämlich der Satz hervor:

Satz 13: Ist $f(z)$ eine monogene Funktion von z und gehen in ihrem Bereiche von der Stelle z_0 nach der Stelle Z zwei Integrationswege k_1 und k_2 derart, daß sie keine Stelle einschließen, die nicht dem Bereiche der Funktion angehört, so ist das längs k_1 von z_0 bis Z erstreckte Integral der Funktion $f(z)$ gerade so groß wie das längs k_2 erstreckte:

$$\int_{k_1} f(z)\,dz = \int_{k_2} f(z)\,dz.$$

Ziehen wir im Bereiche von $f(z)$ einen *geschlossenen* Integrationsweg $\varkappa$, der nur solche Stellen einschließt, die dem Bereiche angehören, so können wir z_0 und Z irgendwie auf $\varkappa$ wählen und die beiden Teile des Weges von z_0 bis Z mit k_1 und k_2 bezeichnen. Die zu k_1 und k_2 gehörigen Integrale stimmen nach dem letzten Satze überein. Wenn wir nun von z_0 über Z nach z_0 zurück integrieren, indem wir die ganze geschlossene Linie $\varkappa$ durchlaufen, so wird einer der beiden Wege k_1 und k_2 in entgegengesetztem Sinne wie vorher durchlaufen, so daß sich nach Satz 9, Nr. 629, auch der entgegengesetzte Integralwert ergibt. Demnach heben sich dann beide Integrale auf. Der Satz 13 kann also auch so ausgesprochen werden:

Satz 14: Ist $f(z)$ eine monogene Funktion von z und ist $\varkappa$ ein solcher geschlossener Integrationsweg, der ihrem Bereiche angehört und auch nur solche Stellen einschließt, die im Bereiche liegen, so ist das längs $\varkappa$ erstreckte Integral von $f(z)$ gleich Null:

$$\int_{\varkappa} f(z)\,dz = 0.$$

Vgl. hierbei auch Satz 11 in Nr. 618.

Beispiel: Wir wollen die monogene Funktion

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

integrieren, deren Bereich die ganze Ebene ist. Hier haben wir $u = x^2 - y^2$ und $v = 2xy$, so daß die Formel (1) für irgend einen Integrationsweg k von z_0 nach Z gibt:

$$(2)\quad \int_{z_0}^{Z} z^2 dz = \int_{k} [(x^2 - y^2)dx - 2xy\,dy] + i\int_{k} [2xy\,dx + (x^2 - y^2)dy].$$

Auf der linken Seite dürfen wir nämlich statt des Integrationsweges k seine Grenzen z_0 und Z angeben, weil eben *alle* Wege von z_0 bis Z nach Satz 13 denselben Wert für das Integral liefern; und daß dies der Fall ist, wollen wir nun dadurch bestätigen, daß wir irgend einen Integrationsweg

$$(3)\qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

annehmen, wobei x und y für $t = 0$ gleich x_0 und y_0 und für $t = T$ gleich X und Y seien, so daß der Weg in der Tat von

631]

der Stelle $z_0 = x_0 + iy_0$ nach der Stelle $Z = X + iY$ geht. Es ist nach (3)

$$dx = \varphi' dt, \qquad dy = \psi' dt$$

zu setzen, so daß (2) liefert:

$$\int_{z_0}^{Z} z^2 dz = \int_0^T [(\varphi^2 - \psi^2)\varphi' - 2\varphi\psi\psi']dt + i\int_0^T [2\varphi\psi\varphi' + (\varphi^2 - \psi^2)\psi']dt.$$

Die Integranden auf der rechten Seite sind die Differentialquotienten von

$$\tfrac{1}{3}(\varphi^3 - 3\varphi\psi^2) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{3}(3\varphi^2\psi - \psi^3),$$

die für $t = 0$ gleich

$$\tfrac{1}{3}(x_0^3 - 3x_0y_0^2) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{3}(3x_0^2y_0 - y_0^3)$$

und für $t = T$ gleich

$$\tfrac{1}{3}(X^3 - 3XY^2) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{3}(3X^2Y - Y^3)$$

sind, so daß kommt:

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{Z} z^2 dz &= \tfrac{1}{3}(X^3 - 3XY^2) - \tfrac{1}{3}(x_0^3 - 3x_0y_0^2) \\ &\quad + i[\tfrac{1}{3}(3X^2Y - Y^3) - \tfrac{1}{3}(3x_0^2y_0 - y_0^3)] \\ &= \tfrac{1}{3}(X + iY)^3 - \tfrac{1}{3}(x_0 + iy_0)^3,\end{aligned}$$

also, wie zu erwarten war:

$$\int_{z_0}^{Z} z^2 dz = \tfrac{1}{3}(Z^3 - z_0^3).$$

632. Einfach zusammenhängender Bereich. Sind z_0 und Z Stellen im Bereiche einer monogenen Funktion $f(z)$, so daß wir $f(z)$ längs eines von z_0 nach Z gehenden Integrationsweges k_1 innerhalb des Bereiches integrieren können, so gehört zur Stelle Z ein gewisser Wert des Integrals

(1) $$\int_{k_1} f(z)\,dz.$$

Ist von z_0 nach Z irgend ein anderer Integrationsweg k_2 innerhalb des Bereiches gezogen, so wird jener Wert mit

(2) $$\int_{k_2} f(z)\,dz$$

nach Satz 13 der letzten Nummer sicher übereinstimmen, falls zwischen k_1 und k_2 nur solche Stellen liegen, die dem Bereiche angehören. Ist dies nicht der Fall, so können wir auch nicht sicher sein, daß die Integrale (1) und (2) denselben Wert haben.

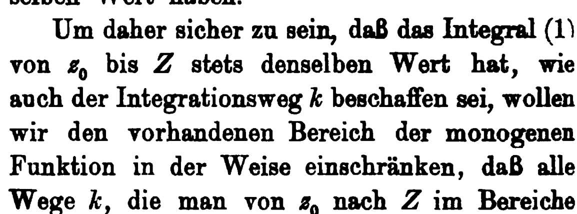


Fig. 89.

Um daher sicher zu sein, daß das Integral (1) von z_0 bis Z stets denselben Wert hat, wie auch der Integrationsweg k beschaffen sei, wollen wir den vorhandenen Bereich der monogenen Funktion in der Weise einschränken, daß alle Wege k, die man von z_0 nach Z im Bereiche legen kann, nur solche Stellen einschließen, die ebenfalls dem Bereiche angehören, so daß dann der Satz 13 anwendbar ist.

Hat z. B. der Bereich der monogenen Funktion $f(z)$ die in Fig. 89 angegebene ringförmige Gestalt, so werden zunächst Wege k_1 und k_2 von z_0 nach Z möglich sein, zwischen denen ein Gebiet liegt, das dem Bereiche nicht angehört. Wenn wir jedoch hier die äußere und innere Grenze des Bereiches durch irgend eine Linie a verbinden und nun vorschreiben, daß kein Integrationsweg diese Strecke überschreiten darf, so sind von z_0 nach Z nur noch solche Wege möglich, zwischen denen ausschließlich Stellen des Bereiches liegen. Hat der Bereich etwa die noch kompliziertere Gestalt wie in Fig. 90, so genügt es, zwei solche Grenzlinien a und b neu einzuführen, um dieselbe Wirkung zu erzielen.

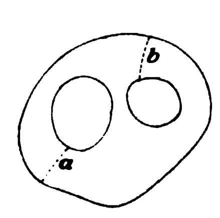


Fig. 90.

Jeder Bereich läßt sich so durch Hinzufügung passender und in ziemlich hohem Maße noch willkürlich zu wählender neuer Grenzlinien auf einen solchen Bereich zurückführen, den wir *einfach zusammenhängend* nennen, d. h. in dem nur noch solche Wege von einer Stelle nach einer anderen Stelle möglich sind, zwischen denen nur Stellen des Bereiches liegen.

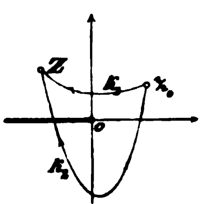


Fig. 91.

1. Beispiel: Bei der in Nr. 628 betrachteten monogenen Funktion $1 : z$ besteht der Bereich aus der ganzen z-Ebene,

abgesehen von der Stelle $z = 0$. Da wir von z_0 nach Z auf zwei Wegen k_1 und k_2 gelangen können, die diese Stelle einschließen, siehe Fig. 91, so ist der Bereich nicht einfach zusammenhängend. Schreiben wir aber noch vor, daß kein Weg die negative x-Achse überschreiten soll, so wird der Bereich einfach zusammenhängend, indem alsdann der Weg k_2 unmöglich wird.

2. Beispiel: Bei der monogenen Funktion

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1+x^2-y^2+2ixy} = \frac{1+x^2-y^2-2ixy}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

ist:

$$u = \frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}, \qquad v = \frac{-2xy}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}.$$

Es werden u und v und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung nur da unstetig, wo der gemeinsame Nenner von u und v verschwindet. Da aber x und y reell sind, tritt dies nur für $x = 0$, $y = \pm 1$, also nur an den Stellen $z = \pm i$ ein. Der Bereich der Funktion $1 : (1 + z^2)$ ist demnach die ganze Ebene, abgesehen von den beiden Stellen $z = \pm i$, siehe Fig. 92. Aber dieser Bereich ist nicht einfach zusammenhängend, denn die in der Figur eingezeichneten Wege k, k', k'', k''' von z_0 nach Z schließen paarweise wenigstens eine der beiden Unstetigkeitsstellen ein.

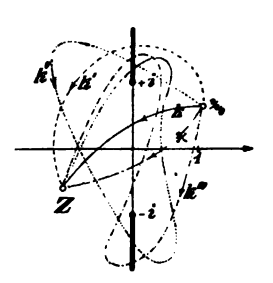


Fig. 92.

Der Bereich läßt sich jedoch in einen einfach zusammenhängenden verwandeln, indem man etwa von der Stelle $+i$ aus die positive y-Achse ins unbegrenzte zieht und von der Stelle $-i$ aus die negative y-Achse und vorschreibt, daß kein Integrationsweg diese beiden Linien überschreiten darf. Alsdann noch statthafte Wege, wie k und $\varkappa$, schließen nunmehr keine Unstetigkeitsstelle mehr ein.

633. Das Integral in einem einfach zusammenhängenden Bereiche als Funktion seiner oberen Grenze. Es sei $f(z)$ eine monogene Funktion; ihr Bereich sei entweder an sich einfach zusammenhängend oder jedenfalls

durch geeignete Vorschriften auf einen solchen reduziert worden. Verbleiben wir nun im folgenden stets innerhalb dieses einfach zusammenhängenden Bereiches, so können wir das von einer Stelle z_0 nach einer Stelle Z hin erstreckte Integral längs irgend eines Integrationsweges mit

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

bezeichnen, denn *alle* erlaubten Integrationswege von z_0 nach Z liefern jetzt nach Satz 13 von Nr. 631 denselben Wert des Integrals.

Wählen wir z_0 bestimmt, dagegen Z veränderlich, so gehört zu jedem Werte von Z innerhalb des Bereiches ein und nur ein Wert des Integrals. Nach der Definition in Nr. 365 ist das Integral folglich eine *Funktion* seiner oberen Grenze Z. Wir wollen diese Funktion mit $F(Z)$ bezeichnen:

$$F(Z) = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $F(Z)$ stetig ist. Bedeutet nämlich $Z + \varDelta Z$ irgend eine andere Stelle des Bereiches, so ist

$$F(Z + \varDelta Z) = \int_{z_0}^{Z+\varDelta Z} f(z)\,dz,$$

also nach Satz 10, Nr. 629, der Zuwachs, den $F(Z)$ erfährt, wenn Z um $\varDelta Z$ wächst, dieser:

$$\varDelta F = \int_{Z}^{Z+\varDelta Z} f(z)\,dz.$$

Dabei ist es gleichgültig, welcher Integrationsweg von Z nach $Z + \varDelta Z$ gezogen wird, so daß wir z. B, wenn $Z + \varDelta Z$ hinreichend nahe bei Z liegt, die geradlinige Strecke von Z nach $Z + \varDelta Z$ als Weg annehmen dürfen. Nach Satz 12 von Nr. 630 gibt es auf diesem Integrationswege, dessen Länge $\varDelta s$ sei, eine Stelle z_1 derart, daß

$$|\varDelta F| = |f(z_1)|\,\varDelta s$$

wird. Für $\lim \Delta Z = 0$ ist $\lim \Delta s = 0$ und $\lim f(z_1) = f(Z)$, also $\lim |\Delta F|$ gleich Null, d. h.

$$\lim_{\Delta Z = 0} F(Z + \Delta Z) = F(Z).$$

Dies besagt aber nach Nr. 367, *daß $F(Z)$ eine stetige Funktion von Z ist.*

Wir behaupten weiter, daß diese Funktion eine *Ableitung* hat. Wenn nämlich die monogene Funktion

$$f(z) = u + iv$$

ist, so zerlegen wir $F(Z)$ ebenfalls in der Form $U + iV$. Es ist nach (1) in Nr. 631:

$$U = \int_k (u dx - v dy), \qquad V = \int_k (v dx + u dy),$$

wobei k irgend einen Integrationsweg von z_0 nach Z bedeutet. Dies sind reelle Integrale über vollständige Differentiale, wie in Nr. 631 betont wurde, d. h. es sind, wenn $Z = X + iY$ gesetzt wird, die Differentiale von U und V:

$$dU = u(X, Y)dX - v(X, Y)dY,$$
$$dV = v(X, Y)dX + u(X, Y)dY,$$

also:

$$dF = dU + idV$$
$$= u(X, Y)(dX + idY) + iv(X, Y)(dX + idY)$$

oder, da $dX + idY = dZ$ ist:

$$\frac{dF}{dZ} = u(X, Y) + iv(X, Y) = f(Z).$$

Die Funktion $F(Z)$ hat somit die Ableitung $f(Z)$. Hieraus aber folgt nach Satz 3, Nr. 623:

Satz 15: Ist z_0 eine bestimmte und Z eine beliebige Stelle eines einfach zusammenhängenden Bereiches der monogenen Funktion $f(z)$, so ist das von z_0 bis Z erstreckte Integral von $f(z)$ in demselben Bereiche unabhängig vom Integrationswege und stellt eine in dem Bereiche monogene Funktion von Z vor, deren Ableitung gleich $f(Z)$ ist.

634. Die Integrale von e^z, $\sin z$ und $\cos z$. Die Funktion e^z ist in der ganzen Ebene monogen (vgl. Nr. 373).

Als Integrationsweg von z_0 nach Z können wir daher eine besonders bequeme Linie wählen, etwa die in Fig. 93 angegebene, die aus zwei Strecken a und b besteht. Wenn, wie immer, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ und $Z = X + iY$ gesetzt wird, so ist y längs a konstant, nämlich gleich y_0, also $dy = 0$, während x von x_0 bis X geht. Längs b dagegen ist $x = X$ und $dx = 0$, während y von y_0 bis Y geht. Außerdem ist e^z nach Nr. 373 gleich $e^x(\cos y + i \sin y)$, also $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$, so daß die Formel (1), Nr. 631, gibt:

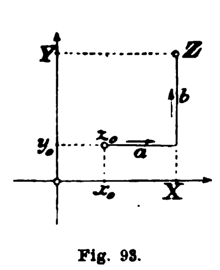


Fig. 93.

$$\int_a e^z dz = \int_{x_0}^{X} e^x \cos y_0 dx + i \int_{x_0}^{X} e^x \sin y_0 dx = (e^X - e^{x_0})(\cos y_0 + i \sin y_0),$$

$$\int_b e^z dz = \int_{y_0}^{Y} - e^X \sin y dy + i \int_{y_0}^{Y} e^X \cos y dy = e^X[\cos Y - \cos y_0 + i(\sin Y - \sin y_0)],$$

woraus durch Addition sofort der vorauszusehende Wert folgt:

$$\int_{z_0}^{Z} e^z dz = e^Z - e^{z_0}.$$

Analog ergibt sich für jeden Integrationsweg:

$$\int_{z_0}^{Z} \sin z dz = \cos z_0 - \cos Z, \qquad \int_{z_0}^{Z} \cos z dz = \sin Z - \sin z_0.$$

635. Das Integral von $1 : z^n$. Ist n eine ganze positive Zahl, so ist die Funktion z^n überall monogen, so daß sich leicht ergibt:

$$\int_{z_0}^{Z} z^n dz = \frac{Z^{n+1} - z_0^{n+1}}{n+1}.$$

Dagegen ist die Funktion $1 : z^n$ in der ganzen Ebene, *abgesehen von der Stelle* $z = 0$, monogen. Ihr Bereich wird einfach zusammenhängend, wenn wir z. B. die negative x-Achse als Grenze einführen, die nicht überschritten werden darf.

Alsdann ist der in Fig. 94 angegebene Integrationsweg von z_0 nach Z erlaubt, der aus der Strecke a und dem Kreisbogen b besteht. Ist $z = \varrho(\cos\omega + i\sin\omega)$, siehe Nr. 355, so ist nach der Moivreschen Formel, Nr. 358:

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{\varrho^n(\cos n\omega + i\sin n\omega)} = \frac{\cos n\omega - i\sin n\omega}{\varrho^n},$$

d. h.

$$u = \frac{\cos n\omega}{\varrho^n}, \qquad v = \frac{-\sin n\omega}{\varrho^n}.$$

Ist ferner

(1) $\quad z_0 = \varrho_0(\cos\omega_0 + i\sin\omega_0), \qquad Z = \mathrm{P}(\cos\Omega + i\sin\Omega),$

so folgt, da z die rechtwinkligen Koordinaten $x = \varrho\cos\omega$, $y = \varrho\sin\omega$ hat, daß für die Stellen z auf a insbesondere ϱ von ϱ_0 bis P veränderlich, aber $\omega = \omega_0$, $d\omega = 0$, also $dx = \cos\omega_0\, d\varrho$ und $dy = \sin\omega_0\, d\varrho$ ist. Die Formel (1) von Nr. 631 gibt daher:

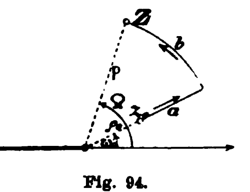


Fig. 94.

(2) $$\int_a \frac{dz}{z^n} = \int_{\varrho_0}^{\mathrm{P}} \frac{\cos(n-1)\omega_0}{\varrho^n}\, d\varrho - i\int_{\varrho_0}^{\mathrm{P}} \frac{\sin(n-1)\omega_0}{\varrho^n}\, d\varrho.$$

Längs b dagegen ist $\varrho = \mathrm{P}$, $d\varrho = 0$, also $dx = -\mathrm{P}\sin\omega\, d\omega$, $dy = \mathrm{P}\cos\omega\, d\omega$, während ω von ω_0 bis Ω geht. Somit kommt:

(3) $$\int_b \frac{dz}{z^n} = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{\sin(n-1)\omega}{\mathrm{P}^{n-1}}\, d\omega + i\int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{\cos(n-1)\omega}{\mathrm{P}^{n-1}}\, d\omega.$$

Ist $n \neq 1$, so liefert die Ausführung der Integrationen

$$\int_a \frac{dz}{z^n} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{\varrho_0^{n-1}} - \frac{1}{\mathrm{P}^{n-1}}\right][\cos(n-1)\omega_0 - i\sin(n-1)\omega_0],$$

$$\int_b \frac{dz}{z^n} = \frac{1}{(n-1)\mathrm{P}^{n-1}}[\cos(n-1)\omega_0 - i\sin(n-1)\omega_0 - \cos(n-1)\Omega + i\sin(n-1)\Omega],$$

und Addition beider Formeln gibt nach (1), wie zu erwarten war:

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{z^n} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{Z^{n-1}} - \frac{1}{z_0^{n-1}}\right).$$

[635

636. Das Integral von $1:z$. Wir nehmen jetzt insbesondere $n=1$ an; dann liefern die Formeln (2) und (3) der letzten Nummer:

$$\int_a \frac{dz}{z} = \int_{\varrho_0}^{\mathsf{P}} \frac{d\varrho}{\varrho} = \ln\frac{\mathsf{P}}{\varrho_0}, \qquad \int_b \frac{dz}{z} = i\int_{\omega_0}^{\Omega} d\omega = i(\Omega-\omega_0),$$

woraus durch Addition folgt:

$$(1) \qquad \int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{z} = \ln\frac{\mathsf{P}}{\varrho_0} + i(\Omega-\omega_0) = \ln\left|\frac{Z}{z_0}\right| + i(\Omega-\omega_0).$$

Die Amplituden Ω und ω_0 von Z und z_0 sind dabei zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegen. Das Integral (1) hat die Ableitung $1:Z$, nach Satz 15, Nr. 633; wir werden es daher als den *Logarithmus* im komplexen Bereiche bezeichnen und zwar als den von $Z:z_0$, da es gleich Null für $Z=z_0$ ist:

$$(2) \qquad \ln\frac{Z}{z_0} = \ln\left|\frac{Z}{z_0}\right| + i(\Omega-\omega_0).$$

Rechts steht hier der *reelle* Logarithmus der positiven Zahl $|Z:z_0|$. Insbesondere kommt für $z_0=1$:

$$(3) \qquad \ln Z = \ln|Z| + i\Omega.$$

Dies ist in der Tat nichts anderes als die Formel (2) von Nr. 376; wir haben also hier den *Hauptwert des Logarithmus* vor uns. Er ist überall in der Ebene definiert, abgesehen von der negativen x-Achse, siehe Fig. 94.

637. Das Integral von $1:(z-c)$. Vermöge der Substitution $\bar z = z - c$ führen wir dies Integral auf das vorige zurück. Es kommt dann nach der Formel (1) der letzten Nummer:

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{z-c} = \int_{z_0-c}^{Z-c} \frac{d\bar z}{\bar z} = \ln\left|\frac{Z-c}{z_0-c}\right| + i(\Omega-\omega_0),$$

wo $\Omega-\omega_0$ den Zuwachs der Amplitude von $z-c$ längs des Integrationsweges bedeutet. Ein einfach zusammenhängender Bereich, in dem die Formel für alle Integrations-

wege gilt, ist leicht anzugeben. Es ist nämlich $z = c$ die einzige Stelle, wo $1:(z-c)$ unstetig wird. Wir führen daher als Grenzlinie etwa die von der Stelle c ausgehende Parallele zur negativen x-Achse ein. Aber wir können auch irgend einen anderen von c ausgehenden Strahl als Grenze annehmen, die nicht überschritten werden darf.

638. Das Integral von $1:(1+z^2)$. Weil

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

ist, so sind von dem Bereiche dieser Funktion nur die Stellen $\pm i$ ausgeschlossen. Wir ziehen z. B. von $z = i$ aus die positive und von $z = -i$ aus die negative y-Achse bis ins Endlose wie in Fig. 92, S. 475, und schreiben vor, daß die Integrationswege diese Grenzen nicht überschreiten dürfen. Da die Kurvenintegrale wie die im 1. Kap. behandelten Integrale Grenzwerte von Summen sind, gelten auch hier die Sätze 13 und 15 von Nr. 413 u. 414 über das Integral einer Summe und über die Multiplikation eines Integrals mit einem konstanten Faktor, so daß aus (1) folgt:

$$\text{(2)} \qquad \int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{i}{2}\left(\int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{z+i} - \int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{z-i}\right).$$

Aber nach voriger Nummer ist:

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{z-i} = \ln\left|\frac{Z-i}{z_0-i}\right| + i(\Omega - \omega_0), \quad \int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{z+i} = \ln\left|\frac{Z+i}{z_0+i}\right| + i(\Omega' - \omega_0'),$$

wenn Ω, ω_0, Ω', ω_0' die Amplituden von $Z-i$, z_0-i, $Z+i$, z_0+i vorstellen. Setzen wir diese Werte in (2) ein, so kommt:

$$\text{(3)} \quad \int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{i}{2}\ln\left|\frac{(Z+i)(z_0-i)}{(Z-i)(z_0+i)}\right| + \tfrac{1}{2}(\Omega - \omega_0 - \Omega' + \omega_0').$$

Wir werden das Integral, da es nach Satz 15, Nr. 633, die Ableitung $1:(1+Z^2)$ hat, mit arc tg Z bezeichnen, sobald es gerade so wie im reellen Gebiete für die Stelle $Z = 0$ verschwindet. Wir wählen also $z_0 = 0$, d. h. ω_0 und ω_0' als Am-

plituden von $-i$ und $+i$ gleich $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, so daß kommt:

$$(4)\qquad \operatorname{arc\,tg} Z = \int_0^Z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{i}{2}\ln\left|\frac{Z+i}{Z-i}\right| + \frac{1}{2}(\Omega - \Omega' + \pi).$$

Es muß jedoch nun noch gezeigt werden, daß die Formel (1) von Nr. 377 auch aus (4) abgeleitet werden kann. Dies geschieht so: Sind P und P' die absoluten Beträge von $Z-i$ und $Z+i$, so ist

$$\frac{1+iZ}{1-iZ} = -\frac{Z-i}{Z+i} = \frac{\mathsf{P}}{\mathsf{P}'}[\cos(\Omega-\Omega'+\pi)+i\sin(\Omega-\Omega'+\pi)].$$

Also folgt aus (3) in Nr. 636 für den Hauptwert des Logarithmus:

$$\ln\frac{1+iZ}{1-iZ} = \ln\frac{\mathsf{P}}{\mathsf{P}'} + i(\Omega - \Omega' + \pi),$$

daher hieraus und aus (4), weil $\mathsf{P}' : \mathsf{P}$ der absolute Betrag von $(Z+i):(Z-i)$ ist:

$$(5)\qquad \operatorname{arc\,tg} Z = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iZ}{1-iZ}.$$

Hiermit ist die Formel (1) von Nr. 377 bestätigt.

§ 4. Der Cauchysche Satz und seine Anwendungen.

639. Der Fundamentalsatz von Cauchy. Es sei $f(z)$ innerhalb eines Bereiches eine monogene Funktion von z. Längs des gesamten Randes des Bereiches ziehen wir einen Integrationsweg k, so daß er noch vollständig dem Bereiche angehört. Dieser Weg k wird, falls der Bereich nicht einfach zusammenhängt, in mehrere Teile $k_1, k_2, \cdots$ zerfallen, siehe Fig. 95. Ferner sei c irgend eine bestimmt gewählte Stelle innerhalb des Bereiches, d. h. des von k begrenzten und in der Figur schraffierten Gebietes. Wir betrachten nun die Funktion

$$(1)\qquad \varphi(z) = \frac{f(z)}{z-c},$$

die nach Satz 4, Nr. 624, überall im Bereiche, *abgesehen von der Stelle* $z = c$, monogen ist. An dieser Stelle wird $\varphi(z)$ mit $1:(z-c)$ in der ersten Ordnung unendlich groß. Wenn wir

aber die Stelle c durch einen um c als Mittelpunkt gelegten Kreis $\varkappa$ mit beliebig kleinem Radius r ausschließen, so ist $\varphi(z)$ monogen in dem von k und $\varkappa$ begrenzten, also dem in der Figur schraffierten Gebiete, *abgesehen vom Innern von* $\varkappa$.

Wir ziehen nun Verbindungslinien $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ zwischen den einzelnen Teilen $k_1, k_2, \cdots$ des Weges k und dem Umfange $\varkappa$ des Kreises so, daß jede dieser Linien mit einer der andern zusammenhängt, und verfolgen den in Fig. 96 gekennzeichneten Weg. Hier haben wir der Deutlichkeit halber die Verbindungslinien $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ doppelt gezeichnet und auf $k_1, k_2, \cdots$ und $\varkappa$ kleine Lücken gelassen. Man sieht, daß der Weg geschlossen ist und einen Bereich umgrenzt, der nur solche

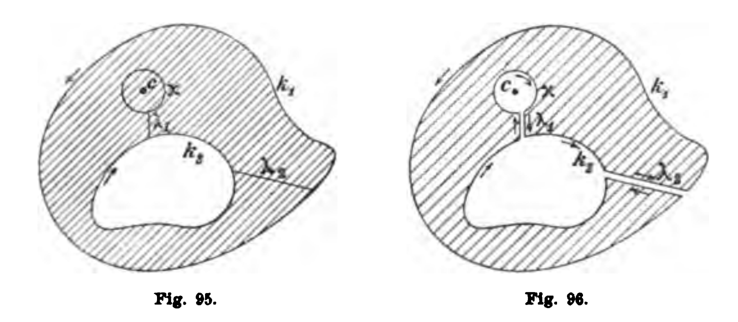


Fig. 95. Fig. 96.

Stellen enthält, in denen $\varphi(z)$ monogen ist. Folglich ist das Integral von $\varphi(z)$ längs dieses ganzen Weges gleich Null, nach Satz 14, Nr. 631.

Dies Integral ist aber nach Satz 10, Nr. 629, gleich der Summe Σ derjenigen Integrale, die sich auf die einzelnen Teile des ganzen Weges beziehen. Die Wegstücke $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ werden je zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen, so daß sich die auf sie bezüglichen Integrale nach Satz 9, Nr. 629, gegenseitig in der Summe Σ fortheben. Wenn wir ferner festsetzen, daß der Index k beim Integrale von $\varphi(z)$ bedeuten soll, daß der Weg k so durchlaufen werden soll, daß dabei das von k umschlossene Gebiet stets linkerhand liegt, so bemerken wir, daß

$$\int\limits_k \varphi(z)\,dz$$

das auf alle Teile $k_1, k_2, \cdots$ von k bezügliche Integral ist, das in Σ auftritt. Der äußere Rand k_1 nämlich wird nach der Fig. 96 positiv durchlaufen, während k_2 negativen Sinn hat, was aber gerade der gemachten Festsetzung entspricht, daß der Bereich, den k umschließt, stets linkerhand liegen soll. Deuten wir ferner durch den Index $\varkappa$ beim Integrale an, daß der Kreis $\varkappa$ in *positivem* Sinne zu durchlaufen ist, so ist der auf $\varkappa$ bezügliche Teil der Summe Σ mit

$$-\int\limits_{\varkappa} \varphi(z)\,dz$$

zu bezeichnen, denn nach Fig. 96 wird der Kreis in negativem Sinne umlaufen. Da nun Σ, wie wir vorher sahen, gleich Null ist, so kommt also:

$$\int\limits_{k} \varphi(z)\,dz - \int\limits_{\varkappa} \varphi(z)\,dz = 0$$

oder nach (1):

$$(2) \qquad \int\limits_{k} \frac{f(z)}{z-c}\,dz = \int\limits_{\varkappa} \frac{f(z)}{z-c}\,dz.$$

Betrachten wir nun das rechts stehende Integral, dessen Weg der Kreis $\varkappa$ ist, genauer. Wir erhalten alle Stellen z des Kreises in der Formel:

$$(3) \qquad z = c + r(\cos\omega + i\sin\omega),$$

denn wenn wir ω von 0 bis 2π variieren lassen, durchläuft z den Kreis einmal in positivem Sinne. Dabei ist längs des Kreises:

$$dz = r(-\sin\omega + i\cos\omega)\,d\omega = ir(\cos\omega + i\sin\omega)\,d\omega = i(z-c)\,d\omega.$$

Auch in $f(z)$ haben wir uns den Wert (3) eingesetzt zu denken, ehe wir das längs $\varkappa$ erstreckte Integral mit der Veränderlichen ω schreiben. Es kommt:

$$\int\limits_{\varkappa} \frac{f(z)}{z-c}\,dz = \int\limits_{0}^{2\pi} i f(z)\,d\omega.$$

Ist $f(z) = u + iv$, so folgt hieraus weiterhin:

$$(4)\qquad \int_{\varkappa} \frac{f(z)}{z-c}\,dz = -\int_0^{2\pi} v\,d\omega + i\int_0^{2\pi} u\,d\omega,$$

wobei rechts zwei reelle Integrale stehen, denn u und v sind reelle Funktionen von x und y oder also nach (3) von $c + r\cos\omega$ und $r\sin\omega$.

Nun ist $f(z)$ oder $u + iv$ stetig. Ist also eine beliebig kleine Zahl σ vorgelegt, so können wir den Kreisradius r so klein wählen, daß u und v von denjenigen Werten u_0 und v_0, die sie für $z = c$ haben, um weniger als σ abweichen. Alsdann weichen die beiden Integrale um weniger als $2\pi\sigma$ von

$$\int_0^{2\pi} v_0\,d\omega \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} u_0\,d\omega$$

ab, nach Satz 16, Nr. 414. Diese Integrale aber haben, weil u_0 und v_0 Konstanten sind, die Werte $2\pi v_0$ und $2\pi u_0$. Es ist also:

$$\int_0^{2\pi} v\,d\omega = 2\pi v_0 + \vartheta\sigma, \qquad \int_0^{2\pi} u\,d\omega = 2\pi u_0 + \eta\sigma,$$

wobei ϑ *und* η *zwischen* -2π *und* $+2\pi$ *liegen.* Also gibt (4):

$$\int_{\varkappa} \frac{f(z)}{z-c}\,dz = 2i\pi(u_0 + iv_0) + (i\eta - \vartheta)\sigma.$$

Da $u_0 + iv_0 = f(c)$ ist, so liefert die Einsetzung dieses Integralwertes in (2):

$$(5)\qquad \int_k \frac{f(z)}{z-c}\,dz = 2i\pi f(c) + (i\eta - \vartheta)\sigma.$$

Aber σ ist eine vorgegebene beliebig kleine Zahl, von deren Wahl der Radius r des Kreises abhängt, indem mit $\lim\sigma = 0$ auch $\lim r = 0$ ist. Die linke Seite der letzten Formel hat andererseits mit der Größe des Kreisradius r gar nichts zu tun, da sie ein Integral längs k darstellt. Die rechte Seite von (5) muß also für alle beliebig kleinen Werte von σ den-

[639

selben Wert haben, d. h. ihr zweiter Summand ist gleich Null, so daß bleibt:

$$(6) \qquad \int_k \frac{f(z)}{z-c} dz = 2i\pi f(c).$$

Hiermit sind wir zu dem wichtigen Satze von *Cauchy* gelangt:

Satz 16: Wenn eine monogene Funktion $f(z)$ vorliegt und ein Teil ihres Bereiches dadurch herausgegriffen wird, daß man ihn durch einen sich nicht selbst schneidenden Integrationsweg k begrenzt, wobei k sehr wohl in mehrere einzelne geschlossene Linien zerfallen kann, und wenn eine im Innern des so begrenzten Gebietes gelegene Stelle c ausgewählt wird, so ist

$$\frac{1}{2i\pi} \int_k \frac{f(z)}{z-c} dz = f(c),$$

sobald die Integration längs k so stattfindet, daß stets das Gebiet linkerhand von der eingeschlagenen Richtung liegt.

640. Auswertung reeller Integrale mittels des Cauchyschen Satzes.

1. Beispiel: Zum Bereiche der Funktion $f(z) = 1:(1-z)$ gehört die Fläche eines Kreises k um den Mittelpunkt $z = 0$, vorausgesetzt, daß der Radius R des Kreises kleiner als Eins ist. Außerdem wählen wir $c = 0$. Setzen wir alsdann entsprechend der Formel (3) in voriger Nummer längs dieses Kreises $z = R(\cos\omega + i \sin\omega)$, so ist $dz = iz d\omega$ und

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - R\cos\omega - iR\sin\omega} = \frac{1 - R\cos\omega + iR\sin\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2},$$

so daß der Cauchysche Satz, angewandt auf den Kreis k, liefert:

$$\int_0^{2\pi} \frac{i(1 - R\cos\omega) - R\sin\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2} d\omega = 2i\pi,$$

da hier $f(c) = f(0) = 1$ ist. Trennen wir das Reelle ab, so kommt einzeln:

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} \frac{1 - R\cos\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2} d\omega = 2\pi, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{R\sin\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2} d\omega = 0.$$

Die zweite Formel ist auch direkt zu gewinnen, denn das Integral hat für das nur von 0 bis π erstreckte Intervall offenbar den entgegengesetzten Wert wie für das von π bis 2π erstreckte. Die zweite Formel gilt also auch für $R \geqq 1$.

Die erste Formel (1) ist für $R = 1$ nicht mehr richtig, denn dann gibt die direkte Auswertung augenscheinlich den Wert π. Für $R > 1$ ist das erste Integral gleich Null, weil stets

$$\frac{1 - R\cos\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2} = 1 - \frac{1 - \frac{1}{R}\cos\omega}{1 - \frac{2}{R}\cos\omega + \frac{1}{R^2}}$$

ist, woraus sich durch Integration von 0 bis 2π im Falle $R > 1$ der Wert $2\pi - 2\pi = 0$ ergibt, da wir auf das zweite Integral rechts wegen $1 : R < 1$ die gefundene erste Integralformel (1) anwenden dürfen.

2. Beispiel: Es sei $f(z) = e^z$ und die Kurve k ein Kreis um den Mittelpunkt $z = 0$ mit irgend einem Radius m. Ferner sei $c = 0$ gewählt. Jetzt gibt der Cauchysche Satz in entsprechender Weise

$$\int_0^{2\pi} e^{m\cos\omega + im\sin\omega}\,d\omega = 2\pi$$

oder nach Nr. 373, wenn wir überdies das Reelle abtrennen:

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} e^{m\cos\omega}\cos(m\sin\omega)\,d\omega = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} e^{m\cos\omega}\sin(m\sin\omega)\,d\omega = 0.$$

3. Beispiel: Es sei $f(z) = \ln(1 + z)$, wobei wir unter dem Logarithmus seinen Hauptwert (Nr. 376) verstehen. Zum Bereiche gehört hier ein Kreis k um den Punkt $z = 0$ als Mitte, vorausgesetzt, daß sein Radius $\varrho < 1$ ist. Als Stelle c wählen wir wieder die Mitte des Kreises. Ist z gleich $\varrho(\cos\omega + i\sin\omega)$ und $1 + z$ gleich $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so ist

$$1 + \varrho\cos\omega = r\cos\varphi, \qquad \varrho\sin\omega = r\sin\varphi,$$

woraus folgt:

$$r = \sqrt{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\varrho\sin\omega}{1 + \varrho\cos\omega}.$$

[640

Diese Rechnung haben wir schon in Nr. 376 mit andern Bezeichnungen durchgeführt. Hierin ist r positiv; die Amplitude φ liegt zwischen $-\pi$ und $+\pi$, ja man sieht, daß sie zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegen ist, sobald $\varrho < 1$ ist. Nun kommt nach (3) in Nr. 636:

$$\ln(1+z) = \ln[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \ln r + i\varphi.$$

Der Cauchysche Satz gibt demnach:

$$\int_0^{2\pi} (\ln r + i\varphi)\,d\omega = 0,$$

weil hier $f(c) = f(0) = \ln 1 = 0$ ist. Die Formel zerfällt in die beiden einzelnen reellen Gleichungen:

$$(3)\quad \int_0^{2\pi} \ln(1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2)\,d\omega = 0, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varrho\sin\omega}{1+\varrho\cos\omega}\,d\omega = 0.$$

In der letzten Formel ist der Arkus zwischen $-\pi$ und $+\pi$ zu nehmen.

641. Unendliche Reihen von monogenen Funktionen. Da wir einige besonders wichtige Anwendungen des Cauchyschen Fundamentalsatzes machen wollen, ist es unerläßlich, die Betrachtungen des § 5, 1. Kap., über die Differentiation und Integration unendlicher Reihen auch auf das komplexe Gebiet auszudehnen.

Es sei $w_0, w_1, w_2, \ldots w_n, \ldots$ eine unbegrenzte und nach irgend einer Vorschrift gebildete Folge von monogenen Funktionen von z. Wir setzen voraus, daß es einen gemeinsamen Bereich in der Zahlenebene gebe, in dem alle diese Funktionen monogen sind und die unendliche Reihe

$$(1)\qquad f(z) = w_0(z) + w_1(z) + \cdots + w_n(z) + \cdots$$

konvergiert (vgl. Nr. 360), so daß die Summe $f(z)$ der Reihe in diesem Bereiche eine *Funktion* von z ist.

Es ist leicht, zu beweisen, daß $f(z)$ eine *stetige* Funktion von z ist, sobald wir ferner voraussetzen, daß die Reihe in dem Bereiche überall *gleichmäßig* konvergiere, vgl. Nr. 364 und 425. Wir nehmen also an: Wie klein auch eine positive

Zahl σ gewählt sein mag, stets gibt es einen Index n derart, daß für *jede* Stelle z des Bereiches und für jedes $m \geqq n$ der absolute Betrag des *Restes*

$$R_m(z) = w_m(z) + w_{m+1}(z) + \cdots$$

kleiner als σ ist:

$$(2) \qquad |R_m(z)| < \sigma.$$

Da der Beweis für die Stetigkeit alsdann genau so wie in Nr. 425 geführt wird, begnügen wir uns mit der Formulierung des Ergebnisses:

Satz 17: Liegt eine unbegrenzte Folge von monogenen Funktionen $w_0(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$, ... vor, deren Bereiche einen Bereich gemein haben, innerhalb dessen die unendliche Reihe

$$w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) + \cdots$$

überall gleichmäßig konvergiert, so ist die Summe der Reihe in diesem Bereiche eine stetige Funktion von z.

Dieser Satz ist jedoch noch unvollständig; wir wünschen nämlich noch zu beweisen, daß die Summe der Reihe eine *monogene* Funktion von z ist. Aber dieser Beweis beruht auf einer Anwendung des Cauchyschen Satzes, zu der es noch einiger Vorbereitungen bedarf, die wir in den nächsten Nummern treffen. In Nr. 644 werden wir alsdann den Satz 17 vervollständigen.

642. Integration einer gleichmäßig konvergenten Reihe von monogenen Funktionen. Unter den Voraussetzungen der letzten Nummer ist:

$$f(z) = w_0(z) + w_1(z) + \cdots + w_{m-1}(z) + R_m(z).$$

Hier ist $f(z)$ stetig, wie sich soeben ergab; da die m Funktionen w_0, w_1, ... w_{m-1} ebenfalls stetig sind, muß folglich auch $R_m(z)$ stetig sein. Ist nun k ein Integrationsweg, der innerhalb des gemeinsamen Bereiches aller Funktionen w von z_0 bis Z geht, so dürfen wir also integrieren:

$$(1) \quad \int\limits_k f(z)\,dz = \int\limits_k w_0(z)\,dz + \int\limits_k w_1(z)\,dz + \cdots + \int\limits_k w_{m-1}(z)\,dz + \int\limits_k R_m(z)\,dz.$$

Nach Satz 12, Nr. 630, ist aber:

$$(2) \qquad \int_k R_m(z)\,dz = e^{i\vartheta} R_m(z_1)s,$$

wenn ϑ eine gewisse reelle Größe, s die positiv gemessene Bogenlänge von k und z_1 eine gewisse Stelle auf k bedeutet. Ist s endlich, so folgt hieraus nach (2) in voriger Nummer, daß der Grenzwert von (2) für $\lim \sigma = 0$ ebenfalls gleich Null wird, d. h., daß aus (1) die konvergente Entwicklung hervorgeht:

$$(3) \quad \int_k f(z)\,dz = \int_k w_0(z)\,dz + \int_k w_1(z)\,dz + \cdots + \int_k w_n(z)\,dz + \cdots.$$

Unter der Voraussetzung, daß *alle* statthaften Integrationswege k Bogenlängen haben, die kleiner als eine gewisse positive Zahl S sind, folgt aus (2) weiter, daß für *jede* obere Grenze Z, die dem gemeinsamen Bereiche angehört und für jeden Index $m \geqq n$ auch

$$\left|\int_k R_m(z)\,dz\right| < \sigma S$$

ist. Dies gibt den

Satz 18: Liegt eine unbegrenzte Folge von monogenen Funktionen $w_0(z)$, $w_1(z)$, ... $w_n(z)$, ... vor, deren Bereiche einen Bereich gemein haben, innerhalb dessen die unendliche Reihe

$$f(z) = w_0(z) + w_1(z) + \cdots + w_n(z) + \cdots$$

überall gleichmäßig konvergiert, ist ferner z_0 eine bestimmt nnd Z eine beliebig gewählte Stelle des gemeinsamen Bereiches und k irgend ein in diesem Bereiche von z_0 nach Z gehender Integrationsweg, so darf die unendliche Reihe gliedweise längs k integriert werden, d. h. es ist:

$$\int_k f(z)\,dz = \int_k w_0(z)\,dz + \int_k w_1(z)\,dz + \cdots + \int_k w_n(z)\,dz + \cdots,$$

und diese neue Reihe konvergiert für alle Stellen Z des gemeinsamen Bereiches gleichmäßig, falls noch vorausgesetzt wird, daß alle statthaften Integrationswege k Bogenlängen haben, die unterhalb einer gewissen endlichen Größe bleiben.

Dieser Satz ist ebenso wie Satz 17 der vorigen Nummer noch unvollständig. Wir werden ihn in Nr. 647 ergänzen.

642]

643. Die monogenen Funktionen als analytische Funktionen. Wir können aber schon aus diesen Sätzen und aus dem Cauchyschen Fundamentalsatze einen sehr wichtigen Schluß ziehen, nämlich die in Nr. 623 aufgestellte Behauptung rechtfertigen, daß jede monogene Funktion als analytische Funktion, d. h. als *Potenzreihe* (nach Nr. 365) darstellbar ist.

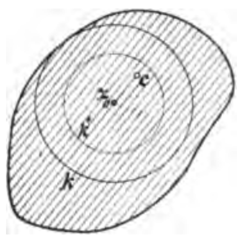


Fig. 97.

Es bedeute nämlich jetzt $f(z)$ eine in einem gewissen Bereiche monogene Funktion von z; ferner sei z_0 irgend eine Stelle des Bereiches und k der größte Kreis um z_0 als Mittelpunkt, dessen Fläche vollständig dem Bereiche angehört, siehe Fig. 97. Außerdem sei c irgendeine Stelle im Innern des Kreises k. Alsdann ist nach dem Cauchyschen Satze in Nr. 639:

(1) $$f(c) = \frac{1}{2i\pi}\int_k \frac{f(z)}{z-\ }dz.$$

Den Integranden können wir nun in eine gleicnmäßig konvergente unendliche Reihe verwandeln. Nach Nr. 374 ist nämlich die Reihe

(2) $$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots$$

für $|t| < 1$ gleichmäßig konvergent. Die Voraussetzung $|t| < 1$ wird aber erfüllt, wenn wir

$$t = \frac{c - z_0}{z - z_0}$$

setzen, sobald nur die Stelle z weiter als c von z_0 entfernt ist. Wenn wir also um z_0 innerhalb des Kreises k einen Kreis k' ziehen, der die Stelle c einschließt, so *ist die Reihe*

$$\frac{z - z_0}{z - c} = 1 + \frac{c - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{c - z_0}{z - z_0}\right)^2 + \cdots$$

gleichmäßig konvergent für alle außerhalb k' *gelegenen Stellen* z.

Der Kreis k aber liegt außerhalb k'. Da ferner $f(z)$ längs k *stetig* ist, so folgt durch Multiplikation der Reihe mit $f(z) : (z - z_0)$, daß die Reihe

(3) $$\frac{f(z)}{z-c} = \frac{f(z)}{z - z_0} + \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}(c - z_0) + \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}(c - z_0)^2 + \cdots$$

in einem solchen Bereiche gleichmäßig konvergiert, dem der Umfang des Kreises k angehört. Nach Satz 18 der letzten Nummer gilt demnach diejenige konvergente Entwicklung, die sich durch gliedweise Integration von (3) längs des Kreises k ergibt. Dabei geht links nach (1) der Wert $2i\pi f(c)$ hervor, weshalb wir noch mit $2i\pi$ dividieren. Außerdem können wir die konstanten Faktoren $c - z_0$, $(c - z_0)^2 \ldots$ rechts aus den Integralen heraussetzen. Wenn wir noch mit $c_0, c_1, \ldots c_n, \ldots$ die Zahlenwerte bezeichnen:

$$c_0 = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_k \frac{f(z)}{z - z_0}dz, \qquad c_1 = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_k \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}dz, \ldots$$

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz, \ldots,$$

so finden wir:

$$(4) \qquad f(c) = c_0 + c_1(c - z_0) + \cdots + c_n(c - z_0)^n + \cdots,$$

eine Formel, die wohlbemerkt für *jede* Stelle c im Innern des Kreises k gilt, da die Werte der Konstanten $c_0, c_1, \ldots c_n, \ldots$ garnicht von der Wahl dieser Stelle c abhängen.

Wenn wir deshalb statt c die beliebige Größe z setzen, so gelangen wir mit Rücksicht auf die Definition in Nr. 365 zu dem

Satz 19: Ist $f(z)$ eine monogene Funktion von z, ferner z_0 irgend eine bestimmt gewählte Stelle ihres Bereiches und k ein solcher im übrigen beliebig großer Kreis mit der Mitte z_0, dessen Fläche vollständig dem Bereiche angehört, so ist $f(z)$ an allen Stellen z innerhalb des Kreises k eine analytische Funktion, nämlich darstellbar durch eine innerhalb des Kreises k gleichmäßig konvergente Potenzreihe:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots.$$

Daß nämlich die Reihe gleichmäßig konvergiert, folgt nach Nr. 364 sofort aus dem Umstande, daß sie an jeder Stelle z innerhalb k überhaupt konvergiert.

Da nun die analytischen Funktionen nach Nr. 370 Ableitungen beliebig hoher Ordnung haben, die ebenfalls analytisch und demnach monogen sind, so folgt noch:

Satz 20. Eine monogene Funktion $f(z)$ hat innerhalb ihres

Bereiches überall Ableitungen beliebig hoher Ordnung, und diese Ableitungen sind in demselben Bereiche monogene Funktionen.

Wir haben schon in Nr. 372 bemerkt, daß die Reihe (4) nichts anderes als eine *Taylorsche Reihe* ist, indem wir haben:

$$(5)\quad c_0 = f(z_0), \qquad c_1 = \frac{1}{1!}f'(z_0), \quad \ldots \quad c_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0), \ldots .$$

644. Nochmals die unendlichen Reihen von monogenen Funktionen. Wir können jetzt den Satz 17 von Nr. 641 vervollständigen. Unter den Voraussetzungen jenes Satzes ist

$$(1)\qquad f(z) = w_0(z) + w_1(z) + \cdots + w_n(z) + \cdots$$

innerhalb des gemeinsamen Bereiches von $w_0, w_1, \ldots w_n, \ldots$ eine stetige Funktion von z, von der wir nun zeigen können, daß sie auch monogen ist. Es bedeute nämlich z_0 irgend eine bestimmte Stelle des Bereiches und k einen solchen Kreis mit der Mitte z_0, dessen Fläche dem Bereiche vollständig angehört. Ferner sei c irgend eine bestimmt gewählte Stelle im Innern des Kreises k. Alsdann gilt die Entwicklung (3) der letzten Nummer, da wir bei ihrer Herleitung nur die Stetigkeit von $f(z)$ benutzt hatten. Aber das Integral der *linken* Seite jener Formel ist jetzt *nicht* nach dem Cauchyschen Satze 16 in Nr. 639 gleich $2i\pi f(c)$ zu setzen, weil wir ja noch nicht wissen, daß $f(z)$ monogen ist. Statt der Formel (4) der letzten Nummer geht also hervor:

$$(2)\quad \frac{1}{2i\pi}\int\limits_k \frac{f(z)}{z-c}dz = c_0 + c_1(c-z_0) + \cdots + c_n(c-z_0)^n + \cdots .$$

Nun ist aber nach (1):

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{f(z)}{z-c} = \frac{1}{2i\pi}\frac{w_0(z)}{z-c} + \frac{1}{2i\pi}\frac{w_1(z)}{z-c} + \cdots + \frac{1}{2i\pi}\frac{w_n(z)}{z-c} + \cdots,$$

und zwar konvergiert diese Reihe gleichmäßig innerhalb eines Gebietes, das den Umfang des Kreises k enthält. Indem wir daher nach Satz 18, Nr. 642, gliedweise längs k integrieren und *rechts* den Cauchyschen Satz anwenden dürfen, weil w_0, $w_1, \ldots w_n, \ldots$ nach Voraussetzung monogen sind, finden wir:

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_k \frac{f(z)}{z-c}dz = w_0(c) + w_1(c) + \cdots + w_n(c) + \cdots .$$

Also ist die linke Seite der Formel (2) gleich $f(c)$, nach (1), so daß wir doch wieder erhalten:

$$f(c) = c_0 + c_1(c - z_0) + \cdots + c_n(c - z_0)^n + \cdots.$$

An allen Stellen c im Innern von k ist $f(z)$ mithin analytisch und daher auch monogen. Wir haben somit den

Satz 21: Liegt eine unbegrenzte Folge von monogenen Funktionen $w_0(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$, ... vor, deren Bereiche einen Bereich gemein haben, innerhalb dessen die unendliche Reihe

$$w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) + \cdots$$

überall gleichmäßig konvergiert, so ist die Summe dieser Reihe in dem gemeinsamen Bereiche eine monogene Funktion von z.

645. Zusatz zu dem Cauchyschen Satze. Da für monogene Funktionen nach dem Cauchyschen Satze in Nr. 639

$$(1)\qquad f(c) = \frac{1}{2i\pi}\int_k \frac{f(z)}{z-c}\,dz$$

ist, so folgt, wenn auch die Stelle $c + \Delta c$ innerhalb k liegt:

$$f(c+\Delta c) = \frac{1}{2i\pi}\int_k \frac{f(z)}{z-c-\Delta c}\,dz.$$

Subtrahieren wir hiervon die Formel (1) und dividieren wir mit Δc, so kommt:

$$\frac{f(c+\Delta c)-f(c)}{\Delta c} = \frac{1}{2i\pi}\int_k f(z)\frac{\frac{1}{z-c-\Delta c}-\frac{1}{z-c}}{\Delta c}\,dz$$

und daher für $\lim \Delta c = 0$:

$$(2)\qquad f'(c) = \frac{1}{2i\pi}\int_k f(z)\frac{\partial\frac{1}{z-c}}{\partial c}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_k \frac{f(z)}{(z-c)^2}\,dz.$$

Behandeln wir diese Formel (2) ebenso wie vorher die Formel (1), so gehen entsprechende Formeln für die höheren Ableitungen $f''(c), \cdots$ hervor, die ja nach Satz 20, Nr. 643, vorhanden sind. So ergibt sich der

Satz 22: Unter den Voraussetzungen des Cauchyschen Satzes 16 in Nr. 639 ist

$$f^{(n)}(c) = \frac{n!}{2i\pi}\int\limits_k \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz.$$

für $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Wir werden diesen Zusatz zum Cauchyschen Satze sogleich verwerten.

646. Differentiation einer gleichmäßig konvergenten Reihe von monogenen Funktionen. Wir knüpfen wieder an die Betrachtungen der vorletzten Nummer an, wonach

(1) $$f(z) = w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) + \cdots$$

eine monogene Funktion ist. Es möge c eine Stelle des Bereiches und k ein einfacher geschlossener Umlauf um c innerhalb des Bereiches sein. Alsdann ist auch die Reihe

$$\frac{f(z)}{(z-c)^2} = \frac{w_0(z)}{(z-c)^2} + \frac{w_1(z)}{(z-c)^2} + \frac{w_2(z)}{(z-c)^2} + \cdots$$

gleichmäßig konvergent und monogen in einem Bereiche, dem k zugehört, so daß gliedweise Integration längs k nach Satz 22 (für $n = 1$) ergibt:

$$f'(c) = w_0'(c) + w_1'(c) + w_2'(c) + \cdots.$$

Satz 23: Eine in einem Bereiche gleichmäßig konvergente unendliche Reihe von monogenen Funktionen $w_0(z), w_1(z), w_2(z) \cdots$ *darf gliedweise differenziert werden, d. h. die monogene Funktion*

$$f(z) = w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) + \cdots$$

hat in dem Bereiche die Ableitung

$$f'(z) = w_0'(z) + w_1'(z) + w_2'(z) + \cdots,$$

die eine überall im Bereiche gleichmäßig konvergente Reihe und zwar eine monogene Funktion vorstellt.

Überhaupt ist allgemein

(2) $$f^{(n)}(z) = w_0^{(n)}(z) + w_1^{(n)}(z) + w_2^{(n)}(z) + \cdots$$

für $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Den Satz 23 sahen wir uns schon in Nr. 508 genötigt, gelegentlich anzuwenden. Er weicht übrigens von dem ent-

sprechenden Satze 27, Nr. 427, für das reelle Gebiet in sofern ab, als im komplexen Gebiete die gleichmäßige Konvergenz der durch gliedweise Differentiation hervorgehenden Reihe von vornherein feststeht, während sie im reellen Gebiete erst noch besonders untersucht werden muß.

647. Nochmals die Integration einer gleichmäßig konvergenten Reihe von monogenen Funktionen. Wenn insbesondere der gemeinsame Bereich von $w_0, w_1, w_2, \cdots$ *einfach zusammenhängend* und k ein beliebiger in ihm verlaufender Integrationsweg von z_0 nach Z ist, so folgt aus (1) in voriger Nummer nach Satz 18, Nr. 642, daß das Integral

$$\int\limits_k f(z)\,dz = \int\limits_k w_0(z)\,dz + \int\limits_k w_1(z)\,dz + \int\limits_k w_2(z)\,dz + \cdots$$

für alle Stellen Z des Bereiches eine von der Art des eingeschlagenen Integrationsweges unabhängige Funktion von Z ist. Allerdings wurde in Satz 18 besonders vorausgesetzt, daß alle Integrationswege k kürzer als eine gewisse endliche Länge S sein sollten. Aber wir können ja immer, weil die Art des Weges in dem einfach zusammenhängenden Bereiche nach Satz 15, Nr. 633, gleichgültig ist, einen möglichst kurzen Weg von z_0 nach Z innerhalb des Bereiches einschlagen; und wenn nun der Bereich *endlich* ist, so gibt es sicher eine endliche Länge S, unterhalb derer die Längen aller dieser Wege verbleiben. Da $f(z)$ außerdem nach Satz 21, Nr. 644, monogen ist, gilt dasselbe von dem Integral. Der Satz 18, Nr. 642, ist also so zu vervollständigen:

Satz 24: Liegt eine unbegrenzte Folge von monogenen Funktionen $w_0(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$, $\cdots$ vor, deren Bereiche einen einfach zusammenhängenden endlichen Bereich gemein haben, innerhalb dessen die unendliche Reihe

$$f(z) = w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) + \cdots$$

überall gleichmäßig konvergiert, und ist z_0 eine bestimmt, Z eine beliebig gewählte Stelle des gemeinsamen Bereiches, so ist

$$\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dx = \int\limits_{z_0}^{Z} w_0(z)\,dz + \int\limits_{z_0}^{Z} w_1(z)\,dz + \int\limits_{z_0}^{Z} w_2(z)\,dz + \cdots$$

eine in dem gemeinsamen Bereiche monogene Funktion von Z, indem ihr Wert durchaus unabhängig von der Auswahl des innerhalb dieses Bereiches von z_0 bis Z erstreckten Integrationsweges ist.

Hiermit sind die Beweise der wichtigsten Sätze von *Weierstraß* über unendliche Reihen beendet, und wir schließen jetzt noch einige andere Anwendungen des Cauchyschen Satzes an.

646. Eine Vergleichungsfunktion. Wenn die Fläche eines Kreises $\varkappa$ vom Radius r vollständig dem Bereiche einer monogenen Funktion $f(z)$ angehört und c der Mittelpunkt des Kreises ist, so haben wir nach Satz 22, Nr. 645:

$$f^{(n)}(c) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\varkappa}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz,$$

eine Formel, die auch für $n = 0$ gilt, wenn $f^{(0)}(c) = f(c)$ und $0! = 1$ gesetzt wird. Ist nun M das Maximum und N das Minimum des absoluten Betrages von $f(z)$ auf dem Kreisumfange, so erreicht der absolute Betrag des Integranden das Maximum $M : r^{n+1}$ und das Minimum $N : r^{n+1}$, so daß, weil überdies $s = 2\pi r$ der Kreisumfang ist, aus Satz 11, Nr. 630, folgt:

$$\frac{n!\,N}{r^n} \leqq |f^{(n)}(c)| \leqq \frac{n!\,M}{r^n}.$$

Satz 25: Gehört ein Kreis vom Radius r und mit dem Mittelpunkte c vollständig dem Bereiche einer monogenen Funktion $f(z)$ an und ist M das Maximum und N das Minimum des absoluten Betrages von $f(z)$ auf dem Kreisumfange, so liegt der absolute Betrag der n^{ten} Ableitung von $f(z)$ für den Mittelpunkt c zwischen $n!\,N : r^n$ und $n!\,M : r^n$. Insbesondere liegt $|f(c)|$ selbst zwischen N und M.

Bilden wir nun mit *Cauchy* die Funktion:

$$\varphi(z) = \frac{M}{1 - \frac{z-c}{r}},$$

so sehen wir, daß sie in der ganzen Ebene, abgesehen von der

Stelle $z = c + r$ auf dem Kreisumfange, monogen ist und die n^{te} Ableitung hat:

$$\varphi^{(n)}(z) = \frac{n!\,M}{r^n\left(1 - \frac{z-c}{r}\right)^{n+1}},$$

so daß

$$\varphi^{(n)}(c) = \frac{n!\,M}{r^n}$$

wird. Daraus folgt:

Satz 26: Wenn ein Kreis vom Radius r und mit dem Mittelpunkte c vollständig dem Bereiche einer monogenen Funktion $f(z)$ angehört und M der größte Wert ist, den der absolute Betrag von $f(z)$ auf dem Kreisumfange erreicht, so hat die im Innern des Kreises monogene Funktion

$$\varphi(z) = \frac{M}{1 - \frac{z-c}{r}}$$

die Eigenschaft, daß für die Kreismitte c

$$|f(c)| \leqq |\varphi(c)| \quad \text{und} \quad |f^{(n)}(c)| \leqq |\varphi^{(n)}(c)|$$

ist.

Die so gewonnene *Vergleichungsfunktion* $\varphi(z)$ werden wir im dritten Bande benutzen.

649. Überall endliche monogene Funktionen. Eine andere wichtige Anwendung des Cauchyschen Satzes ist diese: Wenn $f(z)$ eine für jedes endliche z monogene Funktion ist, deren absoluter Betrag die Zahl M nie übersteigt, wie groß auch der absolute Betrag von z gewählt sein mag, so beweisen wir nach *Liouville*, daß $f(z)$ eine Konstante ist. Legen wir nämlich um den Nullpunkt als Mittelpunkt einen Kreis k und ist c irgendwo im Innern dieses Kreises gelegen, der den Radius r habe, so ist nach Satz 16, Nr. 639:

$$f(c) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_k \frac{f(z)}{z-c}\,dz, \qquad f(0) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_k \frac{f(z)}{z}\,dz,$$

also:

$$(1) \qquad f(c) - f(0) = \frac{c}{2i\pi}\int\limits_k \frac{f(z)}{z(z-c)}\,dz.$$

Für alle Stellen z auf dem Umfange des Kreises aber ist, wie groß auch der Radius r gewählt sein mag, nach Voraussetzung

$|f(z)| \leqq M$. Ferner ist für sie $|z| = r$ und $|z - c| \geqq r - |c|$, so daß der Integrand in (1) auf dem Kreisumfange nur solche Werte hat, deren absolute Beträge nicht größer als $M : r(r - |c|)$ sind. Da $s = 2\pi r$ der Kreisumfang ist, so gibt die Formel (1) nach Satz 11, Nr. 630:

$$|f(c) - f(0)| \leqq \frac{|c|}{2\pi} \cdot \frac{M}{r(r - |c|)} \cdot 2\pi r = \frac{M|c|}{r - |c|},$$

wie groß auch r gewählt sein mag. Der rechts stehende Bruch wird aber für $\lim r = +\infty$ gleich Null, so daß $f(c) = f(0)$ folgt.

Satz 27: Ist eine Funktion $f(z)$ für jedes endliche z monogen, während ihr absoluter Betrag, wie groß auch der absolute Betrag von z gewählt sein mag, nie eine gewisse endliche Zahl übersteigt, so ist $f(z)$ bloß eine Konstante.

650. Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Diesen Satz, der bekanntlich zum ersten Male von *Gauß* bewiesen worden ist, mußten wir in Nr. 378 ohne Beweis anwenden. Wir sind jetzt in der Lage, aus dem soeben gefundenen Satze nach *Weierstraß* auf einfachem Wege dieses Theorem abzuleiten.

Ist nämlich

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n,$$

so soll bewiesen werden, daß es wenigstens einen Wert von z gibt, für den $f(z) = 0$ ist. Setzen wir den Fall, daß es keinen gebe, so ist auch $1 : f(z)$ nach Satz 4, Nr. 624, für jedes endliche z monogen. Außerdem strebt der absolute Betrag von $1 : f(z)$ nach Null, wenn der absolute Betrag von z über jede Zahl wächst. Denn der absolute Betrag von $f(z)$ wächst mit dem von z über jede endliche Zahl. In der Tat, es ist ja:

$$\frac{f(z)}{z^n} = \frac{c_0}{z^n} + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \frac{c_2}{z^{n-2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{z} + c_n.$$

Alle Summanden rechts mit Ausnahme von c_n streben nach Null für $\lim |z| = +\infty$; also ist:

$$\lim \frac{f(z)}{z^n} = c_n \quad \text{für} \ \lim |z| = +\infty,$$

d. h.:

$$\lim \frac{1}{f(z)} = \lim \frac{1}{c_n z^n}$$

oder, da $\lim (1 : z^n) = 0$ wird:

$$\lim \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Der absolute Betrag von $1 : f(z)$ weicht also von Null für alle Stellen z außerhalb eines Kreises um den Nullpunkt um weniger als eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl σ ab, falls der Radius dieses Kreises hinreichend groß (aber immer noch endlich) gewählt wird.

Die Funktion $1 : f(z)$ erfüllt somit alle Voraussetzungen des Satzes 27 der letzten Nummer, d. h. sie ist eine Konstante. Aber dies ist ein offenbarer Widerspruch. Die Annahme, daß $f(z)$ nirgends verschwinde, muß deshalb falsch sein. Daher kommt:

Satz 28 (Fundamentalsatz der Algebra): Eine ganze rationale Funktion von z, die nicht bloß eine Konstante ist, hat für mindestens einen Wert von z den Wert Null.

§ 5. Mehrdeutige Funktionen.

651. Periodizitätsmodul. Wenn $\varphi(z)$ eine Funktion ist, die in einem einfach zusammenhängenden Bereiche überall monogen ist, und wenn c eine solche Stelle in diesem Bereiche bedeutet, wo $\varphi(z)$ nicht gerade verschwindet, so liegt in

$$(1) \qquad f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-c)^n}$$

eine solche Funktion vor, die ebenfalls überall in jenem Bereiche monogen ist, abgesehen jedoch von der Stelle c, wo sie mit $1 : (z - c)$ in der n^{ten} Ordnung unendlich groß wird. Dabei soll n eine ganze positive Zahl bedeuten. *Für $f(z)$ ist der Bereich also nicht einfach zusammenhängend.* Die Integration von $f(z)$ längs eines geschlossenen Integrationsweges, der die Stelle c einmal und zwar in positivem Sinne umläuft, ergibt ja auch nicht den Wert Null, sondern nach Satz 22, Nr. 645, den Wert

$$(2) \qquad C = \frac{2i\pi}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(c),$$

der auch im Falle $n = 1$ nach Satz 16, Nr. 639, stimmt, sobald dann nur $0! = 1$ und $\varphi^{(0)}(c) = \varphi(c)$ gesetzt wird.

Wir ziehen nun von einer Stelle z_0 nach einer anderen Stelle Z des Bereiches einen beliebigen Integrationsweg k, siehe Fig. 98. Er überschreite eine beliebig, aber bestimmt von c aus bis an den Rand des Bereiches gezogene und sich selbst nicht schneidende Linie s insgesamt p-mal von der positiven und q-mal von der negativen Seite her. Dabei verstehen wir unter der *positiven Seite* von s diejenige, die wir zuerst treffen, wenn wir die Stelle c auf einem kleinen Kreise in positivem Sinne umlaufen. In Fig. 98 ist $p = 1$, $q = 3$.

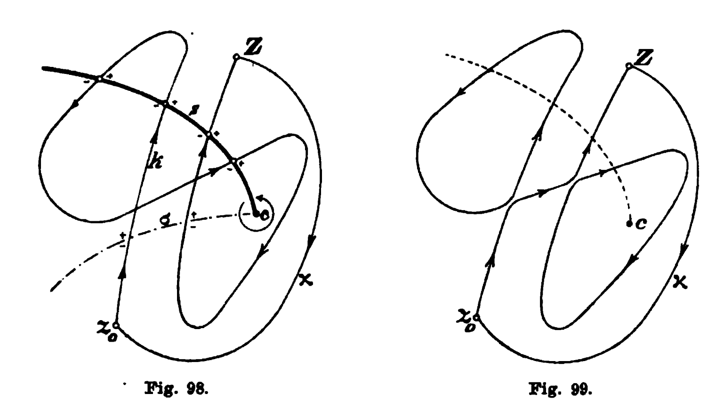


Fig. 98. Fig. 99.

Wird statt s eine andere stetige und sich selbst nicht schneidende Linie σ gezogen, so werden zwar die Zahlen p und q unter Umständen andere, z. B. in Fig. 98 ist dann $p = 0$, $q = 2$. Aber stets ist die Differenz $p - q$ die gleiche, und in den folgenden Betrachtungen wird eben nur diese Differenz eine Rolle spielen.

Wir ziehen nun noch einen solchen Integrationsweg $\varkappa$ von z_0 nach Z, der die Linie s garnicht trifft, was stets möglich ist. Wir gehen alsdann von z_0 längs k nach Z und von hier längs $\varkappa$ nach z_0 zurück und betrachten das Integral von $f(z)$ für diesen geschlossenen Weg. Wie Fig. 99 zeigt, wo wir der Deutlichkeit halber einige Lücken gelassen haben, zerfällt der Weg in mehrere *einfache*, sich selbst nicht schneidende geschlossene Linien. Wir nennen eine geschlossene Linie einfach, wenn der Strahl von einem bestimmten Punkte im Innern der Linie nach einer Stelle auf der Linie gerade *einen* voll-

ständigen Umlauf um jenen ersten Punkt vollendet hat, wenn die Stelle auf der Linie sie ganz durchlaufen hat. Es zeigt sich, daß einfache geschlossene Linien auftreten können, die den Punkt c nicht enthalten. Längs ihrer ergibt sich der Integralwert Null, da $f(z)$ in ihrem Innern monogen ist. Es treten außerdem gerade so viele einfache geschlossene Linien auf, die den Punkt c umschließen, als der Überschuß von p über q oder von q über p beträgt (also in Fig. 99 gerade 2, weil $q-p=2$ ist), und zwar haben sie positiven oder negativen Sinn, je nachdem $p>q$ oder $q>p$ ist. (In Fig. 99 haben sie negativen Sinn). Längs jedes solchen Umlaufes ergibt sich der Integralwert C oder $-C$, je nachdem $p>q$ oder $q>p$ ist. Die Summe aller, auf alle einzelnen geschlossenen Linien bezüglichen Integralwerte ist daher gleich $(p-q)C$. Da k im Sinne von z_0 nach Z und $\varkappa$ im Sinne von Z nach z_0 durchlaufen wird, so ergibt sich also:

$$\int\limits_k f(z)\,dz - \int\limits_\varkappa f(z)\,dz = (p-q)C,$$

sobald wir auch $\varkappa$ im Sinne von z_0 nach Z durchlaufen.

Die willkürlich eingeführte Linie s verwandelt den Bereich in einen einfach zusammenhängenden, sobald sie als nicht zu überschreitende Grenze eingeführt wird, und das ist für den Weg $\varkappa$ der Fall, da dieser Weg s nicht trifft. In dem einfach zusammenhängenden Bereiche aber ist das Integral, erstreckt von z_0 bis Z, nach Satz 15, Nr. 633, eine monogene Funktion $F(Z)$ der oberen Grenze, und zwar ist $F(Z)$ von der Art des eingeschlagenen Weges $\varkappa$ unabhängig, sobald eben $\varkappa$ die Linie s nicht trifft. Die letzte Formel lehrt daher:

Sobald von z_0 nach Z ein solcher Weg k eingeschlagen wird, der die Linie s insgesamt p-mal von der positiven und q-mal von der negativen Seite her überschreitet, so erreicht das Integral nicht mehr den Wert $F(Z)$, sondern den Wert

$$(3) \qquad \int\limits_k f(z)\,dz = F(Z) + (p-q)C.$$

Es leuchtet ein, daß wir den Weg k so wählen können daß $p-q$ eine beliebige ganze Zahl wird.

Die Grenzlinie s war willkürlich eingeführt worden. Man ist daher berechtigt, sie aufzuheben, weil sie nicht in der ursprünglichen Stellung des Integrationsproblems enthalten ist. Dann aber müssen wir nach (3) sagen, daß das von z_0 bis Z erstreckte Integral nicht mehr eine *einwertige* oder *eindeutige* Funktion der oberen Grenze Z ist, weil noch der Summand $(p - q)C$ hinzutritt. Wir müssen also beim Funktionsbegriffe auf die Eindeutigkeit, die bisher *stets* angenommen wurde und in seiner Definition (vgl. Nr. 6 und Nr. 365) ausgesprochen war, Verzicht leisten. So gelangen wir also hier zu dem Begriffe einer sogar *unendlich vieldeutigen Funktion*, nämlich einer Funktion, die nur abgesehen von einem additiven beliebigen ganzen Vielfachen von C eindeutig ist. Die Zahl C heißt ihr *Periodizitätsmodul*.

Es kann allerdings vorkommen, daß die Konstante C gleich Null wird. Alsdann ist das Integral auch in dem wegen der Unstetigkeitsstelle c nicht einfach zusammenhängenden Bereiche doch noch eine eindeutige Funktion wie früher.

Beispiel: Es sei $\varphi(z) = 1$, d. h. $f(z) = 1 : (z - c)^n$. Hier ist $\varphi^{(n-1)}(c) = 0$ für $n > 1$, dagegen gleich Eins für $n = 1$. Nach (2) ist demnach $C = 0$ für $n > 1$ und $C = 2i\pi$ für $n = 1$. Für $n = 2, 3, 4, \cdots$ ist also das Integral (vgl. Nr. 635):

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{(z-c)^n} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(z_0 - c)^{n-1}} - \frac{1}{(Z-c)^{n-1}}\right]$$

in der ganzen Ebene eine eindeutige und monogene Funktion von Z. Dagegen ist das Integral:

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{z - c}$$

eine unendlich vieldeutige Funktion mit dem Periodizitätsmodul $2i\pi$. Nehmen wir z. B. $c = 0$ und $z_0 = 0$ an, so war bisher nach Nr. 636:

$$\int_{0}^{Z} \frac{dz}{z} = \ln Z = \ln |Z| + i\Omega,$$

wobei $\ln Z$ den *Hauptwert* des Logarithmus bedeutete. Dabei ist $\ln |Z|$ der reelle Logarithmus des absoluten Betrages von Z und Ω die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegene Amplitude von Z. Dagegen werden wir jetzt allgemeiner

$$\ln Z = \int_0^Z \frac{dz}{z} = \ln |Z| + i\Omega + (p-q)2i\pi$$

zu setzen haben, indem wir die Linie s etwa wie in Nr. 635 als die negative x-Achse wählen. *Es ist also der allgemeine Logarithmus einer komplexen Zahl Z eine unendlich vieldeutige Funktion:*

(4) $$\ln Z = \ln |Z| + i\Omega + 2ik\pi,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Der Umstand, daß der Periodizitätsmodul $2i\pi$ dieser Funktion $\ln Z$ imaginär ist, erklärt es, daß wir im reellen Bereiche nicht auf die Vieldeutigkeit des Logarithmus gestoßen waren, wohl aber in Nr. 376 in Formel (1) dazu kamen, als wir den Logarithmus im komplexen Bereiche einführten.

652. Mehrere Periodizitätsmoduln. Es liege wieder eine in einem einfach zusammenhängenden Bereiche monogene Funktion $\varphi(z)$ vor, und es seien $a, b, \cdots l$ mehrere verschiedene Stellen des Bereiches, an denen $\varphi(z)$ nicht gerade verschwindet. Dann ist

(1) $$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^\alpha (z-b)^\beta \cdots (z-l)^\lambda}$$

eine überall im Bereiche, abgesehen von den Stellen $a, b, \cdots l$, monogene Funktion. Es sollen $\alpha, \beta, \cdots \lambda$ positive ganze Zahlen bedeuten, so daß $f(z)$ z. B. an der Stelle a mit $1:(z-a)$ in der α^{ten} Ordnung unendlich groß wird.

Auf einem geschlossenen Wege, der die Stelle a einmal und zwar positiv umläuft, aber keine der übrigen Unstetigkeitsstellen $b, c, \cdots l$ einschließt, erreicht das Integral von $f(z)$ nach Satz 22, Nr. 645, den Wert

(2) $$A = \frac{2i\pi}{(\alpha-1)!}\left[\frac{d^{\alpha-1}}{dz^{\alpha-1}}\frac{\varphi(z)}{(z-b)^\beta \cdots (z-l)^\lambda}\right]_{z=a},$$

der nach Satz 16, Nr. 639, auch für $\alpha = 1$ gilt, wenn dann $0! = 1$ gesetzt und das Differentiationszeichen fortgelassen wird. Entsprechend ergeben sich konstante Integralwerte $B, \cdots L$ bei einfachen positiven Umläufen um $b, \cdots l$. Nun ziehen wir von $a, b, \cdots l$ aus gerade oder krumme, jedoch sich selbst und einander nicht schneidende Linien $s_a, s_b, \cdots s_l$ bis an den Rand des Bereiches, wobei wir die *positiven Seiten* dieser Linien wie in voriger Nummer festlegen. Fügen wir $s_a, s_b, \cdots s_l$ zur Grenze des Bereiches hinzu, so liegt ein einfach zusammenhängender Bereich vor, innerhalb dessen $f(z)$ überall monogen ist, so daß in ihm eine eindeutige Funktion von Z:

$$F(Z) = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

bei der Integration von einer bestimmten Stelle z_0 bis zu einer beliebigen Stelle Z hervorgeht.

Wenn wir jedoch die willkürlichen Linien $s_a, s_b, \cdots s_l$ nicht als Grenzen betrachten und von z_0 nach Z einen solchen Integrationsweg k einschlagen, der die Linien $s_a, s_b, \cdots s_l$ bzw. p_a-, p_b- $\cdots$ p_l-mal von der positiven Seite her und bzw q_a-, q_b- $\cdots$ q_l-mal von der negativen Seite her überschreitet, so ergibt sich der Integralwert:

$$(3)\quad \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = F(Z) + (p_a - q_a)A + (p_b - q_b)B + \cdots + (p_l - q_l)L.$$

Der Beweis wird wie in voriger Nummer geführt.

Dies Integral (3) ist also eine unendlichvieldeutige Funktion von Z, nämlich eine eindeutige Funktion, vermehrt um additive beliebige ganzzahlige Vielfache der Konstanten $A, B, \cdots L$, die man die *Periodizitätsmoduln* nennt. Es kann vorkommen, daß einige der Konstanten gleich Null werden oder daß sich einige von ihnen wie ganze Zahlen zueinander verhalten. Alsdann wird die Anzahl der *wesentlichen* Periodizitätsmoduln geringer.

Beispiel: Im Falle

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

ist $a = i$, $b = -i$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\varphi(z) = 1$, also $A = \pi$, $B = -\pi$. Hier stehen die Periodizitätsmoduln im Verhältnisse $1:-1$ zueinander; daher ist *nur einer wesentlich*. Als Strahl s_a benutzen wir etwa wie in Nr. 638 die von der Stelle i aus ins Endlose gezogene positive y-Achse und als Strahl s_b die von der Stelle $-i$ aus ins Endlose gezogene negative y-Achse, siehe Fig. 100. Die positive Seite von s_a ist dann die rechte, die positive Seite von s_b die linke Seite der y-Achse. Geht von z_0 nach Z ein Integrationsweg k, der s_a und s_b bzw. p_a- und p_b-mal von der positiven und bzw. q_a- und q_b-mal von der negativen Seite her überschreitet (in Fig. 100 ist $p_a = 1$, $q_a = 1$, $p_b = 0$, $q_b = 2$*)), so ergibt sich nach Nr. 638:

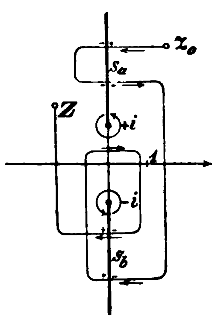


Fig. 100.

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg} Z - \operatorname{arc\,tg} z_0 + (p_1 - q_1 - p_2 + q_2)\pi,$$

insbesondere für $z_0 = 0$:

$$\int_{0}^{Z} \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg} Z + (p_1 - q_1 - p_2 + q_2)\pi.$$

Es liegt hier, wie gesagt, nur ein wesentlicher Periodizitätsmodul π vor. Er ist *reell*, und dieser Umstand ist der Grund, weshalb wir sogleich bei der allerersten Betrachtung des Arkustangens im reellen Gebiete (in Nr. 12) auf die Vieldeutigkeit gestoßen waren.

653. Die Vielwertigkeit der Amplitude. Ehe wir andere Beispiele von mehrwertigen Funktionen bringen, beschäftigen wir uns genauer mit der Festlegung der Ampli-

*) In Fig. 100 wie auch in der nächsten Fig. 101 haben wir dem Wege nur der Deutlichkeit halber eine möglichst regelmäßige Gestalt gegeben. Wesentlich sind ja nur die Übergangsstellen über s_a und s_b bzw. s.

tude ω einer komplexen Zahl z. Nach Nr. 355 ist diese Amplitude nur bis auf additive ganze Vielfache von 2π bestimmt.

Wir stellen uns vor, einer bestimmten Stelle z_0 sei eine bestimmte Amplitude ω_0 vorgeschrieben, etwa dadurch, daß wir die Vorschrift machen, daß ω_0 zwischen $-\pi$ und $+\pi$ (oder in irgend einem anderen Intervalle von der Größe 2π) liegen soll. Bewegt sich alsdann ein Punkt von z_0 aus *stetig* in eine andere Lage Z, ohne dabei durch den Nullpunkt $z = 0$ hindurchzugehen, so legt der zugehörige Radiusvektor einen ganz bestimmten positiven oder negativen Drehwinkel φ zurück. Alsdann können wir festsetzen, daß Z die Amplitude $\omega = \omega_0 + \varphi$ haben soll. Siehe Fig. 101.

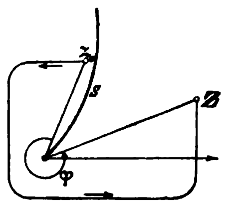


Fig. 101.

Jedoch diese Festsetzung ist nicht unabhängig von der Art des Weges auf dem wir von z_0 nach Z gelangen. Man erkennt vielmehr: Ist der soeben eingeschlagene Weg von z_0 nach Z so beschaffen, daß der Radiusvektor keine volle Umdrehung um die Stelle $z = 0$ macht, so führt ein anderer Weg von z_0 nach Z, bei dem er k volle positive (oder negative) Umdrehungen um $z = 0$ vollendet, zu der Amplitude $\omega + 2k\pi$ (bzw. $\omega - 2k\pi$). Die Mehrwertigkeit der Amplitude beruht also auf der Möglichkeit, volle Umläufe um die Stelle $z = 0$ auszuführen. Daher können wir nur dadurch zu einer einwertigen Festsetzung der Amplitude kommen, daß wir derartige Umläufe unmöglich machen. Dies geschieht, indem wir von der Stelle $z = 0$ aus eine Grenzlinie s ziehen, die stetig ist, sich nicht selbst schneidet und bis ins Endlose verläuft. Darf der Weg die Grenze s nicht überschreiten, *so hat jede Stelle z eine bestimmte Amplitude ω, sobald einer bestimmten Stelle z_0 eine bestimmte Amplitude ω_0 vorgeschrieben worden ist.*

Ändert sich nun die Stelle z stetig, so gilt dasselbe von ihrer Amplitude, jedoch nicht mehr beim Überschreiten der Grenze s. Denn wenn wir wieder diejenige Seite von s, die auf einem positiven Umlaufe um $z = 0$ zuerst getroffen wird, die *positive Seite* von s nennen, so hat eine Stelle auf der

positiven Seite von s eine Amplitude, die um 2π größer ist als die Amplitude auf der negativen Seite von s.

Es ist also s die Grenzlinie eines einfach zusammenhängenden Bereiches, innerhalb dessen die Amplitude ω überall eindeutig definiert ist und zwar so, daß sich ω darin stetig mit z ändert.

Gehen wir dagegen von z_0 nach z auf einem Wege, der die Grenzlinie s insgesamt p-mal von der positiven und q-mal von der negativen Seite her überschreitet, und addieren wir wiederum zu ω_0 den Gesamtwinkel, den dabei der Radiusvektor zurücklegt, so finden wir als Amplitude von z statt des Wertes ω den Wert $\omega + 2(p - q)\pi$.

Jeder Stelle z kommt demnach eine bestimmte Amplitude zu, sobald wir angegeben haben, wie oft beim Übergange von z_0 nach z die Grenzlinie s von der positiven und von der negativen Seite her überschritten worden ist. Insbesondere können wir durch genügend viele Überschreitungen von s erreichen, daß die Amplitude von z einem beliebig festgesetzten Intervalle von der Größe 2π angehört.

Die Stelle $z = 0$ selbst ist für die Amplituden *singulär*. Denn für sie ist die Amplitude absolut unbestimmt, oder auch: Für sie hängt die Amplitude ganz davon ab, aus welcher Richtung her wir die Stelle z in die Stelle $z = 0$ rücken lassen.

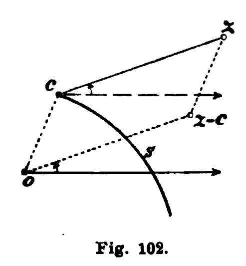


Fig. 102.

Tritt in einer Formel statt der Amplitude von z etwa die von $z - c$ auf, wobei c eine konstante komplexe Zahl bedeute, so ist zu beachten, daß die Stelle $z - c$ aus den Stellen z und c nach Nr. 356 durch eine Konstruktion vermittels eines Parallelogramms gewonnen wird, siehe Fig. 102. Man sieht daraus, daß die Amplitude von $z - c$ der Winkel ist, den der Strahl von der festen Stelle c nach der beweglichen Stelle z mit der positiven x-Achse bildet. Hier ist nun dasselbe wie vorhin über die Mehrwertigkeit der Amplitude zu sagen. Da die Stelle c jetzt die Rolle spielt, die vorher der Stelle Null zufiel, so erkennen wir: Wird von c aus eine sich selbst nicht schneidende stetige Grenzlinie s bis ins Endlose gezogen und

außerdem genau festgesetzt, in welchem Intervalle die Amplitude ω_0 von $z_0 - c$ für eine bestimmt gewählte Stelle z_0 gewählt werden soll, so gehört zu jeder Stelle z eine bestimmte Amplitude ω von $z - c$, sobald die Grenzlinie s nicht überschritten werden darf. Gelangt man dagegen von z_0 nach z auf einem solchen Wege, der s insgesamt p-mal von der positiven und q-mal von der negativen Seite her überschreitet, so ist die Amplitude ω durch $\omega + 2(p - q)\pi$ zu ersetzen.

654. Die allgemeine Potenz. Nach dem Beispiele in Nr. 651 ist allgemein:

(1) $$\ln z = \ln \varrho + i\omega,$$

wenn $\ln \varrho$ den reellen Logarithmus des absoluten Betrages ϱ von z und ω die in irgend einem Intervalle gewählte Amplitude von z bedeutet. Denn es braucht dann die additive Konstante $2ik\pi$ nicht angegeben zu werden, da sie schon durch die Unbestimmtheit der Definition der Amplitude eingeführt wird.

Nun *definieren* wir, falls m irgend eine bestimmte *reelle* Zahl ist, die *Potenz* z^m durch die Formel:

(2) $$z^m = (e^{\ln z})^m = e^{m \ln z}.$$

Aus ihr folgt nach (1):

(3) $$z^m = \varrho^m e^{im\omega} = \varrho^m(\cos m\omega + i \sin m\omega).$$

Dabei bedeutet ϱ^m den absoluten Betrag von z^m, d. h. den einzigen reellen positiven Wert, den die m^{te} Potenz der positiven Zahl ϱ nach Nr. 5 hat. Wegen der Vielwertigkeit der Amplitude ω ist somit *die m^{te} Potenz von z eine unendlich vieldeutige Funktion von z*, sobald m nicht etwa eine rationale Zahl ist. Wenn dagegen $m = r : n$ ist, wo r und n zwei ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler bedeuten und n stets positiv angenommen werden darf, so bleibt der Wert (3) ungeändert, wenn ω um $2n\pi$ zunimmt, weil dann $m\omega$ um $2r\pi$ wächst. Also ist dann die Potenz nur noch eine n-wertige Funktion von z, indem ihre n Werte aus

(4) $$z^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{z}^{\,r} = \sqrt[n]{\varrho}^{\,r}\left(\cos \frac{r\omega}{n} + i \sin \frac{r\omega}{n}\right)$$

hervorgehen, sobald man irgend eine der Amplituden ω von z benutzt und außer ihr die $n-1$ Amplituden $\omega+2\pi$, $\omega+4\pi$, $\ldots\ \omega+2(n-1)\pi$.

Kehren wir zum allgemeinen Falle (3) zurück. Um die Funktion einwertig zu machen, müssen wir die Amplitude nach der Methode der letzten Nummer durch eine von $z=0$ aus gezogene Grenzlinie s einwertig machen und außerdem einer bestimmten Stelle z_0 eine bestimmte Amplitude ω_0 beilegen. In dem so gewonnenen einfach zusammenhängenden Bereiche mit der Grenze s ist die Funktion z^m einwertig und nach der Definition (2) überdies monogen, da $\ln z$ und e^z monogen sind.

Da die Regel für die Differentiation einer Funktion von einer Funktion nach Nr. 625 auf die Formel (2) anwendbar ist, so gibt sie:

$$\frac{dz^m}{dz}=e^{m\ln z}\cdot\frac{m}{z}=m\frac{z^m}{z}.$$

Wir dürfen hierfür kürzer

$$\frac{dz^m}{dz}=mz^{m-1} \tag{5}$$

schreiben, sobald wir z^{m-1} analog (3) durch

$$z^{m-1}=\varrho^{m-1}e^{i(m-1)\omega}=\varrho^{m-1}[\cos(m-1)\omega+i\sin(m-1)\omega] \tag{6}$$

definieren und hierin die Amplitude ω in demselben Bereiche wie für die Formel (3) wählen. *Die Regel für die Differentiation einer Potenz mit konstantem reellen Exponenten (Nr. 38) gilt also auch dann, wenn die Basis komplex ist.*

Durch Einsetzen von $\varrho(\cos\omega+i\sin\omega)$ für z folgt noch aus (3):

$$(\cos\omega+i\sin\omega)^m=\cos m\omega+i\sin m\omega, \tag{7}$$

d. h. *die Moivresche Formel (Nr. 358) gilt für beliebige reelle Exponenten.*

655. Die konforme Abbildung $w=\sqrt[n]{z}$. Ist der Exponent m insbesondere der reziproke Wert einer *ganzen positiven Zahl n*, so ergibt sich, wie wir sahen, eine gerade n-wertige Funktion, nämlich nach (4) in voriger Nummer die n^{te} Wurzel von z:

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\varrho}\,e^{i\frac{\omega}{n}}=\sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\omega}{n}+i\sin\frac{\omega}{n}\right), \tag{1}$$

die eben für alle möglichen Amplituden ω von z doch nur n verschiedene Werte deshalb annimmt, weil $\omega : n$ gerade um 2π wächst, also der Kosinus und Sinus ungeändert bleiben, sobald ω um $2n\pi$ zunimmt. Führen wir wie in voriger Nummer die Grenzlinie s ein, so erhalten wir einen einfach zusammenhängenden Bereich, in dem die n^{te} Wurzel von z eine eindeutige und monogene Funktion von z ist.

Sie vermittelt nach Nr. 626 eine *konforme Abbildung* der z-Ebene in der w-Ebene. In der z-Ebene sind ω und ϱ die

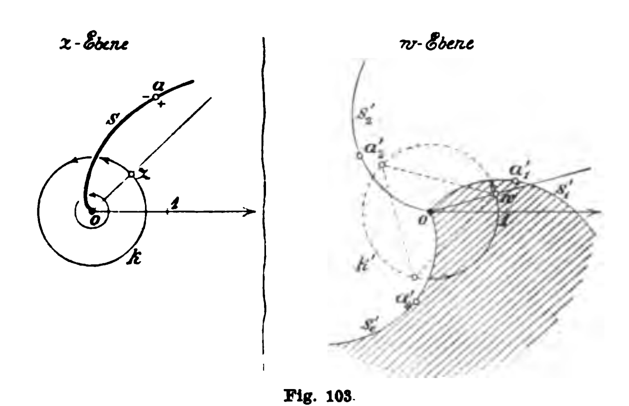


Fig. 103.

Polarkoordinaten. Benutzen wir auch in der w-Ebene Polarkoordinaten φ und r, indem wir setzen:

$$w = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so ist nach (1):

$$(2) \qquad r = \sqrt[n]{\varrho}, \qquad \varphi = \frac{\omega}{n},$$

und das ist der einfachste reelle Ausdruck dieser konformen Abbildung. Man sieht, daß die Kreise $\varrho =$ konst. als Kreise $r =$ konst. und die Strahlen $\omega =$ konst. als Strahlen $\varphi =$ konst. abgebildet werden. Aber die ganze z-Ebene wird nur auf einen Teil der ω-Ebene abgebildet. Ist nämlich α die Amplitude einer an der positiven Seite der Grenzlinie s gelegenen Stelle a des Bereiches in der z-Ebene, siehe Fig. 103 (worin $n = 3$ gewählt ist), so hat dieselbe Stelle auf der negativen Seite von s nach Nr. 653 die Amplitude $\alpha - 2\pi$. Durchläuft also z einen Kreis k um den Nullpunkt, so entspricht diesem

Kreise nur der n^{te} Teil des Bildkreises k' in der w-Ebene. Lassen wir nämlich die Stelle a an der positiven Seite der Grenze s entlang gehen, so beschreibt der Bildpunkt in der w-Ebene eine ebenfalls vom Nullpunkte ausgehende und sich selbst nicht schneidende stetige und ins Endlose laufende Linie s_1', das Bild von s. Aber wenn die Stelle a an der negativen Seite von s entlang geht, so sind alle Amplituden um 2π kleiner, d. h. dann beschreibt der Bildpunkt diejenige Linie s_0' der w-Ebene, die aus s_1' hervorgeht, wenn wir s_1' um den negativen Winkel $-2\pi : n$ um den Nullpunkt drehen. *Jede Stelle z des durch s begrenzten Bereiches der z-Ebene hat ihr Bild w zwischen s_0' und s_1'.* Der Bildbereich ist in Fig. 103 schraffiert.

Gestatten wir dagegen der Stelle z, die Grenze s zu überschreiten und zwar zunächst nur einmal von der positiven Seite her, so tritt an die Stelle von ω der Wert $\omega + 2\pi$, d. h. die Formeln (2) sind dann durch

$$r = \sqrt[n]{\varrho}, \qquad \varphi = \frac{\omega}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

zu ersetzen. Dies bedeutet: Alle Bildpunkte w sind jetzt um den Winkel $2\pi : n$ um den Nullpunkt der w-Ebene herumzudrehen. Oder: die ganze z-Ebene derjenigen Stellen z, zu denen wir nach einmaliger positiver Überschreitung von s gelangt sind, wird konform abgebildet auf dasjenige Gebiet, das einerseits von s_1' und andererseits von der Kurve s_2' begrenzt wird, die aus s_1' durch Drehung um den Winkel $2\pi : n$ hervorgeht.

So können wir fortfahren: Durch fortgesetzte Drehung um jeweils $2\pi : n$ entstehen insgesamt n kongruente Linien $s_0', s_1', s_2' \ldots s_{n-1}'$. Sie teilen die w-Ebene in n kongruente Gebiete. *Die n-wertige Funktion $w = \sqrt[n]{z}$ vermittelt eine solche konforme Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene, bei der die ganze z-Ebene auf jedes einzelne der n Gebiete abgebildet wird. Die Abbildung ist also n-deutig. Alle n Bildpunkte w einer Stelle z bilden ein regelmäßiges n-Eck, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt der w-Ebene ist.* Vgl. insbesondere die n^{ten} Einheitswurzeln in Nr. 358.

Noch sei ausdrücklich bemerkt: Haben wir für eine Stelle z bei bestimmter Auswahl ihrer Amplitude ω den zugehörigen

Wert der n^{ten} Wurzel w nach (1) berechnet und gehen wir nun von z aus auf einem Wege, der s einmal positiv überschreitet, d. h. auf einem einmaligen positiven Umlaufe um die Stelle $z = 0$, nach derselben Stelle z zurück, *so geht der neue Wert der Wurzel aus dem alten durch Multiplikation mit dem Faktor* $e^{i\pi:n}$ *hervor.*

Die Stelle $z = 0$ selbst ist insofern zwar von singulärer Natur, als hier die Amplitude absolut unbestimmt wird (vgl. Nr. 653), aber immerhin bleiben bei der Annäherung von z an den Nullpunkt der Kosinus und Sinus in (1) endlich, während $\sqrt[n]{\varrho}$ nach Null strebt. *Also hat* $\sqrt[n]{z}$ *für* $\lim z = 0$ *den Grenzwert Null.* Die Stelle $z = 0$ ist die einzige Stelle der Ebene, der nur *ein* Wert der n^{ten} Wurzel zukommt, während schon in unmittelbarer Nähe von $z = 0$ stets n Werte der Wurzel auftreten. Daher heißt die Stelle $z = 0$ die *Verzweigungsstelle der Funktion* $\sqrt[n]{z}$.

656. Die Funktion $\sqrt{(z-a)(z-b)}$. Wenn wir die Amplitude einer Zahl c mit ampl. c bezeichnen, so gibt (1) in voriger Nummer:

$$\sqrt{z-a} = \sqrt{|z-a|}\,e^{\frac{1}{2}i\,\text{ampl.}(z-a)},$$
$$\sqrt{z-b} = \sqrt{|z-b|}\,e^{\frac{1}{2}i\,\text{ampl.}(z-b)}.$$

Also ist die Quadratwurzel

$$(1)\quad w = \sqrt{(z-a)(z-b)} = \sqrt{|(z-a)(z-b)|}\;e^{\frac{1}{2}i[\text{ampl.}(z-a)+\text{ampl.}(z-b)]}.$$

Hierbei ist die Quadratwurzel des absoluten Betrages von $(z-a)(z-b)$ *positiv* zu nehmen.

Diese Funktion w ist nicht eindeutig, denn die Amplituden können um ganze Vielfache von 2π geändert werden, so daß der Wert von w mit dem Faktor

$$e^{\frac{1}{2}i\cdot 2k\pi} = e^{ik\pi} = \cos k\pi + i\sin k\pi$$

multipliziert werden darf, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Dieser Faktor ist gleich $+1$, wenn k gerade ist, und gleich -1, wenn k ungerade ist. *Also hat die Wurzel gerade zwei Werte, und diese Werte unterscheiden sich bloß durch ihr Vorzeichen.*

Um einen einfach zusammenhängenden Bereich zu gewinnen, in dem die Quadratwurzel eine eindeutige und alsdann offenbar monogene Funktion von z wird, erinnern wir uns an die Bemerkungen, die in Nr. 653 über die Amplitude von $z - c$ gemacht wurden. Demnach ziehen wir von den Stellen $z = a$ und $z = b$ aus stetige sich nicht schneidende Grenzlinien s_a bzw. s_b bis ins Endlose. Geben wir alsdann für eine bestimmte Stelle z_0 den Größen $z_0 - a$ und $z_0 - b$ bestimmte Amplituden α und β, so daß für sie nach (1) die Funktion w den bestimmten Wert

$$(2) \qquad w_0 = \sqrt{|(z_0 - a)(z_0 - b)|}\, e^{\frac{1}{2} i(\alpha + \beta)}$$

hat, so gehören auch zu jeder andern Stelle z bestimmte Werte der Amplituden von $z - a$ und $z - b$, also auch bestimmte Werte der Quadratwurzel w, vorausgesetzt nämlich, daß wir von z_0 aus nach z auf irgend einem solchen Wege gelangen, der weder s_a noch s_b überschreitet.

Wenn wir dagegen von z_0 nach z auf einem Wege übergehen, der s_a bzw. s_b insgesamt p_a- bzw. p_b-mal von der positiven Seite her und insgesamt q_a- bzw. q_b-mal von der negativen Seite her überschreitet, so ist der Wert der Funktion an der Stelle z ein anderer geworden. Der vorige Wert w nämlich ist jetzt mit

$$e^{\frac{1}{2} i[(p_a - q_a) + (p_b - q_b)] 2\pi},$$

d. h. mit

$$e^{i[p_a + p_b - q_a - q_b]\pi}$$

zu multiplizieren. Diese Zahl ist gleich $+1$ oder -1, je nachdem die in der eckigen Klammer stehende ganze Zahl gerade oder ungerade ist.

Die Stellen $z = a$ und $z = b$ sind die einzigen, an denen sich die beiden Werte der Wurzel w nicht voneinander unterscheiden, da hier $w = 0$ wird. Deshalb heißen die Stellen a und b die *Verzweigungsstellen der Funktion* $\sqrt{(z - a)(z - b)}$.

Ganz entsprechend erkennen wir, daß

$$w = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2) \cdots (z - c_n)}$$

eine zweiwertige Funktion ist, die jedoch einwertig und monogen wird, sobald wir von den Stellen $c_1, c_2, \cdots c_n$ aus Grenz-

linien $s_1, s_2, \cdots s_n$ bis ins Endlose ziehen. Die beiden Werte der Funktion unterscheiden sich nur durchs Vorzeichen. Haben wir an einer Stelle z die Amplituden von $z - c_1, z - c_2, \cdots z - c_n$ bestimmt gewählt, so hat dort auch

$$w = \sqrt{|(z - c_1)(z - c_2)\cdots(z - c_n)|}\, e^{\frac{1}{2} i \Sigma \text{ampl.}(z - c_i)}$$

einen bestimmten Wert. Gehen wir nun von z aus auf einem Wege, der $s_1, s_2, \cdots s_n$ von der positiven Seite bzw. p_1-, p_2-, $\cdots p_n$-mal und von der negativen Seite bzw. q_1-, q_2-, $\cdots q_n$-mal überschreitet, zur selben Stelle z zurück, so ist der nunmehr zu z gehörige Wert von w aus dem vorigen durch Multiplikation mit

$$e^{i(\Sigma p_i - \Sigma q_i)\pi}$$

zu gewinnen. Dieser Faktor ist gleich $+1$ oder -1. Die Stellen $c_1, c_2, \cdots c_n$ sind die einzigen, an denen beide Werte der Wurzel miteinander identisch, nämlich gleich Null sind. Sie heißen daher wieder die *Verzweigungsstellen* der Funktion.

657. Die Binomialformel. Wir haben in Nr. 654 die Potenz z^m mit Hülfe des Logarithmus definiert. Aber nach Nr. 374 steht uns auch ein anderer Weg zur Definition, wenigstens in einem gewissen Bereiche, offen. Denn es ist danach

$$z^m = [1 + (z - 1)]^m$$

mittels der Binomialreihe

$$z^m = 1 + \frac{m}{1!}(z-1) + \frac{m(m-1)}{2!}(z-1)^2 + \cdots \tag{1}$$

für $|z - 1| < 1$ darstellbar. Folglich müssen wir noch beweisen, daß dieser Wert von z^m im Bereiche $|z - 1| < 1$ mit einem derjenigen Werte übereinstimmt, die z^m nach der Definition in Nr. 654 in diesem Bereiche annimmt.

Definieren wir z^m im Bereiche $|z - 1| < 1$ durch die Formel (1), so liegt eine im Kreise um die Stelle $z = 1$ und mit dem Radius Eins überall eindeutige analytische, d. h. monogene Funktion vor, deren Ableitung nach Satz 19, Nr. 370, ist:

$$\frac{dz^m}{dz} = m\left[1 + \frac{m-1}{1!}(z-1) + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}(z-1)^2 + \cdots\right].$$

Multiplizieren wir diese Formel mit z oder $1 + (z - 1)$ und fassen wir die Glieder mit gleichhohen Potenzen von $z - 1$ zusammen, so kommt:

$$z \frac{dz^m}{dz} = m\left[1 + \frac{m}{1!}(z-1) + \frac{m(m-1)}{2!}(z-1)^2 + \cdots\right],$$

also nach (1):

$$\frac{dz^m}{dz} = m\frac{z^m}{z}.$$

Folglich ist

$$\frac{d \ln z^m}{dz} = \frac{m}{z}, \text{ d. h. } \ln z^m = m \ln z + \text{konst.}$$

oder:

(2) $$z^m = \text{konst.}\, e^{m \ln z}.$$

Für $z = 1$ aber gibt die Formel (1) den Funktionswert Eins. Bezeichnet der Logarithmus in (2) den *Hauptwert*, so ist auch $\ln 1 = 0$, d. h. der konstante Faktor gleich Eins. Die Formel (2) deckt sich daher mit der Definitionsformel (2) in Nr. 654, sobald der Logarithmus darin den Hauptwert bedeutet.

658. Die Funktion arc sin z. Im Reellen ist:

(1) $$\operatorname{arc} \sin z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Diese Definition wollen wir auch im komplexen Bereiche benutzen; es ist dann leicht, den Arkussinus durch den Logarithmus auszudrücken. Denn die Formel (1) in Nr. 377, nach der

(2) $$\operatorname{arc} \operatorname{tg} w = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iw}{1 - iw}$$

ist und die wir in Nr. 638 unter (5) von neuem bewiesen haben, gilt auch dann, wenn wir den Logarithmus und den Arkustangens wie in den Beispielen zu Nr. 651 und 652 in allgemeinster Weise, d. h. als unendlich vieldeutige Funktionen auffassen, weil der Logarithmus alsdann bis auf additive ganze Vielfache von $2i\pi$ und der Arkustangens bis auf additive ganze Vielfache von π bestimmt ist. Wenn wir nun in (2) für w den Wert $z : \sqrt{1 - z^2}$ einsetzen, so kommt nach (1):

$$\operatorname{arc} \sin z = \frac{1}{2i} \ln \frac{\sqrt{1 - z^2} + iz}{\sqrt{1 - z^2} - iz}.$$

Der Numerus ist das Quadrat von $iz + \sqrt{1 - z^2}$. Also folgt schließlich:

(3) $$\arcsin z = -i \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Den Bereich für z können wir bekanntlich so begrenzen, daß sowohl die Quadratwurzel als auch der Logarithmus daselbst eindeutig und monogen wird, folglich auch arc sin z. Alsdann ergibt sich als die Ableitung, da wir die Regel der Differentiation einer Funktion von einer Funktion nach Nr. 625 anwenden dürfen:

$$\frac{d \arcsin z}{dz} = \frac{-i}{iz + \sqrt{1 - z^2}}\left(i - \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\right)$$

oder:

(4) $$\frac{d \arcsin z}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}},$$

also *dieselbe Ableitung wie im reellen Bereiche.*

Ferner folgt aus (3), wenn arc sin z mit w bezeichnet wird:

$$iz + \sqrt{1 - z^2} = e^{iw}$$

und hieraus durch Auflösung nach z:

$$z = \frac{1}{2i}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right),$$

d. h. nach (6) in Nr. 373:

(5) $$z = \sin w.$$

Mithin ist $w = \arcsin z$ auch im komplexen Bereiche die zu $z = \sin w$ inverse Funktion.

Aus (3) erhellt, daß arc sin z eine unendlich vieldeutige Funktion ist. Nehmen wir an, daß zu den Werten, die sie für ein bestimmtes z erhält, die Werte w und w' gehören, so muß nach (5)

$$\sin w' - \sin w = 0$$

sein. Da nun die goniometrischen Formeln auch im komplexen Bereiche nach Nr. 373 gelten, so folgt:

$$\cos \frac{w' + w}{2} \sin \frac{w' - w}{2} = 0,$$

d. h. wegen der in Nr. 373 über das Verschwinden des Sinus und des Kosinus gemachten Bemerkung:

$$w' = -w + (2k+1)\pi \quad \text{oder} \quad w' = w + 2k\pi,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl ist.

Alle Werte, die arc sin z für ein bestimmtes z erreicht, gehen also aus einem Werte hervor, wenn man entweder zu diesem ein gerades Vielfaches von π oder zu dem entgegengesetzten ein ungerades Vielfaches von π addiert.

Die Ergebnisse über die Vielwertigkeit von arc sin z sind also genau dieselben wie im reellen Bereiche, siehe Nr. 12 unter c).

In entsprechender Weise läßt sich die Funktion arc cos z einführen und darstellen.

659. Ein Hilfssatz. Nachdem wir auf verschiedenen Wegen zu mehrwertigen Funktionen gelangt sind, wobei wir stets erkannten, daß es möglich war, den Bereich in der z-Ebene so zu begrenzen, daß sich die Funktionen darin als eindeutige und monogene Funktionen betrachten ließen, wollen wir zum Schlusse noch einen anderen Weg skizzieren, auf dem wir ebenfalls unter Umständen zu mehrwertigen Funktionen kommen. Dabei bedürfen wir eines Hilfssatzes, der zunächst aufgestellt werden soll:

Satz 29: Gibt es im Bereiche einer monogenen Funktion $f(z)$ ein Wegstück, für dessen Punkte die Funktion $f(z)$ den Wert Null hat, so ist die Funktion überhaupt gleich Null.

Zunächst zeigen wir, daß unter den Voraussetzungen des Satzes auch $f'(z)$ den Voraussetzungen genügt, d. h. längs des Wegstückes gleich Null ist. Sind nämlich z_0 und Z zwei Stellen dieses Wegstückes l, so daß $f(z_0) = 0$ und $f(Z) = 0$ ist, so folgt, wenn wir $f'(z)$ von z_0 bis Z längs des zwischen z_0 und Z gelegenen Teiles von l integrieren, aus

$$\int_{z_0}^{Z} f'(z)\,dz = f(Z) - f(z_0)$$

sofort:

$$\int_{z_0}^{Z} f'(z)\,dz = 0.$$

Bedeutet s die positiv genommene Länge des Stückes von z_0 bis Z und ist K der kleinste Wert, den $|f'(z)|$ längs des Integrationsweges erreicht, so ist aber der absolute Betrag des Integrals nach Satz 11, Nr. 630, nicht kleiner als Ks. Daher muß $K = 0$ sein. Auf *jedem* Teile des Wegstückes l gibt es folglich eine Stelle, an der $f'(z) = 0$ ist; und da $f'(z)$ stetig ist, schließen wir: Längs des Wegstückes l ist $f'(z)$ überall gleich Null.

Weil somit auch $f'(z)$ die Voraussetzungen des Satzes 29 erfüllt, gilt dasselbe weiterhin von $f''(z)$, $f'''(z)$ usw.

Bedeutet nun z_0 irgend eine Stelle von l, so ist $f(z)$ innerhalb desjenigen Kreises k um z_0, dessen Fläche noch völlig dem Bereiche von $f(z)$ angehört, nach Satz 19, Nr. 643, als analytische Funktion

$$(1) \qquad f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

darstellbar. Dabei haben die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots c_n, \ldots$ die in Nr. 643 unter (5) angegebenen Werte und sind folglich sämtlich gleich Null, weil $f(z_0), f'(z_0), \ldots f^{(n)}(z_0), \ldots$, wie bewiesen, gleich Null sind. Also ist $f(z)$ nach (1) innerhalb jenes Kreises k überall gleich Null.

Macht die Fläche dieses Kreises k schon den ganzen Bereich der Funktion $f(z)$ aus, so ist Satz 29 bewiesen. Andernfalls stellen wir dieselbe Betrachtung für *alle* Stellen z_0 von l an, so daß $f(z)$ innerhalb aller bis an den Rand gehender Kreise um die Stellen von l überall verschwindet. Ist hiermit der ganze Bereich von $f(z)$ noch immer nicht erschöpft, so bedenken wir, daß für irgend eine Stelle z_1 innerhalb irgend eines dieser Kreise $f(z)$ nebst allen Ableitungen verschwindet, daher die Darstellung von $f(z)$ als analytische Funktion von $z - z_1$ in der Umgebung von z_1 ebenso ergibt, daß $f(z)$ innerhalb desjenigen Kreises um z_1 überall gleich Null ist, der bis an den Rand des Bereiches geht. Dabei kann z_1 so gewählt werden, daß der Kreis um z_1 über den schon vorher ermittelten Teil des Bereiches hinausreicht, in dem $f(z)$ verschwindet. Wir können also denjenigen Teil des Bereiches, in dem $f(z)$ überall gleich Null ist, immer noch vergrößern, bis wir schließlich den ganzen Bereich erschöpft haben, womit dann der Satz 29 bewiesen ist.

Als Zusatz ergibt sich

Satz 30: Wenn die Flächen der Konvergenzkreise zweier Potenzreihen

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

und

$$\gamma_0 + \gamma_1(z - z_1) + \cdots + \gamma_n(z - z_1)^n + \cdots$$

mit den Mittelpunkten z_0 und z_1 ein Gebiet gemein haben und die Werte beider Reihen an jeder Stelle z längs eines in diesem Gebiete gelegenen Wegstückes l übereinstimmen, so haben sie überhaupt in diesem gemeinsamen Gebiete übereinstimmende Werte.

Denn jede Reihe definiert innerhalb ihres Konvergenzkreises eine monogene Funktion $f(z)$ bzw. $\varphi(z)$, so daß $f(z) - \varphi(z)$ im gemeinsamen Bereiche monogen ist und die Voraussetzungen des Satzes 29 erfüllt, also $f(z) - \varphi(z)$ überall im gemeinsamen Bereiche verschwindet.

Der Satz 30 enthält als speziellen Fall den Satz 21 von Nr. 371.

660. Analytische Fortsetzung einer Funktion. Wir wollen nach diesen Vorbereitungen annehmen, es liege eine Potenzreihe

(1) $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$

vor. Es ist z_0 der Mittelpunkt ihres Konvergenzkreises k_0. Innerhalb k_0 ist alsdann durch (1) eine monogene Funktion $f(z)$ definiert. Es kann nun sein, daß der Bereich dieser Funktion $f(z)$ über den Kreis k_0 hinausgeht, und wir wollen zeigen, durch welches Verfahren sich dies feststellen läßt.

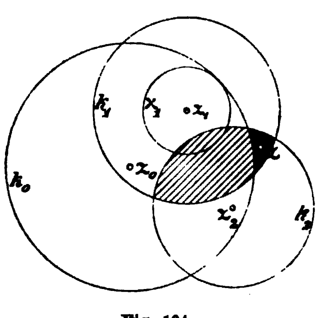


Fig. 104.

Es sei z_1 irgend eine Stelle innerhalb k_0, siehe Fig. 104. Nach Satz 19, Nr. 643, ist $f(z)$ in der Form einer Potenzreihe

(2) $$a_0 + a_1(z - z_1) + a_2(z - z_1)^2 + \cdots$$

darstellbar innerhalb desjenigen größten Kreises k_1 um z_1 als Mitte, der noch vollständig in dem Bereiche von $f(z)$ liegt. Nun kennen wir den Umfang des Bereiches ja noch nicht, aber sicher ge-

hört der Kreis k_0 zum Bereiche; es steht also fest, daß die neue Reihe (2) gewiß innerhalb desjenigen Kreises $\varkappa_1$ um z_1 als Mitte konvergiert, der noch vollständig in k_0 enthalten ist.

Der Radius des wahren Konvergenzkreises k_1 von (2) muß also mindestens so groß wie der von $\varkappa_1$ sein.

Es ist nun wichtig, zu bemerken, daß die Form der Reihe (2) durch die gegebene Reihe (1) vollständig bestimmt ist. Denn innerhalb $\varkappa_1$ stellen (1) und (2) überall dieselbe Funktion $f(z)$ dar. Nun ist einerseits nach (2):

$$a_0 = f(z_1), \quad a_1 = \frac{1}{1!}f'(z_1), \quad a_2 = \frac{1}{2!}f''(z_1), \ldots,$$

vgl. (5) in Nr. 643, und andererseits lassen sich $f(z_1)$, $f'(z_1)$, $f''(z_1)$, ... aus der Reihe (1) und den durch gliedweise Differentiation von (1) hervorgehenden Reihen durch Einsetzen von $z = z_1$ berechnen, nach Satz 19, Nr. 370. Folglich ist:

$$(3) \quad \begin{cases} a_0 = c_0 + c_1(z_1 - z_0) + c_2(z_1 - z_0)^2 + \cdots, \\ a_1 = \frac{1}{1!}[1c_1 + 2c_2(z_1 - z_0) + 3c_3(z_1 - z_0)^2 + \cdots], \\ a_2 = \frac{1}{2!}[1 \cdot 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(z_1 - z_0) + 3 \cdot 4c_4(z_1 - z_0)^2 + \cdots], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die neue Reihe (2) ist also eine ganz bestimmte, sobald die Reihe (1) gegeben ist.

Wie gesagt, kann nun der Konvergenzkreis k_1 der Reihe (2) über den Kreis k_0 hinausgreifen. Nehmen wir an, daß wir diesen wahren Konvergenzkreis k_1 ermitteln könnten, so würden wir dasselbe Verfahren für *alle* Stellen z_1 im Innern von k_0 anwenden und so den Bereich, in dem die Funktion $f(z)$ bekannt wäre, durch die über k_0 hinausreichenden Flächenstücke aller Konvergenzkreise k_1 erweitern. Hierbei ist aber noch ein sehr wesentlicher Punkt zu erörtern:

Ist z_2 eine andere Stelle innerhalb k_0, ferner

$$(4) \qquad b_0 + b_1(z - z_2) + b_2(z - z_2)^2 + \cdots$$

die zugehörige Potenzreihe und k_2 ihr Konvergenzkreis, und greifen k_1 und k_2 beide über k_0 hinaus, so kann es sein, daß die Flächen von k_1 und k_2 *außerhalb* k_0 ein Gebiet gemein haben. Es soll nun bewiesen werden, daß die Reihen (2) und

(4) an jeder Stelle z dieses Gebietes übereinstimmende Werte haben. Für diesen Beweis ist der Umstand ausschlaggebend, *daß die beiden Kreise k_1 und k_2, sobald sie ein Flächenstück außerhalb k_0 gemein haben, stets auch ein Flächenstück innerhalb k_0 gemein haben.* (Vgl. die obige Figur.) In diesem letzten Teile aber haben die Reihen (2) und (4) an jeder Stelle z denselben Wert wie die Reihe (1), also miteinander übereinstimmende Werte, woraus nach Satz 30 der letzten Nummer folgt, daß die Reihen (2) und (4) auch in dem *außerhalb* k_0 gelegenen gemeinsamen Gebiete an jeder Stelle z übereinstimmende Werte haben.

Die geschilderte Erweiterung des Bereiches der ursprünglich nur durch die Potenzreihe (1) innerhalb k_0 definierten monogenen Funktion $f(z)$ führt also gewiß nirgends zu Widersprüchen. Man nennt das eingeschlagene Verfahren die *analytische Fortsetzung der Funktion.*

Durch die Hinzufügung aller Konvergenzkreis-Flächen k_1, $k_2, \ldots$, die zu allen Mittelpunkten z_1, z_2, ... innerhalb der Kreisfläche k_0 gehören, haben wir so einen größeren Bereich von $f(z)$ gewonnen, dessen Rand r nunmehr aber nicht notwendig ein Kreis, sondern irgend eine geschlossene Linie sein wird.

Genau dasselbe Verfahren der analytischen Fortsetzung können wir jetzt auf den neuen Bereich anwenden. Z. B. wählen wir eine Stelle z_3 *außerhalb* k_0 und *innerhalb* k_1 und leiten aus der innerhalb k_1 gültigen Reihe (2) die Reihe

$$(5) \qquad d_0 + d_1(z - z_3) + d_2(z - z_3)^2 + \cdots$$

für die Umgebung von z_3 ab, indem wir ihre Koeffizienten d_0, d_1, d_2, ... aus den Koeffizienten a_0, a_1, a_2, ... der Reihen (2) und aus $z_3 - z_1$ ebenso berechnen, wie a_0, a_1, a_2, ... vermöge (3) aus c_0, c_1, c_2, ... und aus $z_1 - z_0$ gewonnen wurden. Falls der wahre Konvergenzkreis k_3 der Reihe (5) über den Rand r hinausgreift, gelangen wir so zu einer abermaligen Erweiterung des Bereiches der monogenen Funktion $f(z)$.

Aber auf diese Weise ist es sehr wohl denkbar, daß wir zu einem Widerspruche kommen: Ist z_4 z. B. eine andere Stelle innerhalb r, etwa innerhalb k_2 und außerhalb k_1, und hat man für sie aus der Reihe (4), die innerhalb k_2 gilt, die neue Reihe

$$(6) \qquad e_0 + e_1(z - z_4) + e_2(z - z_4)^2 + \cdots$$

gewonnen, deren wahrer Konvergenzkreis k_4 über r hinausgeht, soist es denkbar, daß die Kreise k_3 und k_4 *außerhalb* r ein Gebiet gemein haben. Wir können nun aber nicht stets beweisen, daß die Reihen (5) und (6) an jeder Stelle z dieses Gebietes übereinstimmende Werte haben. Denn hier liegt die Sache nicht mehr so wie vorhin bei den Kreisen k_1 und k_2 in Fig. 104. Die beiden Kreise k_3 und k_4 können sehr wohl außerhalb des Randes r ein Gebiet gemein haben, ohne zugleich innerhalb r ein Gebiet gemein zu haben, wie es Fig. 105 zeigt, weil der Rand r nicht gerade ein Kreis zu sein braucht. Infolgedessen versagt die frühere Beweismethode für die Übereinstimmung der beiden Reihen (5) und (6) im gemeinsamen Gebiete außerhalb r.

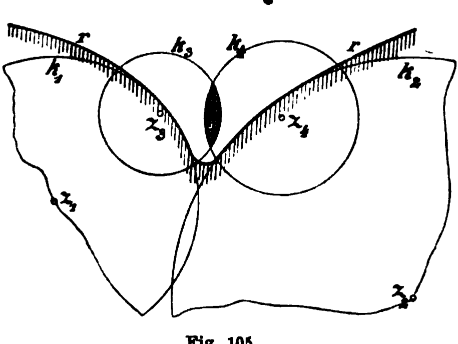


Fig. 105.

Es ist also sehr wohl denkbar — und kommt tatsächlich vor —, daß die analytische Fortsetzung dazu führt, daß wir für eine Stelle z mehrere Reihen finden, die *verschiedene* Werte haben. Dies wird sich in noch stärkerem Maße bei weiterer Fortsetzung zeigen können. Wir sehen also, *daß auch die analytische Fortsetzung einer monogenen Funktion zu einer mehrwertigen Funktion führen kann.*

Wir wollen dies jedoch nicht an Beispielen durchführen, da das Verfahren der analytischen Fortsetzung bei der praktischen Ausführung deshalb Schwierigkeiten bereitet, weil man die unzählig vielen Koeffizienten der neuen Reihen berechnen muß. Es gelingt allerdings in manchen Fällen, sie durch Kunstgriffe zu ermitteln. Wir begnügen uns damit, allgemein gezeigt zu haben, daß man durch dieses *Weierstraß*sche Verfahren zu mehrwertigen Funktionen gelangen kann.

Einleitung zu dem Anhange von A. Harnack.

Der auf S. 532 beginnende Anhang hat eine solche Bedeutung in der mathematischen Literatur erlangt, daß sein *unveränderter* Abdruck nach dem Originale in der ersten Auflage dieses Werkes angemessen erschien. Er stellt eine knapp gehaltene Monographie über ein Spezialgebiet dar und knüpft an einige Betrachtungen des Lehrbuches in der ersten Auflage an, die teils von *Harnack* und teils von *Serret* herrührten und die wir des besseren Zusammenhanges halber erst hier als Einleitung zu *Harnacks* Anhang geben.

A. Über die Integrierbarkeit einer reellen Funktion von einer reellen Veränderlichen. Es sei $f(x)$ eine in dem endlichen Intervalle von x_0 bis $X > x_0$ überall *endliche* reelle Funktion der reellen Veränderlichen x. Wird das Intervall von x_0 bis X in beliebige n Teile $\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_n$ zerlegt und sind $x_1', x_2', \cdots x_n'$ solche Werte von x, die den Intervallen von x_0 bis $x_0 + \Delta_1$, von $x_0 + \Delta_1$ bis $x_0 + \Delta_1 + \Delta_2$ usw. angehören, so bilden wir wie in Nr. 408 die Summe:

$$(1) \qquad f(x_1')\Delta_1 + f(x_2')\Delta_2 + \cdots + f(x_n')\Delta_n.$$

Es soll nun die Frage beantwortet werden, unter welcher Bedingung diese Summe einen bestimmten endlichen Grenzwert hat, falls alle Teile $\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_n$ nach Null streben und dementsprechend die Anzahl n über jede Zahl wächst und falls überdies $x_1', x_2', \cdots x_n'$ *irgendwie* in den einzelnen n Intervallen gewählt werden. Hat die Summe (1) einen bestimmten endlichen Grenzwert, so sagen wir, daß die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle von x_0 bis $X > x_0$ *integrierbar* sei.

Wir wissen schon, daß ein bestimmter endlicher Grenzwert vorhanden ist, sobald $f(x)$ stetig ist, nach Satz 5, Nr. 408, ebenso dann, wenn $f(x)$ überall im Intervalle abgesehen von einer endlichen Anzahl von Sprungstellen stetig ist, nach Satz 13, Nr. 475. Aber wohlbemerkt wollen wir jetzt nur das Eine voraussetzen, daß $f(x)$

im Intervalle überall endlich sei. Daher können wir hier den Satz 3, Nr. 405, über die *Schwankung* der Funktion nicht anwenden. Wohl aber existiert der Begriff der Schwankung auch jetzt: Unter der Schwankung von $f(x)$ in irgend einem Teile des Gesamtintervalles von x_0 bis X verstehen wir die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Werte, den die Funktion $f(x)$ in dem Teile erreicht. Diese Schwankung ist also eine niemals negative Größe.

Sind $k_1, k_2, \cdots k_n$ die kleinsten und $g_1, g_2, \cdots g_n$ die größten Werte, die $f(x)$ in den n Teilintervallen erreicht, so liegt die Summe (1) zwischen den Summen

$$(2)\quad \varkappa = k_1 \Delta_1 + k_2 \Delta_2 + \cdots + k_n \Delta_n, \quad \gamma = g_1 \Delta_1 + g_2 \Delta_2 + \cdots + g_n \Delta_n.$$

Genau so wie in Nr. 406 verfeinern wir die Teilung Schritt für Schritt dadurch, daß wir bei jedem neuen Schritte jedes schon vorhandene Teilintervall für sich in eine beliebige Anzahl kleinerer Gebiete zerlegen und nach jedem Schritte eine auf die gewonnene Zerlegung bezügliche Summe entsprechend der Summe (1) bilden. Alsdann können wir dieselben Schlüsse wie in Nr. 406 machen, abgesehen von denjenigen, bei denen der Satz 3 von Nr. 405 über die Schwankung angewandt wurde. Wir gelangen demnach wieder zu den in Nr. 406 mit (2) und (4) bezeichneten Ungleichungen, *nicht* aber zu den Ungleichungen (3) ebenda. Danach haben auch jetzt die Größen $\varkappa_1, \varkappa_2 \cdots$ einen Grenzwert $\varkappa$ und die Größen $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$ einen Grenzwert γ, so daß die zu untersuchende Summe einem Werte zustrebt, der zwischen $\varkappa$ und γ liegt. Wir können jedoch jetzt nicht folgern, daß die Grenzwerte $\varkappa$ und γ übereinstimmen. Vielmehr müssen wir sagen: Wir sind nur dann sicher, daß die Summe (1) nach einem bestimmten endlichen Grenzwerte strebt, wenn $\varkappa = \gamma$ oder $\varkappa - \gamma = 0$ ist. Mit anderen Worten:

Die Bedingung der Integrierbarkeit besteht darin, daß der Grenzwert von

$$(3)\quad (g_1 - k_1)\Delta_1 + (g_2 - k_2)\Delta_2 + \cdots + (g_n - k_n)\Delta_n$$

gleich Null sein muß.

Ist diese Bedingung erfüllt, so folgt daraus, daß es gleichgültig ist, wo wir die Werte $x_1', x_2', \cdots x_n'$ in den n Teilgebieten wählen. Wir dürfen also der Summe (1) die speziellere Form

$$(4)\quad J = f(x_0)\Delta_1 + f(x_1)\Delta_2 + \cdots + f(x_{n-1})\Delta_n$$

geben, indem wir $x_1', x_2', \cdots x_n'$ als die Anfangswerte $x_0, x_1, \cdots x_{n-1}$ von x in den n Intervallen annehmen.

Aber da wir bisher nur solche Teilungen betrachtet haben, bei denen Schritt für Schritt jedes schon vorhandene Teilintervall für sich in neue Teile zerlegt wurde, müssen wir noch zeigen, daß

[A

die gewonnene Integrabilitätsbedingung nach sich zieht, daß auch jede auf eine andere Teilung bezügliche Summe J' denselben Grenzwert wie die Summe J hat. Demnach nehmen wir wie in Nr. 407 eine *zweite* Teilung an, die schon so weit getrieben sei, daß zwischen je zwei Teilstellen der ersten Teilung, zu der die Summe (4) gehört, mindestens eine Teilstelle der zweiten Teilung liegt. Ist J' die auf die zweite Teilung bezügliche Summe, so läßt sich J' in n Summanden $S_1, S_2, \cdots S_n$ zerlegen, von denen sich jeder auf einen der n Teile $\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_n$ der ersten Teilung bezieht, und alsdann folgt gerade so wie in Nr. 407:

$$f(x_0)\Delta_1 - (g_1 - k_1)\Delta_1 \leqq S_1 \leqq f(x_0)\Delta_1 + (g_1 - k_1)\Delta_1,$$
$$f(x_1)\Delta_2 - (g_2 - k_2)\Delta_2 \leqq S_2 \leqq f(x_1)\Delta_2 + (g_2 - k_2)\Delta_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f(x_{n-1})\Delta_n - (g_n - k_n)\Delta_n \leqq S_n \leqq f(x_{n-1})\Delta_n + (g_n - k_n)\Delta_n$$

und hieraus durch Addition, daß

$$|J' - J| \leqq (g_1 - k_1)\Delta_1 + (g_2 - k_2)\Delta_2 + \cdots + (g_n - k_n)\Delta_n$$

ist. Wenn aber die Summe (3) in der Tat den Grenzwert Null hat, so schließen wir hieraus, daß $J' - J$ ebenfalls nach Null, d. h. J' nach demselben Grenzwerte wie J strebt.

Weil $g_1 - k_1, g_2 - k_2, \cdots g_n - k_n$ die Schwankungen der Funktion $f(x)$ in den Teilintervallen $\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_n$ sind, so läßt sich die Bedingung der Integrierbarkeit so aussprechen:

Die im Intervalle von x_0 bis $X > x_0$ überall endliche Funktion $f(x)$ ist integrierbar, wenn bei irgend einer Zerlegung des Intervalles $X - x_0$ in Teilintervalle die Summe der Produkte der Größen aller Teilintervalle mit den in den Intervallen vorkommenden Schwankungen nach Null strebt, sobald man die Zerlegung fortgesetzt so verfeinert, daß alle Teilintervalle nach Null streben und dementsprechend ihre Anzahl über jede Zahl wächst.

Daß diese Bedingung bei stetigen Funktionen und bei Funktionen mit einer endlichen Anzahl von Sprungstellen erfüllt ist, bemerkten wir schon oben. Sie ist aber unter Umständen auch dann erfüllt, wenn im Intervalle von x_0 bis X unzählig viele Sprungstellen auftreten.

Es möge nämlich $f(x)$ im Intervalle von x_0 bis X überall endlich sein; doch soll das Intervall unzählig viele Sprungstellen von $f(x)$ in der Art enthalten, daß sie sich erstens in eine endliche Anzahl von Teilintervallen einschließen lassen und daß zweitens die Summe der Größen dieser Teilintervalle so klein gemacht werden kann, daß sie kleiner als eine beliebig klein gewählte positive Zahl σ wird. Ist dann G der größte und K der kleinste Wert, den $f(x)$ an irgend einer Sprungstelle haben kann, so ist

das Produkt der Teilintervalle, in denen Sprungstellen vorkommen, mit den zugehörigen Schwankungen von $f(x)$ nicht größer als $\sigma(G-K)$. Dieses Produkt aber strebt mit σ nach Null. Da außerdem für den übrigen Teil des Gesamtintervalles die Bedingung der Integrierbarkeit erfüllt ist, gilt sie folglich auch jetzt noch für das Gesamtintervall.

Ist die Bedingung der Integrierbarkeit der endlichen Funktion $f(x)$ im Intervalle von x_0 bis X erfüllt, so gilt sie auch für jeden Teil dieses Intervalles. Ist x irgend ein Wert zwischen x_0 und X, der auch gleich X sein darf, so bezeichnen wir den Grenzwert der Summe (1), die sich auf das Intervall von x_0 bis x bezieht, als das *bestimmte Integral*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{5}$$

Obgleich wir jetzt die Stetigkeit von $f(x)$ *nicht* fordern, gelten doch die früheren Sätze:

Erstens: Das Integral ist für jedes x im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ eine stetige Funktion der oberen Grenze x.

Denn wie in Nr. 410 ist

$$F(x+h) - F(x) = \lim \sum_{x}^{x+h} f(x)\,\Delta x,$$

wo die rechts stehende Summe entsprechend der Summe (1) für das Intervall von x bis $x+h$ gebildet ist, und wie damals kommt

$$kh \leqq \sum_{x}^{x+h} f(x)\,\Delta x \leqq gh,$$

wenn k den kleinsten und g den größten Wert von $f(x)$ im Intervalle von x bis $x+h$ bedeutet, vorausgesetzt, daß $h > 0$ ist. Im Falle $h < 0$ ist $<$ durch $>$ zu ersetzen. Hieraus folgt weiter, wenn $h > 0$ ist:

$$\lim_{h=0} kh \leqq \lim_{h=0} [F(x+h) - F(x)] \leqq \lim_{h=0} gh, \tag{6}$$

während im Falle $h < 0$ die Zeichen $<$ durch $>$ zu ersetzen sind. Da k und g endlich sind, schließen wir:

$$\lim_{h=0} F(x+h) = F(x),$$

d. h. nach der Definition in Nr. 20 ist $F(x)$ stetig.

[A

Zweitens: Das Integral hat an einer Stelle x, die keine Sprungstelle ist, die Ableitung $f(x)$.

Dies ergibt sich wie in Nr. 410. Wenn dagegen x eine Sprungstelle ist, so folgt aus (6) nur:

$$k \leqq \lim_{h=0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqq g.$$

Aus der Definition des Integrals als Grenzwertes einer Summe folgt noch:

Drittens: Sind x_1 und x_2 Stellen im Intervalle von x_0 bis X, so ist:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Dies gilt auch, wenn $x_1 > x_2$ ist, sobald wir nur noch die *Definition* hinzufügen, daß für $x_1 > x_2$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = -\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx$$

sein soll.

Sind zwei Funktionen in einem Intervalle integrierbar, so beweist man leicht dasselbe für ihre Summe und ihr Produkt. Ebenso gilt für integrierbare Funktionen $f(x)$ der Satz 12 von Nr. 412, wonach im Intervalle von x_0 bis $X > x_0$ das Integral von $f(x)$ positiv ist, sobald $f(x)$ daselbst überall positive Werte hat. Endlich gilt der Satz 17 von der *teilweisen Integration* in Nr. 415:

$$\int_{x_0}^{X} uv'\,dx = [uv]_{x_0}^{X} - \int_{x_0}^{X} u'v\,dx$$

auch für integrierbare Funktionen u und v, sobald sie im Intervalle Ableitungen haben, die ebenfalls integrierbar sind.

Schließlich noch eine Definition: *Eine Funktion $f(x)$ heißt in einem Intervalle absolut integrierbar, sobald ihr absoluter Betrag $|f(x)|$ daselbst integrierbar ist.*

B. Die Koeffizienten der Fourierschen Reihe. Wir betrachten die bestimmten Integrale

$$\int_0^\pi \cos kx \cos lx\,dx, \qquad \int_0^\pi \sin kx \sin lx\,dx,$$

wobei k und l *ganze positive* Zahlen sein sollen. Die Summe bzw. Differenz dieser Integrale ist

$$\int_0^\pi \cos(k-l)x\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int_0^\pi \cos(k+l)x\,dx.$$

Ist $k \neq l$, so sind die letzten beiden Integrale gleich Null. Ist dagegen $k = l \neq 0$, so ist das erste von ihnen gleich π und das zweite gleich Null. Ist endlich $k = l = 0$, so sind beide gleich π. Hieraus folgt:

$$(1)\quad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos kx \cos lx\,dx = \begin{cases} 0 \\ 1, \\ 2 \end{cases} \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin kx \sin lx\,dx = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \text{für } k \begin{cases} \neq l, \\ = l \neq 0, \\ = l = 0, \end{cases}$$

vorausgesetzt, daß k und l *ganze positive* Zahlen sind. Da sich die Integranden nicht ändern, wenn x durch $-x$ ersetzt wird, so folgt ferner für die Integration im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$:

$$(2)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lx\,dx = \begin{cases} 0 \\ 1, \\ 2 \end{cases} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lx\,dx = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \text{für } k \begin{cases} \neq l, \\ = l \neq 0, \\ = l = 0. \end{cases}$$

Auf demselben Wege ergibt sich:

$$(3)\qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin lx\,dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos lx\,dx = 0,$$

wenn k und l *ganze* Zahlen bedeuten.

Es mögen nun $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei solche reelle Funktionen von x sein, die sich innerhalb des Intervalles von $x = 0$ bis $x = \pi$ durch *gleichmäßig konvergente unendliche Reihen* von der Form

$$(4)\quad \varphi(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots + A_k \cos kx + \cdots,$$

$$(5)\quad \psi(x) = \qquad B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \cdots + B_k \sin kx + \cdots$$

darstellen lassen. Diese Voraussetzung zieht nach sich, daß $\varphi(x)$ eine *gerade* und $\psi(x)$ eine *ungerade* Funktion und $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ ist. Es ist leicht, die Koeffizienten dieser Reihen als bestimmte Integrale darzustellen, nämlich auf dem folgenden von *Fourier* angegebenen Wege:

Wir multiplizieren die Gleichung (4) mit $2\cos kx$, dividieren sie durch π und integrieren alsdann von 0 bis π. Nach Satz 26, Nr. 426, darf die Integration gliedweise ausgeführt werden. Mit

Rücksicht auf (1) geht alsdann rechts nur A_k hervor, so daß wir haben:

(6) $$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\cos kx\,dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Mit der Reihe (5) verfahren wir entsprechend: Wir multiplizieren sie mit $2\sin kx$, dividieren sie durch π und integrieren alsdann von 0 bis π, so daß mit Rücksicht auf (1) folgt:

(7) $$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(x)\sin kx\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Die soeben betrachtete Funktion $\varphi(x)$ bzw. $\psi(x)$ ist, wie bemerkt, gerade bzw. ungerade. Dies braucht nicht mehr der Fall zu sein bei einer Funktion $f(x)$, von der wir voraussetzen, daß sie *im Intervalle von* $-\pi$ *bis* $+\pi$ durch eine *gleichmäßig konvergente unendliche Reihe* von der Form

(8) $$\begin{aligned} f(x) = \tfrac{1}{2}A_0 &+ A_1\cos x + A_2\cos 2x + \cdots + A_k\cos kx + \cdots \\ &+ B_1\sin x + B_2\sin 2x + \cdots + B_k\sin kx + \cdots \end{aligned}$$

darstellbar sei. Aber auch hier können wir die Koeffizienten leicht als bestimmte Integrale gewinnen. Wir multiplizieren nämlich die Gleichung (8) mit $\cos kx$ bzw. $\sin kx$ und dividieren sie noch durch π. Darauf ergibt sich durch gliedweise Integration von $-\pi$ bis $+\pi$ infolge von (2) und (3):

(9) $$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Die Veränderliche x tritt in (8) in den goniometrischen Funktionen auf. Andererseits kommt sie auch in den bestimmten Integralen (9) vor. Um nun Verwechslungen vorzubeugen, die entstehen können, wenn wir die Werte (9) der Koeffizienten in (8) einführen, wollen wir die Veränderliche der Funktion f mit z statt x bezeichnen. Wir sehen alsdann:

Läßt sich eine reelle Funktion $f(z)$ von z in dem Intervalle von $z = -\pi$ bis $z = +\pi$ durch eine gleichmäßig konvergente unendliche Reihe darstellen, die nach den Kosinus und Sinus der ganzen positiven Vielfachen von z fortschreitet:

$$f(z) = \tfrac{1}{2}A_0 + \sum_1^\infty{}^k (A_k\cos kz + B_k\sin kz),$$

so haben die Koeffizienten der Reihe die Werte:

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\,dx, \qquad B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\,dx.$$

Es ist dies die sogenannte *Fouriersche Reihe.*

Die Voraussetzung über die gleichmäßige Konvergenz stellt jedoch die Anwendbarkeit der Fourierschen Reihe für irgend eine im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ gegebene Funktion $f(x)$ in Frage. Es entsteht die Aufgabe, zu untersuchen, welche Bedingungen die Funktion $f(x)$ selbst erfüllen muß, damit sie in eine Fouriersche Reihe entwickelbar sei, und dies ist das Problem, dessen Theorie und Geschichte in dem folgenden Anhange dargelegt wird.

---

343 # Anhang.

Grundriß der Theorie der Fourierschen Reihe und des Fourierschen Integrals

von

Axel Harnack.*)

---

1. {**Die zu entwickelnde Funktion.**} Für die analytische Darstellung von Funktionen, welche möglichst wenigen Voraussetzungen genügen oder, wie man auch kurz sagt, für ein bestimmtes Intervall der reellen Variabelen x *willkürlich* definiert sind, ist, zumal in der Theorie und Anwendung partieller Differentialgleichungen, die Beantwortung der Frage wichtig: *Läßt sich jede Funktion durch eine trigonometrische Reihe darstellen, und wie sind dann die Koeffizienten dieser Reihe zu bestimmen? Fourier*, welcher zuerst in seiner Theorie der Wärmeleitung die systematische Untersuchung dieser Frage begonnen hat, die früher schon Gegenstand der Kontroverse zwischen *Euler* und *D'Alembert* bildete, gab zur Lösung derselben im allgemeinen nur das Verfahren an, welches in den Paragraphen 502 flg. ausgeführt worden ist**), von dem wir aber sahen, daß es den ersten Teil des Problems gar nicht, den anderen nur mit Hilfe einer besonderen Voraussetzung beantwortet.

Unter einer in einem reellen Intervalle von $z = a$ bis $z = b$ willkürlich gegebene Funktion $f(z)$ verstehen wir, daß für jeden ein-

---

*) {Abgesehen von belanglosen äußerlichen Abänderungen wird hier der *Harnack*sche Anhang aus der 1. Hälfte des 2. Bandes der 1. Auflage (1885), S. 343—379, unverändert wiedergegeben. Die Seitenzahlen des Originals sind am Rande notiert. Zusätze des Herausgebers im Texte wie in den Anmerkungen sind durch Einschluß in geschweifte Klammern kenntlich gemacht. Die Anmerkungen beschränken sich darauf, die manchmal sehr knappe Entwicklung zu erläutern sowie die hin und wieder etwas nachlässige Ausdrucksweise zu verbessern.}

**) {Jetzt die Bemerkungen unter B, S. 528—531}.

zelnen Wert von z ein Funktionswert irgendwie definiert ist. Ein sehr wesentlicher Unterschied solch einer Funktion von allen rationalen, algebraischen sowie überhaupt von allen Funktionen, die durch konvergente Potenzreihen nach der *Taylor*schen Formel darstellbar sind, besteht darin, daß bei diesen die Definition der Funktion innerhalb eines noch so kleinen endlichen Intervalles zugleich über den ganzen weiteren Verlauf derselben entscheidet. Denn kennt man von einer konvergenten Potenzreihe die Werte der Funktion in der Umgebung einer Stelle, so daß man daselbst die Werte sämtlicher Ableitungen zu bilden imstande ist, so folgt aus diesen Werten auch die gesamte Potenzreihe. Bei einer willkürlichen Funktion dagegen entscheidet die Beschaffenheit der Funktion innerhalb eines bestimmten Teiles der Strecke a bis b noch gar nichts über den Verlauf der Funktion außerhalb dieses Teiles. Eine in diesem Sinne willkürliche Funktion kann also sicherlich nicht für das gesamte Intervall von a bis b durch *eine* 344
Potenzreihe ausgedrückt werden.

Wir wollen aber den Begriff der willkürlichen Funktion für das folgende noch etwas einschränken. Die Funktion $f(z)$ sei für das Intervall von a bis b so definiert, daß sie mit Ausnahme einzelner, in endlicher Anzahl vorhandener Punkte bei jedem Werte von z einen bestimmten Wert hat, und daß sie auch mit Ausnahme derselben Punkte überall stetig verläuft. An den Ausnahmepunkten aber möge die Funktion so beschaffen sein, daß zwar $\lim f(z+h)$ und $\lim f(z-h)$ für $h=0$ daselbst bestimmte Werte besitzen, daß aber diese Grenzwerte voneinander verschieden sind. An solch einer Stelle z selbst werde der Wert der Funktion ganz unbestimmt gelassen; wesentlich für die Beschaffenheit der Funktion in der beiderseitigen Umgebung solch einer Stelle ist dann nur der Umstand, daß sie daselbst eine sprungweise Wertänderung erleidet. Die Funktion $f(z)$ ist dann auch im Intervalle von a bis b integrierbar {vgl. A, S. 524—528}, und diese Eigenschaft, welche wir der willkürlichen Funktion auferlegen, bildet auch eigentlich nur die*) notwendige Einschränkung für die Theorie, welche wir zu entwickeln haben. Indessen würde es hier zu weit führen, die ganze Theorie für die integrierbaren Funktionen überhaupt auszuführen; wir richten unsere Aufmerksamkeit zunächst also immer nur auf diejenigen integrierbaren Funktionen, welche zugleich mit Ausnahme einzelner Punkte stetig sind oder in der Umgebung dieser Punkte weder unendlich noch unbestimmt werden, sondern bestimmte sprungweise Wertänderungen haben.

2. {**Stellung des Problems.**} Eine Funktion, die für das Intervall von a bis b definiert ist, kann stets so transformiert

*) {Statt *nur die* stände besser: *die einzige.*}

[1, 2

werden, daß ihr Argument das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ durchläuft. Denn setzt man:

$$x = \pi\,\frac{2z-(a+b)}{b-a} \quad \text{oder} \quad z = \frac{x(b-a)+\pi(a+b)}{2\pi},$$

so entspricht jedem Werte von z ein Wert von x, und wenn z das Intervall von a bis b durchläuft, erhält x alle Werte von $-\pi$ bis $+\pi$. Demnach können wir die Aufgabe auf die Form reduzieren: *Es sei im Intervalle von $x=-\pi$ bis $x=+\pi$ eine Funktion $f(x)$ willkürlich definiert, doch so, daß sie mit Ausnahme einzelner Punkte, an denen sie bestimmte sprungweise Wertänderungen erleidet, stetig ist; kann diese Funktion durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden, und wie sind dann die Koeffizienten derselben zu bestimmen?*

Die richtige Methode, diese Frage, wenn auch nicht vollständig zu lösen, so doch für die wichtigsten Fälle zu erledigen, eröffnete
845 *Dirichlet* (Crelles Journal, Bd. 4); er lehrte, daß dieselbe nicht in der aufgestellten Form zu untersuchen ist, sondern in der umgekehrten Reihenfolge. Bildet man für die Funktion $f(x)$ die trigonometrische Reihe, bei welcher die Koeffizienten die von *Fourier* angegebene Integralform haben, nämlich:

$$(1)\ A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx,\quad A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

so ist vor allem zu untersuchen, ob diese Reihe

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)$$

bei jedem Werte von x konvergiert und {im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$} den Wert $f(x)$ liefert. Alsdann läßt sich weiter fragen, ob dieselbe Funktion etwa noch durch andere trigonometrische Reihen darstellbar ist oder nicht.

3. {Satz über die Koeffizienten der Fourierschen Reihe.} Wir wenden uns zur Beantwortung des ersten Teiles und schicken den folgenden Satz voraus:

Ist $f(x)$ eine im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ endliche und integrierbare Funktion, so haben die Integrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

für $n=\infty$ den Grenzwert Null.

Dabei ist selbstverständlich der Grenzprozeß so zu vollziehen, daß zuerst bei endlichem Werte von n die Integrale ermittelt werden und alsdann in den gewonnenen Ausdrücken n über jeden Betrag hinaus wächst. Bildet man das Integral:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\Big[f(x) - \frac{1}{2}A_0 - \sum_{k=1}^{k=n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)\Big]^2 dx,$$

in welchem die Koeffizienten A und B die oben [Gleich. (1)] definierten Werte haben und n eine bestimmte beliebig große ganze Zahl bedeutet, so wird dasselbe gleich*):

$$\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2 dx + \frac{\pi}{2}A_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{k=n}(A_k^2 + B_k^2) - A_0\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)dx$$
$$- 2\sum_{k=1}^{k=n}\Big[A_k\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx + B_k\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx\Big],$$

also {nach (1)} gleich:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2 dx - \frac{\pi}{2}A_0^2 - \pi\sum_{k=1}^{k=n}(A_k^2 + B_k^2);$$ 346

es besteht demnach die Gleichung:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\Big[f(x) - \frac{1}{2}A_0 - \sum_{k=1}^{k=n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)\Big]^2 dx$$
$$= \int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2 dx - \frac{\pi}{2}A_0^2 - \pi\sum_{k=1}^{k=n}(A_k^2 + B_k^2),$$

welche für jeden endlichen noch so großen Wert von n gültig ist. Die linke Seite dieser Gleichung ist nun bei jedem Werte von n eine positive Größe, weil die Funktion unter dem Integrale ein Quadrat ist, mithin muß auch die rechte Seite stets positiv bleiben. Würden nun die Beträge der Größen A_k und B_k bei noch so großen Werten von k nicht nach Null konvergieren, sondern immer

*) {Denn nach (2) und (3) unter B ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\Big[\sum_{k=1}^{k=n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)\Big]^2 dx = \pi\sum_{k=1}^{k=n}(A_k^2 + B_k^2).\}$$

wieder Werte erlangen, die um eine bestimmte endliche Größe von Null verschieden sind, so müßte die rechte Seite bei beliebig wachsenden Werten von n negativ werden. Man erkennt also, daß sich ein n finden läßt, von dem ab

$$\sum_{k=n}^{k=n+m}(A_k^2 + B_k^2)$$

kleiner bleibt als eine beliebig kleine {positive} Zahl δ, wie groß auch m werden mag, und daß folglich auch*)

$$|A_n| \quad \text{und} \quad |B_n|$$

schließlich kleiner werden und bleiben als δ, d. h. daß

$$\lim A_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim B_n = 0$$

ist.

Da die Funktion $f(x)$ willkürlich ist, so kann man sie insbesondere so wählen, daß sie in einem Teilintervalle a bis b der Strecke $-\pi$ bis $+\pi$ von Null verschieden ist, außerhalb derselben aber Null ist. Man erkennt dann, daß auch

$$\lim \int_a^b f(x) \cos nx\,dx \quad \text{und} \quad \lim \int_a^b f(x) \sin nx\,dx$$

$(-\pi \leq a < b \leq +\pi)$ für $n = \infty$ den Wert Null haben. Desgleichen sieht man leicht ein: falls das Intervall von a bis b das Intervall $-\pi$ bis $+\pi$ umfaßt, so kann man dasselbe in Teile zerlegen, die innerhalb der Strecken von $-\pi$ bis $+\pi$, von $+\pi$ bis $+3\pi$, von $-\pi$ bis -3π usw. liegen, und da dann für
847 jede dieser Strecken die Grenzwerte der Integrale Null werden, so gilt der Satz noch allgemeiner als unsere anfängliche Behauptung: *Für jede überall endliche und integrierbare Funktion werden in einem beliebigen endlichen Integrationsintervalle von a bis b die Grenzwerte der Integrale*

$$\int_a^b f(x) \cos nx\,dx \quad \textit{und} \quad \int_a^b f(x) \sin nx\,dx$$

gleich Null, wenn n die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufend über jeden Betrag hinaus wächst.

Bemerkung. Der Beweis bleibt gültig, falls $f(x)$ eine integrierbare Funktion ist, die derart unendlich wird, daß auch ihr

*) {Statt $|x|$ schreibt *Harnack* abs $[x]$ oder auch nur $[x]$. Wir haben hier und im folgenden dafür die jetzt gebräuchliche Bezeichnung $|x|$ gesetzt.}

Quadrat integrierbar ist; und der Satz selbst bleibt bestehen, wenn die Funktion absolut integrierbar ist. Es gibt aber auch integrierbare Funktionen, welche derart unendlich werden, daß die Größen A_n und B_n nicht nach Null konvergieren; für diese ist die Anwendbarkeit der Fourierschen Reihe ausgeschlossen. Das Verschwinden der Grenzwerte der Integrale A_n und B_n ist in anderer gleichfalls sehr einfacher Weise von *Riemann* bewiesen worden (Ges. Werke, S. 240*)) und zwar direkt aus den Eigenschaften einer integrierbaren Funktion $f(x)$ und dem Umstande, daß die Funktionen $\sin nx$ und $\cos nx$ in Intervallen von der Größe $2\pi : n$ ihr Zeichen wechseln.**)

4. {**Zurückführung der Summe der Reihe auf den Grenzwert eines Integrals.**} Soll die Fouriersche Reihe bei jedem Werte von x {zwischen $-\pi$ und $+\pi$} den Wert der Funktion $f(x)$ ausdrücken, so muß die Summe:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\left[\cos kx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha + \sin kx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k(\alpha - x)\,d\alpha$$

bei beliebig wachsendem Werte von n sich unbegrenzt dem Werte $f(x)$ nähern. Wir bezeichnen die Summe dieser Terme bis einschließlich derer mit dem Index n durch $S_n(x)$. Die Reihe

$$\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \cos 3(\alpha - x) + \cdots + \cos n(\alpha - x)$$

läßt sich durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen; nennt man der Kürze halber s die Summe:

$$s = \cos z + \cos 2z + \cos 3z + \cdots + \cos nz,$$

so folgt, wenn man beide Seiten mit $2\cos z$ multipliziert und die Produkte der Kosinus in Summen verwandelt:

$$2s\cos z = (\cos 2z + 1) + (\cos 3z + \cos z) + (\cos 4z + \cos 2z) + \cdots$$ 348

$$+ [\cos(n+1)z + \cos(n-1)z]$$

$$= 1 + \cos z + 2\cos 2z + 2\cos 3z + \cdots + 2\cos(n-1)z + \cos nz + \cos(n+1)z.$$

---

*) {In der 2. Auflage von 1892 auf S. 254, 255.}

**) {Gemeint ist, daß $\sin nx$ und $\cos nx$ in einer Hälfte eines Intervalles von der Größe $2\pi : n$ entgegengesetztes Vorzeichen als in der andern Hälfte haben.}

Demnach wird:

$$2s(1-\cos z) = -1 + \cos z + \cos nz - \cos(n+1)z$$

oder:

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{\cos nz - \cos(n+1)z}{2(1-\cos z)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{1}{2}z};$$

also ist:

$$\tfrac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \cdots + \cos n(\alpha - x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}$$

und:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha.$$

Es ist zu untersuchen, ob der Wert dieses Integrals bei beliebig wachsendem Werte von n nach $f(x)$ konvergiert. Dasselbe zerlegt sich in zwei Teile; es ist:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha.$$

Das zweite Integral konvergiert mit beliebig wachsendem Werte von n nach Null. Denn wie im § 3 bewiesen wurde, konvergieren die einzelnen Teile

$$\cos nx\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha \quad \text{und} \quad \sin nx\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha$$

nach Null. In dem ersten Integrale ist die zu integrierende Funktion an der Stelle $\alpha = x$ irregulär, weil der Nenner für diese Stelle Null wird. Bestimmt man aber ein beliebig kleines Intervall von $\alpha = x - \delta$ bis $\alpha = x + \delta$ (wir betrachten dabei zunächst den Fall, daß x innerhalb des Integrationsintervalles und nicht an den Grenzen desselben gelegen ist), so ist die Funktion

$$f(\alpha)\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}$$

außerhalb desselben durchaus endlich, und mithin konvergiert auch

349 $$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{x-\delta} f(\alpha)\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\int\limits_{x+\delta}^{+\pi} f(\alpha)\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha$$

bei beliebig wachsendem Werte von n nach Null. Also ist nur noch der Grenzwert des Integrales

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha-x)\cos\frac{1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha$$

zu betrachten, und damit ist zugleich der Satz bewiesen:

Der Wert der Fourierschen Reihe hängt an jeder Stelle nur ab von dem Verhalten der Funktion in der unmittelbaren Umgebung dieser Stelle.

Bemerkung. Der Satz gilt überhaupt, sobald die Funktion $f(x)$, auch wenn sie im Intervalle unendlich wird, die Eigenschaft hat, daß

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha \quad\text{und}\quad \lim_{n=\infty}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha$$

Null werden, d. h. sobald diese zur Bildung der Fourierschen Reihe unerläßlichen Bedingungen erfüllt sind.

5. {**Umformung des Integrals.**} Wir setzen nun in dem {noch zu untersuchenden zuletzt erwähnten} Integrale $\alpha - x = \beta$, $d\alpha = d\beta$, so daß es die Form erhält:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{+\delta} f(x+\beta)\,\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}[f(x+\beta)+f(x-\beta)]\,\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta.$$

Der Grenzwert dieses Integrals, in welchem δ eine beliebig klein fixierte {positive} Größe bezeichnet, für $n = \infty$ entscheidet über den Wert der Reihe an der Stelle x.

Auch dieses Integral kann man noch vereinfachen. Bildet man das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}[f(x+\beta)+f(x-\beta)]\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}-\frac{1}{\beta}\right)\sin n\beta\,d\beta,$$

so hat dasselbe zufolge des früheren Satzes {in § 3} den Grenzwert Null; denn die mit $\sin n\beta$ multiplizierte Funktion {d. h. der Integrand, abgesehen von $\sin n\beta$} bleibt auch für $\beta = 0$ endlich. Mithin folgt: Wenn

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}[f(x+\beta)+f(x-\beta)]\,\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\sin n\beta\,d\beta$$ 350

für $n = \infty$ einen bestimmten Grenzwert hat, so hat auch

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+\beta)+f(x-\beta)]\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

für $n = \infty$ denselben Grenzwert, und umgekehrt. Demnach lautet das Ergebnis:

Die Fouriersche Reihe hat an der Stelle x einen bestimmten Grenzwert, falls das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+\beta)+f(x-\beta)]\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

für $n = \infty$ einen bestimmten Wert besitzt, und zwar ist der Grenzwert dieses Integrals zugleich der Wert der Reihe an der Stelle x.

Handelt es sich um den Wert $x = +\pi$ oder $x = -\pi$, so lehrt dieselbe Betrachtungsweise, daß man aus der Summe $S_n(x)$ in beiden Fällen nur die Grenzwerte der Terme*)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+\delta} f(\alpha)\frac{\sin n(\alpha+\pi)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\pi)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\pi)}\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin n(\alpha-\pi)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}\,d\alpha$$

zu betrachten hat, also den Grenzwert des Integrals:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(+\pi-\beta)+f(-\pi+\beta)]\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(+\pi-\beta)+f(-\pi+\beta)]\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta.$$

6. {**Hinreichende Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion.**} Die Funktion $f(x+\beta)+f(x-\beta)$ konvergiert für $\beta = 0$ nach dem Werte $f(x+0)+f(x-0)$, da wir angenommen haben, daß unsere Funktion $f(x)$ allenthalben

*) {Daß diese beiden Terme nicht einzeln zu betrachten sind, vielmehr ihre Summe gebildet werden muß, folgt daraus, daß die Fouriersche Reihe, falls sie überhaupt gilt, nicht nur auf das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ beschränkt ist, vielmehr für jedes x aufgestellt werden kann, da $\cos kx$ und $\sin kx$ periodische Funktionen mit der Periode 2π sind. Die Umgebung der Stelle π geht also von $\pi-\delta$ bis $\pi+\delta$. In dem Intervalle von π bis $\pi+\delta$ hat aber die Fouriersche Reihe dieselben Werte wie im Intervalle von $-\pi$ bis $-\pi+\delta$. Also ist die Summe der auf die Intervalle $-\pi$ bis $-\pi+\delta$ und $\pi-\delta$ bis π bezüglichen Integrale zu bilden.}

bestimmte Werte $f(x+0)$ und $f(x-0)$ besitzt.*) An einer Stelle, an welcher die Funktion stetig ist, sind diese Werte einander gleich, an den Unstetigkeitsstellen sind sie verschieden. Setzt man die Differenz:

$$[f(x+\beta)+f(x-\beta)]-[f(x+0)+f(x-0)]=\lambda(\beta),$$ 851

so ist $\lambda(\beta)$ eine stetige Funktion, welche für $\beta=0$ den Wert Null hat, und es wird:

$$\lim S_n(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi}\lim\int_0^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta+\frac{1}{\pi}\lim\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta.$$

Es ist nun:

$$\int_0^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta=\int_0^{n\delta}\frac{\sin z}{z}dz,$$

also (§ 494 {jetzt (6) in Nr. 493}):

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta=\lim_{n=\infty}\int_0^{n\delta}\frac{\sin z}{z}dz=\int_0^\infty\frac{\sin z}{z}dz=\tfrac{1}{2}\pi.$$

Mithin wird:

$$\lim S_n(x)=\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]+\frac{1}{\pi}\lim\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta.$$

Der Wert der Fourierschen Reihe wird also an einer Stelle, wo die Funktion stetig ist, gleich $f(x)$ und an einer Stelle, wo die Funktion eine sprungweise Wertänderung erleidet, gleich dem Mittel aus diesen Werten, wenn

$$\lim\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta$$

bei noch so großen Werten von n durch Wahl von δ beliebig klein bleibt.

Es ist bisher nur gelungen, Bedingungen für das Verhalten der Funktion $\lambda(\beta)$ anzugeben, welche hinreichend sind, damit diese Forderung erfüllt ist, und es ist durch Beispiele bewiesen

*) {Unter $f(x+0)$ und $f(x-0)$ werden die Grenzwerte von $f(x+\beta)$ und $f(x-\beta)$ für $\lim\beta=0$ unter der Annahme *positiver* Werte von β verstanden. Nach den Voraussetzungen von § 1 kann es ja Stellen x geben, an denen diese beiden Grenzwerte verschieden sind.}

worden, daß die Voraussetzung der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ oder allgemeiner der Funktion $\lambda(\beta)$ für sich allein nicht genügt. Ich führe im folgenden nur die für die Anwendung der Fourierschen Reihe wichtigsten Fälle an.

Erstens: Besitzt die stetige Funktion $\lambda(\beta)$, welche für $\beta = 0$ verschwindet, in der Umgebung der Stelle $\beta = 0$ nicht unendlich viele Maxima und Minima, so kann man nach dem zweiten Mittelwertsatze (§ 463 {jetzt Satz 24 in Nr. 424}) schließen:

$$\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta = \lambda(\delta)\int_{\theta\delta}^{\delta}\frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta = \lambda(\delta)\int_{n\theta\delta}^{n\delta}\frac{\sin z}{z}dz,$$

{wobei θ einen positiven echten Bruch bedeutet}.

352 Denn man kann das Intervall δ so klein machen, daß die Beträge der Funktion $\lambda(\beta)$ nur wachsen, während β das Intervall von 0 bis δ durchläuft. Nun läßt sich aber δ von vornherein so klein wählen, daß $\lambda(\delta)$ beliebig klein ist; ferner ist das Integral rechts, wie groß auch n werden und welchen Wert auch θ haben mag, {nach Nr. 469} stets endlich. Also ist der Wert des Integrals

$$\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta$$

unabhängig von n, lediglich durch Wahl von δ beliebig klein, d. h. es wird

$$\lim S_n(x) = \tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Insbesondere gilt das Resultat auch dann, wenn die Funktion $f(x)$ zu beiden Seiten der betrachteten Stelle nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, denn dann läßt sich die Funktion $\lambda(\beta)$ in die beiden Teile $f(x+\beta) - f(x+0)$ und $f(x-\beta) - f(x-0)$ zerlegen, und auf jeden derselben kann der nämliche Schluß angewandt werden. (Bedingung von *Dirichlet.*)

Zweitens: Sind die Beträge (absoluten Werte) der Funktion $\lambda(\beta):\beta$ integrabel in der Umgebung der Stelle $\beta = 0$, so ist:

$$\left|\int_0^\delta \frac{\lambda(\beta)}{\beta}\sin n\beta\, d\beta\right| \quad \text{kleiner als} \quad \int_0^\delta \left|\frac{\lambda(\beta)}{\beta}\right| d\beta.$$

Dieses Integral kann der Voraussetzung nach*) durch Wahl von δ beliebig klein gemacht werden, wodurch wiederum die Konvergenz der Reihe nach dem gewünschten Werte bewiesen ist.

*) {Nämlich weil $\lambda(\beta):\beta$ absolut integrabel sein soll.}

Ist insbesondere $\lambda(\beta)$ dem Betrage nach stets kleiner als das Produkt $C\beta^{\alpha}$, wobei C eine Konstante, α irgend eine positive Zahl ist, so ist die Bedingung der absoluten Integrierbarkeit erfüllt.*) (Bedingung von *Lipschitz.*)

Hieraus folgt: Wenn die Funktion

$$\frac{\lambda(\beta)}{\beta} = \frac{f(x+\beta)-f(x+0)}{\beta} + \frac{f(x-\beta)-f(x-0)}{\beta}$$

endlich bleibt auch für $\beta = 0$, was besonders dann der Fall ist, wenn die Funktion $f(x)$ an der betrachteten Stelle einen bestimmten endlichen Wert des vorwärts gebildeten und ebenso des rückwärts gebildeten Differentialquotienten besitzt**), so kon- 358
vergiert die Fouriersche Reihe an dieser Stelle nach dem Werte

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Drittens: Das letzte Resultat, daß die Reihe allenthalben konvergent ist, wenn für die Funktion $f(x)$ der vorwärts- und der rückwärts gebildete Differentialquotient allenthalben endlich sind, läßt sich noch verallgemeinern. Es genügt, daß der Differentialquotient der Funktion $f(x)$, auch wenn er unendlich wird, doch absolut integrierbar sei***). Denn es besitzt alsdann die Funktion $\lambda(\beta)$ eine absolut integrierbare Ableitung: $\lambda'(\beta) = f'(x+\beta) - f'(x-\beta)$, und es wird nach dem Satze der teilweisen Integration:†)

---

*) {Denn dann ist $|\lambda(\beta):\beta| < C\beta^{\alpha-1}$, so daß die Schwankung von $|\lambda(\beta):\beta|$ für jedes Stück des Intervalles von 0 bis δ kleiner als $C\delta^{\alpha-1}$ ist. Folglich ist die Summe der Produkte aller Teile dieses Intervalles mit den zugehörigen Schwankungen kleiner als $C\delta^{\alpha}$. Diese Größe aber strebt mit δ nach Null, weil $\alpha > 0$ ist. Mithin erfüllt $|\lambda(\beta):\beta|$ die unter A, S. 525, aufgestellte Bedingung der Integrierbarkeit.}

**) {Hierunter sind die Grenzwerte von

$$\frac{f(x+\beta)-f(x+0)}{\beta} \quad \text{und} \quad \frac{f(x-\beta)-f(x-0)}{-\beta}$$

für *positives* β und $\lim \beta = 0$ verstanden.}

***) {Bei den Betrachtungen unter B setzten wir voraus, daß die zu integrierende Funktion überall endlich sei. Hier werden nun auch solche Stellen x zugelassen, an denen sie unendlich wird. Eine solche Stelle ist bei der Untersuchung der Integrierbarkeit wie in Nr. 470 u. f. zunächst durch ein kleines Intervall auszuschließen. Darauf ist der Grenzwert zu untersuchen, der sich für das Integral ergibt, wenn dies Intervall nach Null strebt.}

†) {Die teilweise Integration ist auf

$$\int_0^{\delta} \lambda'(\alpha)\left[\int_{\alpha}^{\delta} \frac{\sin n\beta}{\beta}\, d\beta\right] d\alpha$$

$$\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta = \int_0^\delta \lambda'(\alpha)d\alpha\int_\alpha^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta = \int_0^\delta \lambda'(\alpha)d\alpha\int_{n\alpha}^{n\delta}\frac{\sin z}{z}dz.$$

Wenn nun die absoluten Werte der Funktion $\lambda'(\alpha)$ integrierbar sind, so ist:

$$\left|\int_0^\delta \lambda'(\alpha)d\alpha\int_{n\alpha}^{n\delta}\frac{\sin z}{z}dz\right| < \int_0^\pi \frac{\sin z}{z}dz\cdot\int_0^\delta|\lambda'(\alpha)|\,d\alpha,$$

denn der {absolute} Wert des Integrals

$$\int_{n\alpha}^{n\delta}\frac{\sin z}{z}dz$$

ist bei jedem {positiven} Werte von α und n nie größer (§ 466, Beispiel 2 {jetzt Nr. 469}) als:

$$\int_0^\pi \frac{\sin z}{z}dz.$$

Die rechte Seite kann nun durch Wahl von δ von vornherein beliebig klein gemacht werden, ganz unabhängig von n, daher ist auch {der absolute Betrag von}

$$\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta$$

durch Wahl von δ bei allen Werten von n beliebig klein, womit wiederum die Konvergenz bewiesen ist. (Bedingung von *du Bois-Reymond.*)

---

auszuführen. Dadurch verwandelt sich das Integral in

$$\left[\lambda(\alpha)\int_\alpha^\delta\frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta\right]_{\alpha=0}^{\alpha=\delta} + \int_0^\delta\lambda(\alpha)\frac{\sin n\alpha}{\alpha}d\alpha.$$

Der Inhalt der ersten Klammer ist für $\alpha=\delta$ gleich Null, weil darin das von α bis δ erstreckte Integral auftritt. Er verschwindet aber auch für $\alpha=0$, weil $\lambda(0)=0$ ist. Mithin kommt:

$$\int_0^\delta\lambda'(\alpha)\left[\int_\alpha^\delta\frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta\right]d\alpha = \int_0^\delta\lambda(\alpha)\frac{\sin n\alpha}{\alpha}d\alpha.$$

Rechts können wir β statt α setzen. Vertauschung beider Seiten der Gleichung liefert die Gleichung des Textes.}

6]

Als das für die Anwendung der Fourierschen Reihe in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wichtigste Resultat heben wir hervor, daß jede im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ irgendwie definierte Funktion, deren Ableitung entweder endlich 354
und integrierbar oder absolut integrierbar ist (an den Sprungstellen der Funktion sind immer die vor- und rückwärts gebildeten Ableitungen gesondert zu betrachten), durch eine allenthalben konvergente Fouriersche Reihe darstellbar ist, derart, daß an den Sprungstellen der Funktion die Reihe den mittleren Wert annimmt. Dadurch allein schon erhält diese Reihenentwicklung eine besonders wichtige Bedeutung im Vergleiche mit den gewöhnlichen Potenzreihen; denn diese setzen die Stetigkeit nicht nur der ersten, sondern überhaupt aller Ableitungen voraus.

Endlich bemerken wir noch, daß an den Stellen $x = +\pi$ oder $-\pi$ die Reihe nach dem Werte $\frac{1}{2}[f(+\pi - 0) + f(-\pi + 0)]$ konvergiert, sobald die Funktion an den Stellen $x = \pm\pi$ eine der drei Bedingungen erfüllt. Ist also die willkürliche Funktion so beschaffen, daß ihre Werte an den beiden Grenzen des Intervalles verschieden sind, so kann durch die Fouriersche Reihe immer nur der mittlere Wert dieser beiden ausgedrückt werden.

Bemerkung. Wird die Funktion $f(x)$ an einzelnen Stellen unendlich, so jedoch, daß die notwendigen Bedingungen (§ 3) erfüllt sind, so konvergiert die Fouriersche Reihe sicherlich an jeder anderen Stelle, welche eine der drei entwickelten Bedingungen erfüllt. Wie sie sich an der Unendlichkeitsstelle verhält, ist eine minder wichtige Frage; sie kann dort möglicherweise sogar konvergieren, doch stellt sie dann mit diesem Werte nicht die Funktion dar. Ferner erkennt man, daß punktuell hebbare Unstetigkeiten*) der Funktion $f(x)$ gar keinen Einfluß haben auf die Reihe und daher auch niemals durch dieselbe dargestellt werden.

7. {Stellung eines neuen Problems.} Der Beweis, welchen wir geführt haben, gibt uns Bedingungen an, unter denen die Fouriersche Reihe nach dem Werte $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ konvergiert. Es ist daher die Frage nicht ohne Bedeutung, ob die Reihe an einer bestimmten Stelle x nicht auch konvergieren kann, ohne daß sie gerade diesen Wert annimmt. Die Antwort aber lautet: *Wenn die Fouriersche Reihe an einer Stelle konvergiert, an welcher* $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ *einen bestimmten Wert hat, so konvergiert sie auch immer nach diesem Werte.* Der Be-

*) {Ist $f(x)$ in einem Intervalle stetig, schreiben wir nun aber $f(x)$ an einer Stelle a des Intervalles nicht den Wert $f(a)$, sondern irgendeinen andern Wert zu, so hat die Funktion daselbst eine punktuell hebbare Unstetigkeit.}

weis dieses Satzes ergibt sich, wenn man zuvor auf zwei allgemeine Eigenschaften der *trigonometrischen Reihen überhaupt* eingeht, von denen die eine im wesentlichen von Herrn *G. Cantor*, die andere von *Riemann* aufgestellt wurde. Dieselben sind zugleich wichtig für die Beantwortung der Frage: Ist jede trigonometrische Reihe,
355 welche eine Funktion $f(x)$ definiert, eine Fouriersche? Man erkennt von vornherein die Beschränkung des Satzes: Die Funktion $f(x)$, welche durch eine trigonometrische Reihe definiert ist, muß, falls die Koeffizienten der Reihe die Fouriersche Integralform haben sollen, jedenfalls eine integrierbare sein. Sonach kommen wir auf das in den § 502 flg. {hier B, S. 528—531} nur unter einer bestimmten Annahme gelöste Problem:

Haben in jeder trigonometrischen Reihe:

$$\tfrac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

wenn sie im Intervalle von $-\pi$ *bis* $+\pi$ *eine Funktion* $f(x)$ *definiert, welche integrierbar ist, die Koeffizienten* A_n *und* B_n *die Werte:*

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx\;?$$

Diese Frage ist im wesentlichen zu bejahen. Der Weg zu ihrer Beantwortung ist von Herrn *du Bois-Reymond* zuerst angegeben worden. Im folgenden soll der Beweis geliefert werden unter der Einschränkung, daß $f(x)$ zugleich eine im allgemeinen stetige Funktion ist, d. h. eine solche, die nur an einzelnen Stellen eine sprungweise Wertänderung erleidet.

8. {Verallgemeinerung des Satzes in § 3.} Wenn eine trigonometrische Reihe

$$\tfrac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

überhaupt in einem noch so kleinen Intervalle konvergieren soll, so muß sie notwendig die Eigenschaft haben, daß $\lim A_n$ und $\lim B_n$ für $n = \infty$ verschwinden. Diesem von Hrn. *Cantor* aufgestellten Satze (Math. Ann. Bd. 4 u. 5) können wir eine erweiterte Fassung geben, indem wir folgende allgemeine Erkenntnis über Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen voranstellen. Die Stellen, an denen eine unendliche Reihe divergiert, können

von zweierlei Art sein. Entweder wächst die Summe der Reihenglieder über jede Grenze, die Reihe wird alsdann an dieser Stelle in bestimmter oder unbestimmter Weise unendlich, oder es oszillieren die Werte dieser Summe zwischen endlichen Grenzen. Im ersten Falle kann das Maß der Divergenz ein unendliches genannt werden, im zweiten läßt sich ein endliches Maß fixieren. Denn bezeichnet man mit S_n die Summe der Glieder, welche den Index 0, 1, $\cdots$ bis $n-1$ besitzen, und bildet man die Folge S_n,
S_{n+1}, S_{n+2}, $\cdots$, so existiert eine obere Grenze G_n und eine untere 356
g_n, welche von den Gliedern in dieser Folge nicht überschritten wird. Läßt man den Index n beliebig wachsen, so erhält G_n, indem es entweder konstant bleibt oder nur abnimmt, einen Grenzwert G', und ebenso bekommt g_n, indem es entweder konstant bleibt oder nur zunimmt, einen Grenzwert g'. Diese Werte G' und g' sind alsdann die äußersten Grenzen für die schließliche Oszillation der Reihensumme, und ihre Differenz soll das *Maß der Divergenz* an der betrachteten Stelle heißen. Ist dieses Divergenzmaß Null, so konvergiert die Reihe daselbst. Bezeichnet man die Differenz $S_{n+k} - S_n$ mit $R_{n,k}$, so hat die Folge der Reste $R_{n,1}$, $R_{n,2}$, $\cdots$ die Eigenschaft, daß ihr {absoluter} Betrag niemals größer sein kann als $G_n - g_n$. Wird also das Divergenzmaß schließlich {d. h. für hinreichend großes n} kleiner als eine Zahl d, so kann man eine Stelle n ausfindig machen, von der ab die Beträge sämtlicher Reste $R_{n,k}$ unabhängig von k stets kleiner bleiben als d. Eine Reihe soll in einem Intervalle *im allgemeinen konvergent* heißen, wenn alle die Stellen, an denen das Divergenzmaß größer ist als eine bestimmte, beliebig zu fixierende Zahl δ, in keinem noch so kleinen Teilintervalle überall dicht sind. Dies besagt, daß man in unmittelbarer Nähe einer jeden Stelle ein Intervall bestimmen kann, so daß für sämtliche Stellen in diesem Intervalle das Divergenzmaß gleich oder kleiner ist als δ. Der Satz, welchen wir beweisen wollen, lautet nun: *Eine trigonometrische Reihe, welche in einem beliebigen Intervalle im allgemeinen konvergent ist, muß schließlich verschwindende Koeffizienten haben, d. h. es muß* $\lim A_n = 0$ *und* $\lim B_n = 0$ *werden.*

Eine trigonometrische Reihe, für welche die Koeffizienten A_n und B_n nicht verschwindende Grenzwerte haben, kann zwar auch bei unendlich vielen Werten von x konvergieren; es gibt aber in jedem noch so kleinen Intervalle Stellen, an denen sie divergiert, und zwar mit einem Divergenzmaße, das größer ist als eine bestimmte endliche Zahl.

An jeder Stelle, wo das Divergenzmaß kleiner wird als δ, kann man eine untere Grenze für den Index n bestimmen, so daß sämtliche Reihenglieder, deren Index gleich oder größer als n ist,

dem {absoluten} Betrage nach kleiner werden als δ. Da nun die Punkte, an denen das Divergenzmaß größer ist als δ, in keinem noch so kleinen Intervalle überall dicht sein sollen, so kann man in unmittelbarer Nähe einer jeden Stelle ein Teilintervall bestimmen, in welchem kein Punkt liegt, an dem das Divergenzmaß größer ist als δ. Solch ein Intervall habe die Länge 2ε und erstrecke sich von $x - \varepsilon$ bis $x + \varepsilon$.

Man kann dann also einen Wert für n bestimmen, so daß für diesen, sowie für alle größeren Werte die Glieder:

857
$$A_n \cos n(x + \varepsilon) + B_n \sin n(x + \varepsilon)$$
$$= (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \cos n\varepsilon - (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \sin n\varepsilon,$$
$$A_n \cos n(x - \varepsilon) + B_n \sin n(x - \varepsilon)$$
$$= (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \cos n\varepsilon + (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \sin n\varepsilon$$

beide dem {absoluten} Betrage nach um eine bestimmte Größe kleiner werden als δ. Es bedeutet dabei x einen Wert in beliebiger Nähe einer jeden Stelle, ε irgend einen Wert innerhalb des konstruierten Intervalles. Zu jedem Werte von ε kann eine andere Grenze für n gehören; es ist noch nicht gesagt, daß bei jedem Werte von ε derselbe Wert von n ausreicht.

Durch Addition und Subtraktion der beiden vorstehenden Größen erkennt man, daß auch jede der Größen

$$(A_n \cos nx + B_n \sin nx) \cos n\varepsilon \quad \text{und} \quad (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \sin n\varepsilon$$

{ihrem absoluten Betrage nach} jedenfalls kleiner sein muß als 2δ. Multipliziert man die erste Größe mit $\sin nx \sin n\varepsilon$, die zweite mit $\cos nx \cos n\varepsilon$, so findet man durch Subtraktion, daß $B_n \sin 2n\varepsilon$, und analog, daß $A_n \cos 2n\varepsilon$ {absolut genommen} kleiner werden als $4\delta = \delta'$, also kurz gesagt kleiner gemacht werden können als eine beliebig vorgegebene Zahl δ'. Setzt man $2\varepsilon = \alpha$, so wird also für alle Werte von α in einem bestimmten Intervalle, dessen Grenzen wir mit a und b bezeichnen wollen, {der absolute Wert von} $\lim B_n \sin n\alpha$ und $\lim A_n \cos n\alpha$ kleiner als δ'. Für jeden Wert von α innerhalb des angegebenen Intervalles muß also die Reihe:

$$|B_n \sin n\alpha|, \cdots |B_{n+k} \sin (n + k)\alpha|, \cdots$$

schließlich nur Glieder enthalten, deren Betrag kleiner ist als δ', und dies kann, wie nun bewiesen werden soll, nicht anders erfüllt sein, als wenn von einem bestimmten Werte von n an sämtliche Koeffizienten

$$B_n, \cdots B_{n+k}, \cdots$$

dem {absoluten} Betrage nach kleiner sind als δ'.

8]

Denn nehmen wir an, daß dieses nicht der Fall ist, so kann man aus dieser Reihe eine andere herausheben:

$$B_{n_1}, B_{n_2}, \cdots B_{n_k}, \cdots,$$

deren Glieder {absolut genommen} sämtlich gleich oder größer sind als δ'. Dann ließe sich aber auch in dem angegebenen Intervalle ein Wert α fixieren, für welchen $\lim |B_n \sin n\alpha|$ nicht kleiner wird als δ'. Aus der Reihe der wachsenden ganzen Zahlen n_1, $n_2, \cdots n_k, \cdots$ hebe man {nämlich} eine neue Reihe heraus: $n_1', n_2', \cdots n_k', \cdots$, so daß die Produkte $n_1'\alpha, n_2'\alpha, \cdots n_k'\alpha, \cdots$ insgesamt von einem ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ um weniger als eine beliebig kleine Größe η abweichen. Wenn dieses mög-
lich ist, so differiert auch $\sin n'\alpha$ beliebig wenig von dem Werte 358
± 1 und also der {absolute} Betrag von $B_{n'} \sin n'\alpha$ beliebig wenig von einem Werte, der gleich oder größer ist als δ'.

Man setze {um zu beweisen, daß dies möglich ist}:

$$n_1'\alpha > y_1 \frac{\pi}{2} - \eta \quad \text{und} \quad n_1'\alpha < y_1 \frac{\pi}{2} + \eta$$

oder:

$$\frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \eta}{n_1'} < \alpha < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \eta}{n_1'};$$

y_1 bezeichnet eine ganze ungerade, zunächst noch unbestimmte Zahl. Der Wert von α fällt in das gegebene Intervall von a bis b, wenn:

$$a < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \eta}{n_1'}, \quad b > \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \eta}{n_1'}$$

ist, oder

$$(n_1'a + \eta)\frac{2}{\pi} < y_1 < (n_1'b - \eta)\frac{2}{\pi} \cdot$$

Dieses Intervall enthält sicherlich eine ungerade Zahl y_1, wenn

$$[n_1'(b - a) - 2\eta]\frac{2}{\pi} \geqq 2, \quad \text{also} \quad n_1' \geqq \frac{\pi + 2\eta}{b - a}$$

gewählt ist. Durch diese Forderung ist nur eine untere Grenze für die zu bildende Reihe {der} n' fixiert, und in diesem Umstande liegt der Kern des ganzen Beweises. Hat man also aus der Reihe $n_1, n_2, \cdots$ die Zahl n_1' und demgemäß y_1 diesen Ungleichungen entsprechend fixiert, so ist α auf das Intervall beschränkt, das kurz mit

$$a' = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \eta}{n_1'}, \quad b' = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \eta}{n_1'}$$

bezeichnet sei und die Länge $2\eta : n_1'$ hat.

[S

In diesem Intervalle können wir nun wiederum α so aussuchen, daß für einen Wert n_2', welcher größer ist als n_1' und in der Reihe $n_1, n_2, \cdots n_k, \cdots$ vorkommt, die Ungleichung besteht:

$$\frac{y_2 \frac{\pi}{2} - \eta}{n_2'} < \alpha < \frac{y_2 \frac{\pi}{2} + \eta}{n_2'}.$$

Die ungerade Zahl y_2 muß der Bedingung genügen:

$$(n_2' a' + \eta)\frac{2}{\pi} < y_2 < (n_2' b' - \eta)\frac{2}{\pi},$$

und dieses Intervall enthält sicherlich eine ungerade Zahl y_2, sobald:

859 $$\left[n_2'(b' - a') - 2\eta\right]\frac{2}{\pi} \geqq 2 \quad \text{oder} \quad n_2' \geqq \frac{\pi + 2\eta}{b' - a'} = \frac{\pi + 2\eta}{2\eta} n_1'$$

gewählt ist. Auf diese Weise erhalten wir nur eine untere Grenze, nach welcher n_2' aus der ursprünglichen Reihe $n_1, n_2, \cdots$ zu wählen ist, und nachdem y_2 der obigen Ungleichung gemäß fixiert ist, bleibt der Wert von α noch innerhalb eines Intervalles von der Länge $2\eta : n_2'$ willkürlich.

In diesem Intervalle kann man ein neues bestimmen, so daß für eine Zahl $n_3' > n_2'$ das Produkt $n_3'\alpha$ von einem ungeraden Vielfachen y_3 von $\frac{1}{2}\pi$ um weniger als ε differiert, und indem man diesen Prozeß fortsetzt, gewinnt man als Grenze eine Stelle α, für welche:

$$n_1'\alpha, \quad n_2'\alpha, \quad n_3'\alpha, \quad \ldots$$

der aufgestellten Forderung stets genügen, so daß auch die {absoluten} Beträge von

$$B_{n_1'} \sin n_1'\alpha, \quad B_{n_2'} \sin n_2'\alpha, \quad B_{n_3'} \sin n_3'\alpha, \quad \ldots$$

um eine beliebig kleine Größe von δ' unterschieden sind. Es wird also {der absolute Betrag von} $\lim B_n \sin n\alpha$ nicht um eine bestimmte Größe kleiner als δ', d. h. die Reihe müßte in jedem noch so kleinen Intervalle ein Divergenzmaß besitzen, das gleich oder größer ist als δ'; sie wäre dann nicht unserer Definition entsprechend im allgemeinen konvergent. In derselben Weise ist der Beweis für die Koeffizienten A_n zu führen.

Soll eine Funktion $f(x)$, welche durch eine trigonometrische Reihe definiert ist, zugleich auch integrierbar sein, so muß diese Reihe auch im allgemeinen konvergieren. Denn anderen Falles würde die Funktion $f(x)$ in jedem kleinsten Intervalle unbestimmt werden, und die Schwankungen der Funktion, d. h. die Differenz der verschiedenen Werte, welche man an solch einer Stelle durch fortgesetzte Summation der Reihenglieder erhält, bliebe dabei größer als eine endliche Zahl δ'. Bei einer integrierbaren Funktion

aber müssen alle die Stellen, an denen die Schwankungen größer sind als eine endliche Zahl δ', sich in Intervalle einschließen lassen, deren Summe beliebig klein wird; sie können also nicht überall dicht über ein noch so kleines endliches Intervall verteilt sein. Sonach hat man den Satz: *In jeder trigonometrischen Reihe werden, wenn sie eine integrierbare Funktion definiert, die Koeffizienten zuletzt unendlich klein, d. h. es ist* $\lim A_n = 0$ *und* $\lim B_n = 0$ *für* $n = \infty$.

9. {**Zweimalige Integration der trigonometrischen Reihe.**} Die zweite von *Riemann* (Ges. Werke, S. 231 flg. {2. Aufl. S. 245 flg.}) erkannte Eigenschaft einer jeden trigonometrischen Reihe, deren Koeffizienten zuletzt unendlich klein werden, ist die folgende:

Bildet man aus der Reihe: **360**

$$\tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

deren Wert an jeder Stelle, wo sie konvergiert, mit $f(x)$ bezeichnet sei, durch zweimalige gliedweise Integration die Reihe:

$$\tfrac{1}{4} A_0 x^2 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}(A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

so konvergiert diese Reihe bei allen Werten von x und stellt im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ eine stetige Funktion $F(x)$ dar. Diese stetige Funktion hat erstlich die Eigenschaft, daß:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = f(x)$$

wird bei allen Werten von x, an denen $f(x)$ einen bestimmten Wert hat, und daß dieser Grenzwert jedenfalls innerhalb der Schwankungen des Reihenwertes liegt an einer Stelle, an welcher die Reihe divergiert; ferner die Eigenschaft, daß:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{2\alpha} = 0$$

wird bei allen Werten von x.

Die Konvergenz der neuen Reihe und ihre Stetigkeit erkennt man, wenn man die Summe aller Glieder bis einschließlich derer mit dem Index n durch N, den Rest der Reihe, d. h.

$$-\sum_{k=n+1}^{k=\infty} \frac{1}{k^2}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

mit R und den größten Wert {des absoluten Betrages} von $A_k \cos kx + B_k \sin kx$ für $k > n$ mit ε bezeichnet. Alsdann bleibt der {absolute} Betrag des Restes offenbar kleiner als:

$$\varepsilon\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\cdots\right]<\frac{\varepsilon}{n}\ ^{*)}$$

und kann also in beliebig kleine Grenzen eingeschlossen werden, wenn man nur n hinreichend groß nimmt. Die trigonometrische Reihe ist demnach bei allen Werten von x eine gleichmäßig konvergente, und daraus folgt dann auch, daß $F(x)$ stetig ist. Denn man kann die Differenz $F(x \pm \Delta x) - F(x)$ beliebig klein machen, wenn man zuerst n so groß wählt, daß R, welche Werte auch x und $x \pm \Delta x$ haben mögen, {absolut genommen} beliebig klein ist, und alsdann Δx so fixiert, daß auch die Differenz der {absoluten Beträge der} Werte von N für x und $x \pm \Delta x$ beliebig klein ist.

361 Man bilde {zweitens} den Quotienten:

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2.$$

Wenn nun

$$\tfrac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)=f(x)$$

ist, wobei $f(x)$ entweder einen bestimmten Wert bezeichnet oder einen unbestimmten Wert, der innerhalb des Wertevorrates der Reihensumme an der Stelle x liegt, so muß sich, wenn man die Reihe

$$\tfrac{1}{2}A_0+\sum_{k=1}^{k=n-1}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)=f(x)+\varepsilon_n$$

setzt, für eine beliebig gegebene {positive} Größe δ ein Wert m von n angeben lassen, so daß, wenn $n > m$ wird, {der absolute

*) {Es ist nämlich

$$\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}=\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k},$$

so daß, wenn man $k = 1, 2, 3, \ldots$ setzt und alle Ungleichungen addiert, sofort hervorgeht:

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\cdots<\frac{1}{n}.\}$$

Betrag von} $\varepsilon_n < \delta$ wird. Wir nehmen nun {die positive Zahl} α so klein an, daß $m\alpha < \pi$ wird, und bringen ferner mittels der Substitution

$$A_n \cos nx + B_n \sin nx = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$$

die obige Reihe {für den Quotienten} auf die Form:*)

$$f(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n \left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right].$$

Diese Reihe teilen wir {abgesehen von ihrem ersten Gliede $f(x)$} in drei Teile, indem wir

1. die Glieder vom Index 1 bis m einschließlich,
2. die Glieder vom Index $m+1$ bis zur größten unter $\pi:\alpha$ liegenden ganzen Zahl, welche s heiße,
3. die Glieder vom Index $s+1$ bis ∞

zusammenfassen. Der erste Teil besteht aus einer endlichen Anzahl stetig sich ändernder Glieder und kann daher seinem Grenzwerte Null beliebig genähert werden, indem man α hinreichend klein werden läßt; der zweite Teil ist, da der Faktor von ε_n beständig positiv ist, indem $\sin x : x$ in den ersten beiden Quadranten eine durchaus abnehmende Funktion ist, offenbar dem {absoluten} Betrage nach kleiner als:

$$\delta\left[\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin s\alpha}{s\alpha}\right)^2\right]$$

{also auch kleiner als δ}. Im dritten Teile endlich zerlege man das allgemeine Glied in

$$\varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2\right]$$

und

$$\varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right] = -\,\varepsilon_n \frac{\sin(2n-1)\alpha \sin\alpha}{(n\alpha)^2},$$ 862

*) {Zunächst kommt die Form:

$$f(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)\left[\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 - 1\right]$$

$$= f(x) + \sum_{n=2}^{n=\infty} \varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - 1\right] - \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 - 1\right].$$

Hier darf nun die erste Summe von $n = 1$ an erstreckt werden, da der in ihr auftretende Faktor von ε_n für $n = 1$ gleich Null wird, nach Nr. 26. Vereinigung beider Reihen gibt alsdann die des Textes.}

so leuchtet ein, daß dieses Glied {absolut genommen} kleiner ist als

$$\delta\left[\frac{1}{(n-1)^2\alpha^2}-\frac{1}{n^2\alpha^2}\right]+\delta\frac{1}{n^2\alpha},$$

und folglich die Summe von $n=s+1$ bis $n=\infty$ kleiner ist als

$$\delta\left[\frac{1}{s^2\alpha^2}+\frac{1}{s\alpha}\right].$$

Dieser Wert geht, da s die größte unter $\pi:\alpha$ liegende ganze Zahl bedeutet, für ein unendlich kleines α über in

$$\delta\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right].$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right]$$

nähert sich daher mit abnehmendem α einem Grenzwerte, der {absolut genommen} nicht größer als

$$\delta\left[1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right]$$

sein kann, also, da δ beliebig klein gemacht werden kann, Null werden muß, und folglich konvergiert

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha^2},$$

welches gleich

$$f(x)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right]$$

ist, wenn α nach Null konvergiert, gegen $f(x)$, womit die aufgestellte Eigenschaft bewiesen ist; $f(x)$ bedeutet dabei einen Wert innerhalb des Wertevorrates der ursprünglichen Reihe an der Stelle x, also, wenn die Reihe an dieser Stelle konvergiert, diesen bestimmten Wert.

Es soll nun {drittens} noch gezeigt werden, daß

$$\lim_{\alpha=0}\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{2\alpha}$$

Null wird und zwar gleichmäßig nach Null konvergiert, d. h. bei allen Werten von x durch Wahl eines hinreichend kleinen Wertes von α {absolut genommen} kleiner gemacht werden kann als eine beliebig vorgegebene Zahl. Um dieses zu beweisen, teile man die {Glieder der} Reihe

868 $$\tfrac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$$

9]

in drei Gruppen, von denen die erste alle Glieder bis zu einem festen Index m enthält, von dem an die {absoluten Beträge der} Koeffizienten A_n und B_n immer kleiner als ε bleiben, die zweite alle folgenden Glieder, für welche $n\alpha$ gleich oder kleiner ist als eine feste Größe c, die dritte den Rest der Reihe umfaßt. Die Summe der ersten endlichen Gruppe bleibt endlich, d. h. sie ist bei allen Werten von x kleiner als eine endliche Zahl Q. Die Summe der zweiten Gruppe ist {absolut genommen} kleiner als

$$2\varepsilon \sum_{m+1}^{s} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2.$$

Die Anzahl der Glieder in dieser Summe ist kleiner als s, und daher ist diese Summe kleiner als $2\varepsilon c : \alpha$*). Die dritte Summe endlich ist {absolut genommen} kleiner als

$$2\varepsilon \sum_{s+1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 < 2\varepsilon \sum_{s+1}^{\infty} \frac{1}{n^2\alpha^2} < \frac{2\varepsilon}{\alpha c}.\text{**)}$$

Folglich bleibt***)

$$\left|\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{2\alpha}\right| < 2\left[Q\alpha + 2\varepsilon\left(c + \frac{1}{c}\right)\right]$$

bei allen Werten von x, woraus der behauptete Satz folgt.

10. {Problem der Integration des zweiten mittleren Differentialquotienten.} Auf Grund des Ergebnisses in dem letzten Paragraphen hat man nun das Problem zu behandeln (*du Bois-Reymond*, Abhandlungen der k. bayerisch. Akad. der W., II. Kl., Bd. 12): Wenn man von einer in einem bestimmten Intervalle stetigen Funktion $F(x)$ weiß, daß ihr zweiter mittlerer Differentialquotient, nämlich:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}$$

---

*) {Hier bedeutet s die größte ganze Zahl, die nicht größer als $c:\alpha$ ist, und überdies ist $\sin^2(n\alpha) < (n\alpha)^2$, woraus sofort die Behauptung des Textes folgt.}

**) {Denn es ist nach der Anmerkung zu S. 552:

$$\sum_{s+1}^{\infty} \frac{1}{n^2\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}\sum_{s+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{s+1}$$

und außerdem $s+1 > c:\alpha$.}

***) {Zunächst ergibt sich

$$\left|\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2}\right| < Q + \frac{2\varepsilon c}{\alpha} + \frac{2\varepsilon}{\alpha c}$$

und hieraus durch Multiplikation mit 2α die Behauptung des Textes.}

an jeder Stelle gleich ist einer integrierbaren Funktion $f(x)$, d. h. an allen Stellen, wo die Funktion $f(x)$ einen bestimmten Wert hat, ebenfalls diesen Wert besitzt, an denjenigen dagegen, wo $f(x)$ unbestimmt zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen ist, einen bestimmten oder unbestimmten Wert besitzt, der innerhalb der nämlichen Unbestimmtheitsgrenzen liegt, kann man dann umgekehrt von der Funktion $F(x)$ behaupten, daß sie sich durch zweimalige Integration aus $f(x)$ ableiten läßt, daß also die Gleichung besteht:

$$F(x) = F_1(x) + Cx + C',$$

wobei

864
$$F_1(x) = \int_{\gamma}^{x} f(y)\,(x-y)\,dy$$

{ist}, C und C' bestimmte Konstanten sind und γ eine willkürlich fixierte Größe bezeichnet?*)

Die aufgeworfene Frage ist leicht zu entscheiden, wenn wir annehmen, daß die Funktion $f(x)$ eine im allgemeinen stetige Funktion ist, die nur an einzelnen Stellen eine sprungweise Unstetigkeit erleidet; für den allgemeinsten Fall, in dem von $f(x)$ nur bekannt ist, daß es eine integrierbare Funktion ist, die also auch unendlich werden kann, ist die Beantwortung schwieriger.

11. {**Ein Hilfssatz.**} Wir stellen folgenden Hilfssatz voraus:

*Weiß man von einer stetigen Funktion $\varphi(x)$, daß innerhalb eines gegebenen Intervalles der zweite mittlere Differentialquotient an allen Stellen den Wert Null hat, so ist $\varphi(x)$ eine ganze lineare Funktion von x.***)

Das gegebene Intervall erstrecke sich von $x = a$ bis $x = b$; man bilde:

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\,[\varphi(b) - \varphi(a)]$$

und

$$\chi(x) = \pm\,\psi(x) - \tfrac{1}{2}\delta\,(x-a)\,(b-x),$$

wobei δ eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet. Es ist nun

$$\frac{\chi(x+\Delta x) - 2\chi(x) + \chi(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = \pm\,\frac{\varphi(x+\Delta x) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\Delta x)}{\Delta x^2} + \delta$$

*) {*Harnack* hat α statt γ; da aber α in § 12 in anderer Bedeutung auftritt, mußte hier ein anderes Zeichen gewählt werden. Daß in der Tat die hier angegebene Funktion $F_1(x)$ bei der Integration herauskommt, wird in § 12 verifiziert.}

**) {Geänderter Wortlaut des ursprünglichen Textes: $\varphi(x)$ *eine lineare Funktion von x mit konstanten Koeffizienten.*}

ein Wert, der an jeder Stelle des für $\varphi(x)$ gegebenen Intervalles schließlich positiv wird für $\{\lim\} \Delta x = 0$, denn der Differenzenquotient der Funktion $\varphi(x)$ wird durch Wahl von Δx beliebig klein. Hieraus folgt, daß die stetige Funktion $\chi(x)$, welche an den beiden Endpunkten des Intervalles a und b den Wert Null hat, im Innern des Intervalles kein Maximum besitzen kann. Denn wenn x_1 eine Stelle bezeichnet, an welcher dieses Maximum liegt, so ist

$$\chi(x_1 + \Delta x) - \chi(x_1) \leqq 0, \qquad \chi(x_1 - \Delta x) - \chi(x_1) \leqq 0;$$

es wird dann:

$$\chi(x_1 + \Delta x) - 2\chi(x_1) + \chi(x_1 - \Delta x) \leqq 0,$$

nicht aber positiv. Daraus folgt, daß die stetige Funktion $\chi(x)$ im ganzen Intervalle von a bis b nicht positiv werden kann; also ist:

$$\pm\, \psi(x) - \tfrac{1}{2}\delta\,(x-a)\,(b-x) < 0$$ 365

oder

$$\pm\, \psi(x) < \tfrac{1}{2}\delta\,(x-a)\,(b-x) < \tfrac{1}{2}\delta\,(b-a)^2.$$

Da δ beliebig klein ist, so folgt hieraus, daß auch der Betrag von $\psi(x)$ beliebig klein wird, d. h. daß

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{x-a}{b-a}\,[\varphi(b) - \varphi(a)]$$

ist. {Also ist $\varphi(x)$ in der Tat eine ganze lineare Funktion.}

12. {Integration des zweiten mittleren Differentialquotienten.} Bezeichnet man nun die Differenz zwischen den im § 10 definierten Funktionen, $F(x) - F_1(x)$, mit $\varphi(x)$, so ist:

$$\lim \frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta x^2} = \lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2} - \lim \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\Delta x^2},$$

und es wird:*)

---

*) {Zunächst kommt

$$\Delta^2 F_1(x) = \int_\gamma^{x+\Delta x} f(y)(x + \Delta x - y)\,dy$$
$$- 2\int_\gamma^{x} f(y)(x-y)\,dy + \int_\gamma^{x-\Delta x} f(y)(x - \Delta x - y)\,dy.$$

Die drei Integrale heben sich, soweit sie sich auf das Intervall von γ bis x erstrecken, gegenseitig fort, so daß bleibt:

$$\frac{\varDelta^2 F_1(x)}{\varDelta x^2} = \frac{1}{\varDelta x^2}\int\limits_0^{\varDelta x}[f(x+\alpha)+f(x-\alpha)]\,(\varDelta x-\alpha)\,d\alpha$$

$$= \frac{f(x+\theta\varDelta x)+f(x-\theta\varDelta x)}{2},$$

wenn man mit $f(x+\theta\varDelta x)$ und $f(x-\theta\varDelta x)$ mittlere Werte bezeichnet, welche innerhalb der Werte der Funktion $f(x)$ in den Intervallen von x bis $x+\varDelta x$ und x bis $x-\varDelta x$ gelegen sind.*) Betrachtet man zunächst solche Intervalle, in denen die Funktion $f(x)$ keine sprungweisen Wertänderungen erleidet, vielmehr durchaus stetig ist, so wird für jede Stelle in denselben:

$$\lim\frac{\varDelta^2\varphi(x)}{\varDelta x^2} = \lim\frac{\varDelta^2 F(x)}{\varDelta x^2} - \lim\frac{\varDelta^2 F_1(x)}{\varDelta x^2}$$

$$= f(x) - \lim\frac{f(x+\theta\varDelta x)+f(x-\theta\varDelta x)}{2},$$

also gleich Null; mithin ist in jedem dieser Intervalle die Differenz

$$F(x) - F_1(x)$$

eine lineare Funktion: $Cx + C'$ {nach § 11}.

Betrachtet man aber ein Intervall, in welchem die Funktion $f(x)$ eine sprungweise Wertänderung erleidet, während sie zu beiden Seiten dieser Stelle stetig ist, so wird auch hier überall $\lim\frac{\varDelta^2\varphi}{\varDelta x^2}$ gleich Null; denn an der Sprungstelle $x=c$ ist $\lim\frac{\varDelta^2 F(x)}{\varDelta x^2}$ gleich $\frac{1}{2}[f(c+0)+f(c-0)]$, und denselben Wert erhält auch $\lim\frac{\varDelta^2 F_1(x)}{\varDelta x^2}$. {Hiermit ist gezeigt, daß die § 10 aufgeworfene Frage bejahend zu beantworten ist.}

$$\varDelta^2 F_1(x) = \int\limits_x^{x+\varDelta x} f(y)(x+\varDelta x-y)\,dy + \int\limits_x^{x-\varDelta x} f(y)(x-\varDelta x-y)\,dy.$$

Wird die neue Veränderliche α im ersten Integrale vermöge der Substitution $y = x+\alpha$ und im zweiten vermöge der Substitution $y = x-\alpha$ eingeführt, so folgt:

$$\varDelta^2 F_1(x) = \int\limits_0^{\varDelta x}[f(x+\alpha)+f(x-\alpha)]\,[\varDelta x-\alpha]\,d\alpha$$

und hieraus durch Division mit $\varDelta x^2$ die Formel des Textes.}

*) {Die beiden θ sind jedoch im allgemeinen *verschiedene* positive echte Brüche.}

13. {Beweis dafür, daß die trigonometrische Reihe die Fouriersche sein muß.} Diese Ergebnisse führen zu dem Satze: Ist durch die trigonometrische Reihe 366

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

eine im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ im allgemeinen stetige Funktion $f(x)$ definiert, welche nur an vereinzelten Stellen sprungweise Unstetigkeiten erleitet, so besteht bei allen Werten von x die Gleichung:*)

$$\frac{1}{4}A_0 x^2 - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) = \int_{-\pi}^{x} f(y)(x-y)\,dy + Cx + C'.$$

Bezeichnet man das Integral auf der rechten Seite kurz mit $F_1(x)$, so folgt, weil die auf der linken Seite stehende Summe eine periodische Funktion mit der Periode 2π ist:

$$F_1(x + 2\pi) + C(x + 2\pi) + C' - \tfrac{1}{4}A_0(x + 2\pi)^2$$
$$= F_1(x) + Cx + C' - \tfrac{1}{4}A_0 x^2$$

oder

$$F_1(x + 2\pi) = F_1(x) - 2C\pi + A_0(x\pi + \pi^2),$$

und weil für $x = -\pi$ die Funktion $F_1(x)$ verschwindet, so ist

$$F_1(\pi) = -2C\pi.$$

Aus derselben Gleichung folgt, wenn man sie nach x differenziert:

$$F_1'(x + 2\pi) = F_1'(x) + A_0\pi,$$

also für $x = -\pi$:

$$F_1'(\pi) = F_1'(-\pi) + A_0\pi = A_0\pi.$$

Da die neu gebildete Reihe eine gleichmäßig konvergente ist, so kann sie gliedweise integriert werden. Man findet sonach die Relationen:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}[F_1(x) + Cx + C']\sin nx\,dx = -\frac{1}{n^2}B_n\pi,$$

---

*) {Unter $F(x)$ wird nämlich nun wieder die in § 9 definierte Funktion verstanden.}

denn es ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \sin nx\,dx = \left[\frac{-x^2\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^2\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{2}{n}\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{2}{n^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin nx\,dx = 0,^{*})$$

und:

367 $$\int_{-\pi}^{+\pi}[F_1(x) + Cx + C']\cos nx\,dx = -\frac{1}{n^2}A_n\pi + (-1)^n\frac{A_0}{n^2}\pi,$$

denn es ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} x^2\cos nx\,dx = \left[\frac{x^2\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{2}{n}\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{2}{n^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\,dx = \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n.^{*})$$

Die Funktion $F_1(x)$ besitzt eine stetige Ableitung, und sonach wird vermittels teilweiser Integration das erste Integral**) gleich:

$$\left[-\frac{\cos nx}{n}[F_1(x) + Cx + C']\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi}[F_1'(x) + C]\cos nx\,dx.$$

Aber auch dieses Integral läßt die teilweise Integration zu, weil $F_1'(x)$ stetig ist und die integrierbare Ableitung $f(x)$ besitzt; demnach folgt:

$$-\frac{1}{n^2}B_n\pi = \left[-\frac{\cos nx}{n}[F_1(x) + Cx + C']\right]_{-\pi}^{+\pi} + \left[\frac{\sin nx}{n^2}[F_1'(x) + C]\right]_{-\pi}^{+\pi}$$

$$-\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

---

*) {Außerdem sind die Formeln (2) und (3) unter B, S. 529, zu berücksichtigen.}

**) {Gemeint ist $\int_{-\pi}^{+\pi}[F_1(x) + Cx + C']\sin nx\,dx.$}

Die Werte in den Klammern verschwinden*), und man erhält:

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx.$$

Sonach ist der Satz bewiesen: *Ist durch eine trigonometrische Reihe eine im allgemeinen stetige Funktion $f(x)$ definiert, welche nur an vereinzelten Stellen eine sprungweise Wertänderung besitzt, so ist die Reihe eine Fouriersche.*

Bemerkung. Um den Satz in seiner allgemeinsten Fassung 368
zu beweisen, d. h. nur unter der Voraussetzung, daß die Funktion $f(x)$, welche durch die trigonometrische Reihe definiert ist, integrierbar ist, woraus nach § 8 hervorgeht, daß die Koeffizienten der Reihe zuletzt unendlich klein werden, muß man wiederum den Nachweis führen, daß die durch zweimalige gliedweise Integration der gegebenen {Reihe} abgeleitete Reihe gleich

$$\int_{-\pi}^{x} f(y)(x-y)dy + Cx + C'$$

wird. Alsdann bleiben die weiteren Schlüsse des letzten Paragraphen bestehen. Zu dem Zwecke hat man den Satz zu beweisen: Wenn eine stetige Funktion die Eigenschaft hat, daß ihr zweiter mittlerer Differentialquotient $\lim \Delta^2 F(x) : \Delta x^2$ gleich wird einer integrierbaren Funktion $f(x)$, die zugleich auch Stellen besitzen kann, an denen sie unendlich wird, so ist $F(x)$ durch zweimalige Integration aus $f(x)$ bis auf eine {additive} lineare Funktion darstellbar. Dieser Satz läßt sich in der Tat beweisen, wenn, was hier der Fall ist, die Bedingung hinzukommt, daß $\lim \Delta^2 F(x) : \Delta x$ allenthalben gleich Null wird, und wenn noch die Voraussetzung gemacht wird, daß die Unendlichkeitsstellen der Funktion $f(x)$ isoliert sind oder nur eine „abzählbare" Menge bilden. (Math. Annal. Bd. 23, S. 266, Bd. 24, S. 246.)

Ebenso kann man den in § 7 erwähnten Satz beweisen: Wenn eine Fouriersche Reihe, deren Koeffizienten mit den Integralen einer Funktion $f(x)$ gebildet sind**), schließlich verschwindende

*) {Weil $F_1(\pi) = -2C\pi$ und $F_1(-\pi) = 0$ ist.}
**) {D. h. die obigen Werte A_n und B_n haben.}

Koeffizienten erhält, so stimmt der Wert der Reihe überall, wo sie konvergiert, mit dem Werte $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ überein, vorausgesetzt, daß dies überhaupt ein bestimmter Wert ist; und an jeder Stelle, wo die ursprüngliche Reihe divergiert, jedoch mit endlichem Divergenzmaße, liegt der Wert von $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ innerhalb der Schwankungen der Reihe an dieser Stelle, oder die Unbestimmtheitsgrenzen dieses Ausdruckes fallen nicht außerhalb der Schwankungen der Reihe.

Endlich kann man auch das allgemeine Theorem beweisen: Eine Funktion $f(x)$, welche durch eine trigonometrische Reihe, deren Koeffizienten zuletzt unendlich klein werden, definiert ist, kann nicht durch eine andere, von dieser verschiedene trigonometrische Reihe dargestellt werden, wenn man von diesen beiden
369 Reihen entweder verlangt, daß sie bei allen Werten von x übereinstimmen sollen, oder auch nur, daß ihre Differenz im allgemeinen Null ist und erstlich nur an Stellen, welche eine *diskrete* Menge bilden, endlich und dem Betrage nach größer ist als eine beliebig kleine endliche Zahl δ (resp. zwischen Unbestimmtheitsgrenzen liegt, deren Beträge größer sind als δ), zweitens nur an Stellen, welche eine *reduzible* Menge bilden, unendlich wird (resp. zwischen Unbestimmtheitsgrenzen liegt, deren Betrag unendlich groß wird).

14. {**Die Fouriersche Integralformel.**} In § 6 haben wir gewisse Bedingungen erkannt, unter denen eine im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ irgendwie definierte integrierbare Funktion $f(x)$ durch eine Fouriersche Reihe von der Form:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\cos kx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\, d\alpha + \sin kx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha\right]$$

dargestellt werden kann, so daß bei jedem Werte von x innerhalb dieses Intervalles die Reihe entweder den Wert $f(x)$ oder den Wert $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ erhält. Kehren wir nun zu der in § 2 genannten allgemeineren Voraussetzung zurück, daß eine Funktion $f(z)$ im Intervalle von $-l$ bis $+l$ gegeben ist, so erhalten wir für diese Funktion unter denselben Bedingungen eine trigonometrische Darstellung, indem wir

$$z = \frac{xl}{\pi}; \qquad f(z) = f\left(\frac{xl}{\pi}\right) = \varphi(x)$$

substituieren. Alsdann wird

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

und

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{xl}{\pi}\right)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(z)\,dz,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{xl}{\pi}\right)\cos kx\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(z)\cos\frac{k\pi z}{l}\,dz,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{xl}{\pi}\right)\sin kx\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\sin\frac{k\pi z}{l}\,dz,$$

folglich:

$$(1)\quad \begin{cases} f(z) = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{+l} f(\alpha)\,d\alpha + \\ \dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\cos\frac{k\pi z}{l}\int_{-l}^{+l} f(\alpha)\cos\frac{k\pi\alpha}{l}\,d\alpha + \sin\frac{k\pi z}{l}\int_{-l}^{+l} f(\alpha)\sin\frac{k\pi\alpha}{l}\,d\alpha\right]. \end{cases}$$ 870

Ist die Funktion $f(z)$ so beschaffen, daß sie im Intervalle von $-l$ bis 0 dieselben Werte wie im Intervalle von $+l$ bis 0 hat*), so werden die Integrale $B_k = 0$, und die Gleichung reduziert sich auf die Form:

$$(2)\quad f(z) = \frac{1}{l}\int_0^l f(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty}\cos\frac{k\pi z}{l}\int_0^l f(\alpha)\cos\frac{k\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Ist aber $f(-z) = -f(z)$, so werden die Integrale $A_k = 0$, und man erhält:

$$(3)\quad f(z) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sin\frac{k\pi z}{l}\int_0^l f(\alpha)\sin\frac{k\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Diese Darstellungen einer sogenannten willkürlichen Funktion beziehen sich immer auf ein *endliches*, wenn auch beliebig großes Intervall. Es entsteht daher schließlich noch die Frage, ob man auch für eine Funktion, die für das ganze Intervall $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ irgendwie definiert ist, eine einheitliche analytische Darstellung dieser Art gewinnen kann. In der Tat läßt sich die-

*) {Exakter: es soll $f(-z) = f(z)$ sein.}

selbe zunächst durch eine naheliegende Schlußfolgerung vermuten und sodann streng beweisen*). Man setze:

$$\int_{-l}^{+l} f(\alpha)\cos(q\alpha)\,d\alpha = \varphi(q), \quad \int_{-l}^{+l} f(\alpha)\sin(q\alpha)\,d\alpha = \psi(q),$$

ferner:

$$\frac{\pi}{l} = \delta, \quad \text{also} \quad \frac{1}{l} = \frac{\delta}{\pi},$$

so erhält die Reihe (1), in welcher x statt s geschrieben wird, die Form:

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi}\varphi(0) + \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\delta}{\pi}\left[\cos(kx\delta)\,\varphi(k\delta) + \sin(kx\delta)\,\psi(k\delta)\right].$$

Läßt man nun l unbegrenzt wachsen, wobei δ nach Null konvergiert, so steht zu erwarten, daß die Summe rechts übergeht in das bestimmte Integral**):

371 $$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [\cos(qx)\varphi(q) + \sin(qx)\psi(q)]\,dq$$

oder, weil für $l = \infty$:

$$\varphi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos(q\alpha)\,d\alpha, \qquad \psi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\sin(q\alpha)\,d\alpha$$

wird, daß die Gleichung besteht:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq\left[\cos(qx)\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos(q\alpha)\,d\alpha + \sin(qx)\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\sin(q\alpha)\,d\alpha\right],$$

das heißt:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos q(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Diese Gleichung, die *Fouriersche Integralformel*, ist zu beweisen.

---

*) Ich befolge dabei im wesentlichen die Methode, welche Herr *C. Neumann* in seiner Schrift: Über die nach Kreis-, Kugel- und Zylinder-Funktionen fortschreitenden Entwicklungen (Leipzig 1881), S. 54—70, ausgebildet hat.

**) {Denn wenn $q = k\delta$, $\Delta q = (k+1)\delta - k\delta = \delta$ gesetzt wird, hat die Summe die Form der Summe J in Nr. 404.}

15. {Verallgemeinerung des Grenzwertes in § 5.} Der in § 3 bewiesene Satz, welcher das Fundament für alle diese Untersuchungen bildet, läßt sich in allgemeinster Weise so aussprechen:

Ist $f(x)$ eine in einem beliebigen, aber endlichen Intervalle von a bis b überall endliche und integrierbare Funktion, so wird:

$$\lim \int_a^b f(x) \cos nx\, dx \quad \textit{und} \quad \lim \int_a^b f(x) \sin nx\, dx$$

für $n = \infty$ gleich Null, wenn die Zahl n in beliebiger Weise über jeden Betrag hinaus wächst.

Denn da früher dieser Satz bewiesen wurde, falls n die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft, so erkennt man leicht, wenn n von der Form $m + \beta$ ist, wobei m eine {positive} ganze Zahl, β eine {positive} Zahl kleiner als Eins bedeutet:

$$\int_a^b f(x) \sin nx\, dx = \int_a^b f(x) \sin mx \cos \beta x\, dx + \int_a^b f(x) \cos mx \sin \beta x\, dx$$

und

$$\int_a^b f(x) \cos nx\, dx = \int_a^b f(x) \cos mx \cos \beta x\, dx - \int_a^b f(x) \sin mx \sin \beta x\, dx,$$

und die rechten Seiten konvergieren mit wachsenden Werten von m nach Null.

Daraus folgt nun wie früher: *Der Grenzwert des Integrals* 372

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1}\, dx$$

für $q = \infty$ hängt nur ab von dem Verhalten der Funktion $f(x)$ in unmittelbarer Umgebung der Stelle x_1 *).

---

*) {Liegt nämlich x_1 nicht im Intervalle von a bis b, so ist der Grenzwert nach dem Vorhergehenden gleich Null. Liegt dagegen x_1 im Intervalle, so wählen wir eine beliebig kleine positive Zahl δ und zerlegen das Integral in die Summe:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^{x_1 - \delta} f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1}\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{x_1 - \delta}^{x_1 + \delta} f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1}\, dx$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_{x_1 + \delta}^{b} f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1}\, dx.$$

Die Grenzwerte des ersten und dritten Integrals für $\lim q = \infty$ sind

Liegt x_1 außerhalb des Intervalles von a bis b, so wird dieser Grenzwert gleich Null; liegt dagegen x_1 innerhalb des Intervalles, so wird der Grenzwert gleich:

$$\tfrac{1}{2}[f(x_1 + 0) + f(x_1 - 0)],$$

vorausgesetzt, daß eine der im § 6 als hinreichend erkannten Bedingungen erfüllt ist. Fällt endlich x_1 mit einer der Grenzen a oder b des Integrationsintervalles zusammen, so ist unter denselben Bedingungen der Grenzwert des Integrals gleich $\tfrac{1}{2}f(a+0)$ oder $\tfrac{1}{2}f(b-0)$.

16. {**Verallgemeinerung auf endlose Intervalle.**} Der vorstehende Satz besteht aber auch unter gewissen Bedingungen, wenn die Grenzen des Integrals unendlich werden. Läßt man zuerst b unendlich werden, betrachtet also das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_a^w f(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx$$

{für beliebig großes w}, so muß, damit der obige Satz seine Geltung behält, erstlich dieses Integral bei jedem endlichen Werte von q einen bestimmten Wert haben, zweitens muß, nachdem $u > x_1$ angenommen ist,

$$\frac{1}{\pi}\int_u^w f(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx$$

entweder bei festem Werte von u durch Wahl von q oder durch Wahl von u unabhängig von q kleiner als eine beliebig kleine Größe δ gemacht werden können, wie groß auch $w > u$ gewählt werden mag.

Für diese Forderungen lassen sich hinreichende Bedingungen angeben, die in einfacheren Aussagen über die Funktion $f(x)$ bestehen.

Erstens: Wenn $f(x)$ bei beliebig wachsenden Werten von x schließlich keine Oszillationen mehr macht, sondern von einem
878 bestimmten Werte für x an entweder beständig wachsend oder beständig abnehmend einer bestimmten endlichen Grenze für $x = \infty$ zustrebt, so ist nach dem zweiten Mittelwertsatze (§ 463):*)

---

gleich Null, da hier x_1 nicht in den Intervallen liegt. Es bleibt also das zweite Integral übrig, das sich nur auf die Umgebung der Stelle x_1 bezieht. Analog ist zu schließen, wenn x_1 in a oder b liegt.}

*) {Jetzt Satz 24, Nr. 424. Daß nämlich dieser Satz für endliche und integrierbare Funktionen überhaupt gilt (nicht nur für stetige), läßt sich leicht beweisen. θ bedeutet wieder einen positiven echten Bruch.}

$$\int_u^w f(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx = f(u)\int_u^{u+\theta(w-u)}\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx,$$

falls die Beträge der Funktion $f(x)$ im Intervalle von u bis ∞ nicht zunehmen, und

$$\int_u^w f(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx = f(w)\int_{u+\theta(w-u)}^{w}\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx,$$

falls die Beträge der Funktion $f(x)$ in dem Intervalle von u bis ∞ nicht abnehmen. Die beiden Integrale rechts aber werden, wenn u fixiert ist, durch Wahl von q beliebig klein, wie groß auch w gewählt ist.*)

Zweitens: Wenn $f(x)$ zwar für $x = \infty$ unendlich viele Maxima und Minima hat, aber $f(x):(x-x_1)$ absolut integrierbar ist. Denn es ist alsdann**):

$$\left|\int_u^\infty f(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx\right| < \int_u^\infty |f(x)|\,\frac{dx}{x-x_1},$$

und dieser Ausdruck wird durch Wahl von u bei jedem Werte von q beliebig klein.

Drittens: Wenn $f(x)$ für $x = \infty$ endlich bleibt und eine Ableitung besitzt, die im Intervalle bis $x = \infty$ absolut integrierbar ist. Denn es ist***):

---

*) {Es ist nämlich, wenn $q(x-x_1) = s$ gesetzt wird:

$$\int_u^{u+\theta(w-u)}\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx = \int_{q(u-x_1)}^{q[u+\theta(w-u)-x_1]}\frac{\sin s}{s}\,ds,$$

und dies Integral hat nach Nr. 469 für $\lim q = \infty$ den Grenzwert Null. Ebenso ist der Schluß für das zweite Integral zu machen.}

**) {Im Original fehlt links die Angabe des absoluten Betrages.}

***) {In dem Doppelintegrale rechts auf folgender Seite tritt die Veränderliche x in zweierlei Bedeutung auf. Es wäre besser, dies Doppelintegral so zu schreiben:

$$\int_u^w f'(x)\left[\int_u^x \frac{\sin q(s-x_1)}{s-x_1}\,ds\right]dx.$$

Die Formel ergibt sich, indem man auf dieses Integral die teilweise Integration ausführt.}

$$\int_u^\infty f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}dx = \left[f(x)\int_u^x \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}dx\right]_u^\infty - \int_u^\infty f'(x)dx\int_u^x \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}dx,$$

also:

$$\int_u^\infty f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}dx = f(\infty)\int_u^\infty \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}dx - \int_u^\infty f'(x)dx\int_u^x \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}dx$$

oder gleich:

$$f(\infty)\int_u^\infty \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}dx - \int_u^\infty f'(x)dx\int_{q(u-x_1)}^{q(x-x_1)} \frac{\sin z}{z}dz.$$

374 Das Integral $\int_{q(u-x_1)}^{q(x-x_1)} \frac{\sin z}{z}dz$ ist {absolut genommen} jedenfalls nicht größer als der Wert $\int_0^\pi \frac{\sin z}{z}dz$ (§ 466, Nr. 2 {jetzt Nr. 469}). Bezeichnet man diesen Wert mit a, so ist der {absolute} Betrag des zweiten Integrals kleiner als

$$a\int_u^\infty |f'(x)|\,dx;$$

er wird also ebenso wie das erste Integral der rechten Seite durch Wahl von u {absolut genommen} beliebig klein, wie groß auch q werden mag.

Unter gleichartigen Bedingungen für die untere Grenze $-\infty$ besteht dann der Satz:

$$\lim \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}dx = \tfrac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)]$$

für jeden endlichen Wert von x_1.

17. {**Übergang zum Fourierschen Integral.**} Von dem behandelten einfachen Integrale kann man nun leicht zu einem zweifachen Integrale übergehen. Es ist:

$$\int_0^q \cos q(x-x_1)dq = \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1},$$

also ist:

$$\int_a^b f(x)dx \int_0^q \cos q(x-x_1)dq = \int_a^b f(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx.$$

Auf der linken Seite kann man, da $f(x)$ integrierbar ist, die Folge der Integrationen vertauschen, und demnach wird:

$$\int_0^q dq \int_a^b f(x)\cos q(x-x_1)dx = \int_a^b f(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx,$$

und folglich besteht {nach § 15} der Satz*):

$$\lim_{q=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^q dq\int_a^b f(x)\cos q(x-x_1)dx$$

ist gleich Null, wenn x_1 außerhalb des Intervalles von a bis b liegt, dagegen gleich $\frac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)]$, wenn x_1 innerhalb dieses 875
Intervalles liegt. Ist $x_1 = a$ oder b, so ist der Grenzwert bezüglich gleich $\frac{1}{2}f(a+0)$ oder $\frac{1}{2}f(b-0)$.

Diese Formel gilt auch, wenn a und b unendlich werden, vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x)$ im Unendlichen die in § 16 als hinreichend erkannten Eigenschaften besitzt; es ist alsdann:

$$\tfrac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)] = \lim_{q=\infty}\ \lim_{\substack{b=+\infty\\ a=-\infty}}\frac{1}{\pi}\int_0^q dq\int_a^b f(x)\cos q(x-x_1)\,dx.$$

Hierbei ist die Reihenfolge der Grenzprozesse zu beachten. Es ist zuerst das zweifache Integral zwischen endlichen Grenzen zu bilden, sodann sind a und b unendlich und schließlich q unendlich zu setzen. Man kann auch zuerst q unendlich werden lassen, wenn man a und b so bestimmt hat, daß der Punkt x_1 eingeschlossen wird; wesentlich nach dem bisherigen Beweisgange aber ist, daß zuerst das Doppelintegral mit endlichen Grenzen gebildet wird.

18. {**Gültigkeitsbedingungen für die Fouriersche Integralformel.**} Schließlich bleibt nur noch die Frage: Unter welchen Bedingungen gilt nun auch die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos q(x-x_1)dx,$$

welche wir oben {in § 14} als die Fouriersche Integralformel bezeichnet haben? Setzt man:

---

*) {Im Original fehlt der Faktor $1:\pi$.}

$$\int_0^q dq \int_a^b f(x) \cos q(x - x_1) dx = U, \qquad \int_a^b f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx = V,$$

so ist {nach § 17} bei jedem endlichen Werte von b:

$$U = V.$$

Setzt man ferner:

$$\int_0^q dq \int_a^\infty f(x) \cos q(x - x_1) dx = U', \qquad \int_a^\infty f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx = V',$$

so ist:

$$V' = \lim V \quad \text{für} \quad b = \infty.$$

Damit nun auch die Gleichung $U' = V'$ bestehen bleibe, muß

$$U' = \lim U \quad \text{für} \quad b = \infty$$

sein, d. h. es muß sein:

376 $$\int_0^q dq \int_a^\infty f(x) \cos q(x - x_1) dx = \lim_{b=\infty} \int_0^q dq \int_a^b f(x) \cos q(x - x_1) dx.$$

Diese Gleichung erfordert einerseits, daß die rechte Seite überhaupt eine bestimmte Grenze hat, was der Fall ist, sobald sich eine untere Grenze u ausfindig machen läßt, so daß für jeden Wert $w > u$:

$$\int_0^q dq \int_u^w f(x) \cos q(x - x_1) dx$$

{absolut genommen} kleiner wird als eine beliebig vorgegebene {positive} Größe δ; andererseits daß

$$\int_u^\infty f(x) \cos q(x - x_1) dx$$

ein bestimmter Wert ist, dessen Integral nach q beliebig klein ist, wenn u hinreichend groß gewählt wird. Unter q ist dabei eine endliche bestimmte Größe zu verstehen.

Auch hierfür lassen sich wiederum hinreichende Bedingungen angeben, durch welche die zuletzt {in § 16} gefundenen drei eingeschränkt werden.

Erstens: Wenn $f(x)$ bei beliebig wachsenden Werten von x schließlich keine Oszillationen mehr macht, sondern von einem bestimmten Werte von x an entweder beständig wachsend oder

beständig abnehmend für $x = \infty$ *nach Null* konvergiert und dabei integrierbar ist. Denn alsdann ist:

$$\int_u^w f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = f(u)\int_u^{u+\theta(w-u)} \cos q(x-x_1)\,dx$$

$$= f(u)\left[\frac{\sin q(x-x_1)}{q}\right]_u^{u+\theta(w-u)},$$

also:

$$\int_0^q dq \int_u^w f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = f(u)\int_0^q \left[\frac{\sin q[u+\theta(w-u)-x_1]}{q} - \frac{\sin q(u-x_1)}{q}\right] dq$$

$$= f(u)\int_{q(u-x_1)}^{q[u+\theta(w-u)-x_1]} \frac{\sin z}{z}\,dz.$$

Dieser Wert ist, wie groß auch w werden mag, {absolut genommen} jedenfalls kleiner als*)

$$|f(u)|\int_0^\pi \frac{\sin z}{z}\,dz$$

und wird also mit mit $f(u)$ {absolut genommen} kleiner als jede 377
vorgegebene Größe. Desgleichen ist auch nach dem ersten Mittelwertsatze {jetzt Satz 21, Nr. 420} **):

$$\int_u^\infty f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = M[\cos q(x-x_1)]\int_u^\infty f(x)\,dx,$$

also dem {absoluten} Betrage nach nicht größer als

$$\left|\int_u^\infty f(x)\,dx\right|.$$

Zweitens: Wenn $f(x)$ zwar für $x = \infty$ unendlich viele Maxima und Minima hat, aber dabei absolut integrierbar ist. Denn alsdann ist***):

$$\left|\int_u^w f(x)\cos q(x-x_1)\,dx\right| < \int_u^\infty |f(x)|\,dx.$$

---

*) {Im Original fehlt die Angabe des absoluten Betrages.}

**) {Hierbei bedeutet $M[\cos q(x-x_1)]$ einen der Werte, die $\cos q(x-x_1)$ im Intervalle annimmt.}

***) {Im Originial fehlt links die Angabe des absoluten Betrages.}

Drittens: Wenn $f(x)$ eine stetige Funktion ist, die für $x = \infty$ nach Null konvergiert und deren Ableitung $f'(x)$ absolut integrierbar ist. Denn es ist:

$$\int_u^w f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = \left[f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{q}\right]_u^w - \frac{1}{q}\int_u^w f'(x)\sin q(x-x_1)\,dx,$$

also:

$$\int_0^q dq\int_u^w f(x)\cos q(x-x_1)dx = f(w)\int_0^q \frac{\sin q(w-x_1)}{q}dq - f(u)\int_0^q \frac{\sin q(u-x_1)}{q}dq$$

$$-\int_0^q \frac{dq}{q}\int_u^w f'(x)\sin q(x-x_1)\,dx.$$

Die beiden ersten Terme rechts werden {absolut genommen} mit $f(u)$ und $f(w)$ beliebig klein, der dritte ist gleich:

$$\int_u^w f'(x)\,dx\int_0^q \frac{\sin q(x-x_1)}{q}dq,$$

also {absolut genommen} kleiner als das Produkt von

$$\int_u^w |f'(x)|\,dx \quad \text{mit} \quad \int_0^\pi \frac{\sin z}{z}\,dz,$$

welches durch Wahl von u beliebig klein wird.

Desgleichen ist:

878 $$\int_u^\infty f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = \left[f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{q}\right]_u^\infty - \frac{1}{q}\int_u^\infty f'(x)\sin q(x-x_1)\,dx.$$

Der absolute Wert von $\frac{\sin q(x-x_1)}{q}$ ist bei allen Werten von q nicht größer als Eins; also wird die rechte Seite dem {absoluten} Betrage nach nicht größer als*)

$$|f(u)| + \int_u^\infty |f'(x)|\,du.$$

Ist solch eine Bedingung auch für $x = -\infty$ erfüllt, so besteht die Gleichung:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^q dq\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx$$

---

*) {Im Original steht $f(u) + \int^w |f'(x)|\,dx$.}

Konvergiert nun q nach Unendlich, so geht die rechte Seite in den Wert $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ über, weil mit den Bedingungen dieses Paragraphen zugleich die Bedingungen im § 16*) erfüllt sind. Sonach wird auch

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = \tfrac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)].$$

Unter den als ausreichend erkannten Bedingungen für die Gültigkeit dieser Gleichung wollen wir die beiden nochmals hervorheben, die für die Anwendung am wichtigsten sind. Die Fouriersche Integralformel gilt bei jedem Werte von x:

1. für jede stetige Funktion, die im Intervalle von $-\infty$ bis $+\infty$ an keiner Stelle, auch nicht im Unendlichen, unendlich viele Maxima und Minima hat und im ganzen unendlichen Intervalle integrierbar ist (solch eine Funktion verschwindet für $x = \pm\infty$);
2. für jede stetige Funktion, die für $x = \pm\infty$ den Wert Null hat und deren Ableitung absolut integrierbar ist.

19. {**Spezialisierung der Formel.**} Die allgemeine Formel erhält eine speziellere Form, sobald $f(x)$ entweder eine paare oder eine unpaare Funktion**) ist; denn schreibt man dieselbe in der Form:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos qx\cos qx_1 + \sin qx \sin qx_1)\,dx = \tfrac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)],$$ 379

so folgt:

Ist $f(x) = f(-x)$, so wird für $x_1 > 0$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dq\cos qx_1 \int_0^{\infty} f(x)\cos qx\,dx = \tfrac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)],$$

und ist $f(x) = -f(-x)$, so wird für $x_1 > 0$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dq\sin qx_1 \int_0^{\infty} f(x)\sin qx\,dx = \tfrac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)].$$

---

*) {Im Original steht § 17.}
**) {D. h. eine gerade oder eine ungerade Funktion.}

Sachregister.

Die Zahlen bedeuten nicht die Seiten, sondern die Nummern des Textes, insbesondere die kursiven Zahlen die Nummern des Harnackschen Anhanges, während A und B die Abschnitte der Einleitung zu diesem Anhange bezeichnen.

In der Regel gehen unter ein und demselben Stichworte die allgemeineren Begriffe den spezielleren voran.

Abkürzungen: Fkt. = Funktion, kompl. = komplex, Koord. = Koordinaten, Log. = Logarithmus, mon. = monogen, rat. = rational, Veränd. = Veränderliche.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

K.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

Z.

Berichtigungen.

Zum ersten Bande.

Seite 49, Zeile 13 von unten füge hinzu: *vorausgesetzt, daß* $F(X) + F(x_0)$ *ist.*
„ 56, „ 5 „ oben lies: Δu statt $u \Delta$.
„ 63, „ 5 „ unten „ $y'(X - x)$ statt $y(X - x)$.
„ 109, „ 9 „ oben ist das Komma zu streichen.
„ 114, „ 1 „ unten lies: f_{x_n} statt f_{x_u}.
„ 185, „ 9 „ oben „ $+$ statt des dritten $-$.
„ 185, „ 13 „ „ „ $\frac{1}{n}$ „ $\frac{1}{n+1}$.
„ 339, „ 4 „ „ „ ds^3 „ 1.
„ 340, „ 7 „ unten „ 13 „ 3.
„ 587, „ 10 „ oben füge hinzu: Der *Hauptwert* des Logarithmus ist überall stetig, *abgesehen von den negativen reellen Werten von z.*
„ 589, „ 17 „ oben füge hinzu: Der Beweis wird in Nr. 650 des zweiten Bandes gegeben werden.
„ 621 schalte im Register ein:
Moivresche Formel 358, 373.

Zum zweiten Bande.

Seite 258, Zeile 16 von oben lies: B_2 statt B^2.
„ 356, Fig. 58. Das krummlinige Viereck muß so klein sein, daß seine Ausdehnungen, horizontal und vertikal gemessen, kleiner als σ sind.
„ 466, Fig. 87 rechts ist die Reihenfolge der Zahlen 1. bis 7. zu ändern.

Erst während des Druckes wurde bemerkt, daß in diesem Bande $\varDelta$, dagegen im ersten Bande Δ als Zeichen des Differentials benutzt worden ist.
